УДК 510

Е. В. Брижатюк

Об одном способе решения квазилинейных краевых задач

Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = AX + F(t) + \mu\Psi(t, X), \quad t \in [a, b], \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$S_1X(a) = \Gamma_1; \qquad S_2X(b) = \Gamma_2, \tag{2}$$

где A — матрица коэффициентов m-мерного векторного пространства, L собственные числа которой обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$; X— m-мерный вектор; $F(t)$ — вектор-функция; μ — скаляр, $|\mu| < 1$; $\Psi(t, X)$ — вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица в интервале $[a, b]$; S_1, S_2 — матрицы порядков $q \times m$ и $(m-q) \times m$ соответственно; Γ_1, Γ_2 — векторы размерностей q и $m-q$ соответственно.

С помощью проекторов P_1 и P_2 расщепим векторное пространство L на два инвариантных относительно матрицы A подпространства L_1, L_2, где L_1 соответствует $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — всем собственным числам с отрицательной действительной частью, L_2 соответствует $\lambda_{q+1}; \ldots; \lambda_m$ — всем собственным числам с положительной действительной частью.

Разложим вектор X: $X = (P_1 + P_2)X = Z_1 + Z_2$, $Z_i = P_iX$, $i = 1, 2$.

Систему дифференциальных уравнений (1) с краевыми условиями (2) можно представить в виде

$$dZ_1/dt = P_1AZ_1 + P_1F + \mu P_1\Psi(Z_1 + Z_2), \tag{3}$$

$$dZ_2/dt = P_2AZ_2 + P_2F + \mu P_2\Psi(Z_1 + Z_2), \tag{4}$$

$$S_1Z_1(a) + S_1Z_2(a) = \Gamma_1, \tag{5}$$

$$S_2Z_1(b) + S_2Z_2(b) = \Gamma_2. \tag{6}$$

Пусть система уравнений (1) имеет q-мерное интегральное многообразие G_1 решений, примыкающих к частному решению при $t \to \infty$, $m-q$-мерное интегральное многообразие G_2 решений, примыкающих к частному решению при $t \to -\infty$. Задача сводится к отысканию двух таких решений $Z_1 \in G_1$ и $Z_2 \in G_2$, сумма которых удовлетворяла бы краевым условиям (5), (6).

Решать краевую задачу будем методом последовательной прогонки [1]. Обозначим через $Z_{1,n}(t)$, $Z_{2,n}(t)$ решения системы дифференциальных уравнений (3) и (4) соответственно на n-й итерации, где $n \to \infty$. Согласно методу последовательной прогонки в интервале $[a, b]$ интегрируется система уравнений (3) в направлении возрастания аргумента. Из краевых условий (6) находится значение $Z_{2,n}(b)$ и интегрируется система уравнений (4) в направлении убывания аргумента. Затем из краевых условий (5) находится значение $Z_{1,n+1}(b)$ и, если оно не удовлетворяет условию

$$|Z_{1,n+1}(a) - Z_{1,n}(a)| < \varepsilon, \tag{7}$$

где ε — заданное достаточно малое число, повторяется описанный выше вычислительный процесс до выполнения условия (7).

Решение краевой задачи находится в виде $X(t) = Z_{1,n+1}(t) + Z_{2,n+1}(t)$. Чтобы решать таким способом квазилинейную краевую задачу, необходимо задаться приближенными значениями $Z_{1,1}(t)$, $Z_{2,1}(t)$. Эти значения легко получить, решая предварительно методом последовательной прогонки систему линейных дифференциальных уравнений

$$dZ_1/dt = P_1AZ_1 + P_1F, \qquad dZ_2/dt = P_2AZ_2 + P_2F,$$

удовлетворяющих краевым условиям (5) и (6), которая соответствует рассматриваемой системе квазилинейных дифференциальных уравнений. Полученные решения $Z_1(t)$, $Z_2(t)$ линейной краевой задачи принимаем за первое приближение в решении методом последовательной прогонки квазилинейной краевой задачи.

Докажем сходимость при $n \to \infty$ предложенного способа решения квазилинейных краевых задач.

Для невязки решений $\Delta_{i,n}(t) = Z_{i,n+1}(t) - Z_{i,n}(t)$, $i = 1, 2$, имеем систему уравнений

$$d\Delta_{i,n}/dt = P_iA\Delta_{i,n} + \mu P_i\delta\Psi \tag{8}$$

с краевыми условиями

$$S_1\Delta_{1,n}(a) + S_1\Delta_{2,n}(a) = \Gamma_1, \qquad S_2\Delta_{1,n}(b) + S_2\Delta_{2,n}(b) = \Gamma_2, \tag{9}$$

где Z_1, Z_2 — решения краевой задачи, $\delta\Psi(Z_1 + \Delta_{1,n-1} + Z_2 + \Delta_{2,n-1}) = \Psi(Z_1 + \Delta_{1,n-1} + Z_2 + \Delta_{2,n-1}) - \Psi(Z_1 + Z_2)$ — приращение функции. Так как функция $\Psi(Z_1 + Z_2)$ удовлетворяет условию Липшица в интервале $[a, b]$, то имеет место оценка

$$|\Psi(Z_1 + \Delta_{