УДК 517.944

Л. И. Дюженкова

О тривиальности решения в полупространстве некоторых дифференциально-функциональных уравнений

В данной заметке обобщается результат, полученный в [1] на случай более общих уравнений и систем.

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(X, Y, D_y)\, u(x, y) = \sum_{j=0}^{N} X^j P_j(Y, D_y)\, u(x, y), \tag{1}$$

где X и Y — операторы сдвига по переменным x и y соответственно, P — многочлен от переменных X, Y, D_y с постоянными коэффициентами.

Решение $u(x, y)$ рассматривается в полупространстве: $x > 0$, $-\infty < y < \infty$. Операторы X и Y определяются так: $Xu(x, y) = u(x + \Delta, y)$, $Yu(x, y) = u(x, y + \Delta^*)$. Будем считать, что Δ и Δ^* не обращаются в нуль одновременно.

Указываются ограничения на поведение решения $u(x, y)$ уравнения (1) на бесконечности, из которых следует, что $u \equiv 0$. При этом используется методика работы [2].

1. Пусть решение уравнения (1) удовлетворяет условию:

$$|u(x, y)| \leqslant Ce^{-x^{q_1+\varepsilon}+|y|^q}, \quad \varepsilon > 0; \qquad q, q_1 > 1. \tag{2}$$

Введем в рассмотрение последовательность функций

$$H_{k,l,m}(x) = (u(x + k\Delta, y), \quad \varphi^{(m)}(y - l\Delta^*)), \tag{3}$$

где k, l, m — целые неотрицательные числа, $\varphi(y) \in \Phi_q$, Φ_q — пространство бесконечно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям

$$|\varphi^{(n)}(y)| \leqslant C^n n^{\left(1-\frac{1}{q}\right)n} e^{-3|y|^q}, \quad q > 1, \quad C = C_\varphi > 0, \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{4}$$

Можно показать, что

$$\frac{d}{dx} H_{k,l,m}(x) = \sum_{j=0}^{N} X^j (u(x + k\Delta, y), \quad P_j^+(Y, D_y)\, \varphi^{(m)}(y - l\Delta^*)), \tag{5}$$

где P_j^+ — формально сопряженное выражение к P_j. Такое равенство, справедливое для случая финитных достаточно гладких $\varphi(y)$, путем предельного перехода с учетом сильного убывания $|u(x + k\Delta, y)\, \varphi^m(y - l\Delta^*)|$ при $|y| \to \infty$ и с использованием теоремы о дифференцировании функциональной последовательности, оказывается справедливыми и для $\varphi(y) \in \Phi_q$.

Определим операторы сдвига Θ_1, Θ_2, Θ_3 на последовательностях $H_{k,l,m}(x)$, полагая: $\Theta_1 H_{k,l,m}(x) = H_{k+1,l,m}(x)$, $\Theta_2 H_{k,l,m}(x) = H_{k,l+1,m}(x)$, $\Theta_3 H_{k,l,m}(x) = H_{k,l,m+1}(x)$. Тогда равенство (5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dx} H_{k,l,m}(x) = \sum_{j=0}^{N} \Theta_1^j P_j^+(\Theta_2, \Theta_3)\, H_{k,l,m}(x) = P^{\ni}(\Theta_1\, \Theta_2\, \Theta_3)\, H_{k,l,m}(x),$$

где $P^{\oplus} = \sum_{j=0}^{N} \Theta_1^j P_j^+(\Theta_2, \Theta_3)$. Отсюда для произвольного целого $n \geqslant 1$

$$\frac{d^n}{dx^n} H_{0,0,0}(x) = [P^{\pm}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)]^n H_{0,0,0}(x).$$

Пусть V_n — множество троек (k, l, m), которые участвуют в построении оператора $(P^{\oplus})^n$. Из (2)—(5) следует цепочка неравенств

$$\max_{(k,l,m)\in V_n} |H_{k,l,m}(x)| \leqslant \max_{(k,l,m)\in V_n} (|u(x + k\Delta, y)|, |\varphi^{(m)}(y - l\Delta^*)|) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(k,l,m)\in V_n} C_1 e^{-(x+k\Delta)^{q_1}+\varepsilon} m^{(1-1/q)m} (e^{|y|^q}, e^{-3|y-l\Delta^*|^q}) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(k,l,m)\in V_n} C_2 e^{-x^{q_1}+\varepsilon} m^{(1-1/q)m} e^{-(k\Delta)^{q_1}+\varepsilon} (e^{|y|^q}, e^{-3|y-l\Delta^*|^q}) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{(k,l,m)\in V_n} C_3 m^{(1-1/q)m} e^{-(k\Delta)^{q_1}+\varepsilon+(bl|\Delta^*|)^q} e^{-x^{q_1}+\varepsilon} \equiv \mu_n e^{-x^{q_1}+\varepsilon} \tag{6}$$

с некоторыми b, C_1, C_2, $C_3 > 0$, не зависящими от n.

Рассмотрим случай, когда $\Delta^* \neq 0$ и оператор P такой, что в (1) $P(X, Y, D_y) = X\tilde{P}(X, X, D_y)$. Видно, что множитель μ_n содержит $e^{(bl|\Delta^*|)^q}$. Так как l пробегает только значения, при которых $(k, l, m) \in V_n$, то $l \leqslant \rho n$ с некоторым $\rho > 0$. Поэтому $e^{(bl|\Delta^*|)^q} \leqslant e^{hn^q}$, $q > 1$, $h > 0$, и μ_n содержит, вообще говоря, очень быстро растущий множитель при $n \to \infty$. Однако, если считать, что в (6) $\Delta > 0$, $q_1 \geqslant q$, $k \geqslant n$, то $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Таким образом, приходим к утверждению.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) $\Delta > 0$ *и* $P(X, Y, D_y) = X\tilde{P}(X, Y, D_y)$. *Тогда из оценки* $|u(x, y)| \leqslant Ce^{-x^q+\varepsilon+|y|^q}$, $q > 1$, $\varepsilon > 0$, *следует* $u \equiv 0$.

В самом деле, из (6) получаем

$$|(d^n/dx^n)\, H_{0,0,0}(x)| \leqslant C_0 C_4^n \mu_n e^{-x^q+\varepsilon}, \quad n = 0, 1, \ldots, q > 1.$$

Известно [3], что из этих оценок вытекает $H_{0,0,0}(x) = (u(x, y), \varphi(y)) \equiv 0$. Как следует из теории пространств S_{α}^{β} [4], пространство Φ_q, $q > 1$, достаточно богато функциями. Поэтому из равенств $(u, \varphi) = 0$, $\varphi \in \Phi_q$ получаем $u \equiv 0$.

Рассмотрим случай, когда $\Delta^* = 0$ и выражение P в уравнении (1) таково, что $P(X, D_y) = X\tilde{P}$. При этом оценка (6) дает

$$\max_{(k,l,m)\in V_n} |H_{k,l,m}(x)| \leqslant \max_{(k,l,m)\in V_n} C_5 m^{(1-1/q)m} e^{-(k\Delta)^{q_1+\varepsilon}} e^{-x^{q_1+\varepsilon}} = \mu_n^* e^{-x^{q_1+\varepsilon}}.$$

Поскольку уравнение (1) при наших предположениях имеет ту же структуру, что и в теореме 1, то

$$|(d^n/dx^n) H_{0,0,0}(x)| < C_6 C^n \mu_n^* e^{-x^{q_1+\varepsilon}},$$

где $\mu_n^* = \mu_n^*(q) \to 0$ при $n \to \infty$ даже в случае произвольного $q > 1$. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Если для решения $u(x, y)$ уравнения*

$$\partial u/\partial x = X\tilde{P}(X, D_y) u(x, y)$$

в полупространстве $x > 0$, $-\infty < y < \infty$ $Xu(x, y) = u(x + \Delta, y)$, $\Delta > 0$, и при некоторых $\varepsilon > 0$, $q > 1$ выполнена оценка $|u(x, y)| \leqslant Ce^{-x^{1+\varepsilon}+|y|^q}$, $C > 0$, то $u \equiv 0$.

2. Пусть $\Delta^* \neq 0$, $\Delta \geqslant 0$. Предыдущие выкладки в этом случае не могут быть использованы в полном объеме, так как в оценке (6) последовательность μ_n здесь может очень сильно расти при $n \to \infty$. Поэтому функция $H_{0,0,0}(x)$ с теми оценками не обязательно будет равна нулю. В качестве функций φ возьмем $\varphi(y) = e^{i\sigma y}$, $\sigma \in R^1$.

Пусть для решения $u(x, y)$ уравнения (1) имеется оценка $|u(x, y)| \leqslant h(x)\xi(y)$ с некоторыми непрерывными функциями $h(x)$, $\xi(y) > 0$ и $\xi(y) \in L_1(-\infty, \infty)$. Обозначим

$$H_{l,m}(x) = (u(x, y), (d^m/dy^m) e^{i\sigma(y-l\Delta^*)}).$$

Рассуждая так же, как и при получении теорем 1 и 2, получаем $(d/dx) H_{l,m}(x) = P^{\mathfrak{D}}(\Theta_2, \Theta_3) H_{l,m}(x)$. Отсюда для $n = 1, 2, \ldots$ $(d^n/dx^n) H_{l,m}(x) = [P^{\mathfrak{D}}(\Theta_2, \Theta_3)]^n H_{l,m}(x)$. Поэтому

$$\max_{(l,m)\in V_n} |H_{l,m}(x)| \leqslant \max_{(l,m)\in V_n} (|u(x, y)|, |\varphi_0^{(m)}(y - l\Delta^*)|) \leqslant C_7' C_7^n |\sigma|^m h.$$

Поскольку $m < rn$, $r > 0$, то $\max_{(l,m)\in V_n} |H_{l,m}(x)| \leqslant C_8' C_8^n |\sigma|^{rn} h(x)$. А вместе с тем и $|(d^n/dx^n)(u(x, y), e^{i\sigma y})| \leqslant C_9' C_9^n |\sigma|^{rn} h(x)$. Если считать, что $h(x) = e^{-x^{1+\varepsilon}}$, то, согласно [3], получим опять $H_{0,0}(x) \equiv 0$, т. е. $(u, e^{i\sigma y}) = 0$, что справедливо при каждом действительном σ. Из свойств преобразования Фурье получаем $u \equiv 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Если для решения u уравнения (1), $\Delta \geqslant 0$, в полупространстве $x > 0$, $-\infty < y < \infty$ выполнена оценка $|u(x, y)| \leqslant C' e^{-x^{1+\varepsilon}} \xi(y)$, где C', $\varepsilon > 0$, $\xi(y) \in L_1(-\infty, \infty)$, то $u \equiv 0$.*

3. Рассмотрим в полупространстве $x > 0$, $y \in R^n$ уравнение

$$\partial u/\partial x = P(X, Y_1, \ldots, Y_n, D_1, \ldots, D_n) u(x, y_1, \ldots, y_n) \tag{1*}$$

где Y_k — оператор сдвига по переменной y_k $(Y_k u(x, y_1, \ldots, y_k, \ldots, y_n) = u(x, y_1, \ldots, y_k + \Delta_k^*, \ldots, y_n)$, $D_k = \partial/\partial y_k$, X — оператор сдвига по переменной x: $Xu(x, y_1, \ldots, y_n) = u(x + \Delta, y_1, \ldots, y_n)$.

Метод доказательства теорем 1—3 дает возможность сформулировать для уравнения вида (1*) такой результат.

Теорема 4. А. *Пусть уравнение (1*) такое, что $\Delta > 0$ и*

$$P(X, Y_1, \ldots, Y_n, D_1, \ldots, D_n) = X\tilde{P}(X, Y_1, \ldots, Y_n, D_1, \ldots, D_n). \tag{7}$$

Тогда из оценки

$$|u| \leqslant Ce^{-x^{q+\varepsilon}+\|y\|^q}, \quad q > 1; \quad C, \varepsilon > 0, \quad \|y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |y_j|,$$

следует $u \equiv 0$.

Если при этом $\sum_{j=1}^{n} |\Delta_j^*| = 0$, *то равенство* $u \equiv 0$ *будет следовать из оценки*

$$|u| \leqslant Ce^{-x^{1+\varepsilon}+\|y\|^q}, \quad C, \varepsilon > 0; \quad q > 1.$$

Б. *Если* P *нельзя представить в виде* (7) *с* $\Delta > 0$, *то решение уравнения* (1*) $u(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv 0$, *если*

$$|u| \leqslant C'e^{-x^{1+\varepsilon}}\xi_1(y_1) \ldots \xi_n(y_n),$$

где C', $\varepsilon > 0$; $\xi_j(y_j) \in L_1(-\infty, \infty)$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство теоремы проходит по схеме доказательств теорем 1—3. Отличие будет состоять в применении вместо функций $\varphi(y) \in \Phi_q$ произведений $\varphi_1(y_1) \ldots \varphi_n(y_n)$, где $\varphi_j(y_j) \in \Phi_q$, $j = 1, \ldots, n$ (утверждение А). В случае Б используются функции $e^{i(\sigma, y)}$, $(\sigma, y) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j y_j$.

4. Рассмотрим систему

$$\partial u/\partial x = P(X, Y_1, \ldots, Y_n, D_1, \ldots, D_n)\, u, \tag{1**}$$

где P — матрица размера $N \times N$, элементы которой — полиномы от X, $Y_1, \ldots, Y_n$, $D_1, \ldots, D_n$ с постоянными коэффициентами.

Пусть решение системы (1**) $u = \{u_i(x, y_1, \ldots, y_n)\}_{i=1}^{N}$ определено в области $G: x > 0, \quad -\infty < y_j < \infty$, $j = 1, \ldots, n$.

Используя способ доказательства теорем 1—3, можно сформулировать утверждение:

Теорема 5. А. *Пусть в системе* (1**) $\Delta > 0$ *и матрица* P *такая, что* $P = X\tilde{P}$. *Тогда из оценки*

$$\|u\| \leqslant Ce^{-x^{q+\varepsilon}+\|y\|^q}, \quad q > 1, \quad \varepsilon > 0, \quad \|y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |y_j,|,$$

следует $u \equiv 0$.

Если, кроме того, в матрице P *отсутствуют операторы сдвига по всем переменным* y_j, *то равенство* $u \equiv 0$ *следует из оценки*

$$\|u\| \leqslant C'e^{-x^{1+\varepsilon}+\|y\|^q}, \quad q > 1, \quad \varepsilon > 0.$$

Б. *Если матрицу* P *нельзя представить в виде* $P = X\tilde{P}$ *и* $\sum_{j=1}^{n} |\Delta_j^*| \neq 0$, *то* $u \equiv 0$, *если*

$$\|u\| \leqslant C''e^{-x^{1+\varepsilon}}\xi_1(y_1) \ldots \xi_n(y_n), \quad C'', \varepsilon > 0, \quad \xi_j(y_j) \in L_1(-\infty, \infty),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Для доказательства надо по аналогии с последовательностью функций $H_{k,l,m}(x)$, ввести последовательность вектор-функций размерности N с координатами $\left(u_i(x + k\Delta, y_1, \ldots, y_n), \prod_{j=1}^{n} \varphi_j^{m_j}(y_j - l_j\Delta_j^*)\right)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. В остальном схема доказательства повторяется.

1. *Дюженкова Л. И.* Об условиях единственности решений некоторых уравнений в частных производных с запаздывающими аргументами.— В кн.: Приближенные методы математического анализа : Сборник научных трудов. Киев : Киев. пед. ин-т, 1979, с. 57—60

2. *Чаус Н. Н.* О классах тривиальности решений некоторых систем уравнений с переменными коэффициентами.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 5, с. 641—647.
3. *Мандельбройт С.* Теоремы замкнутости и теоремы композиции. —М : Изд-во иностр. лит., 1962.— 153 с.
4. *Гельфанд И. М.*, *Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 2. М. : Физматгиз, 1958.— 362 с.

Киев. пед. ин-т

Поступила в редакцию 12.05.82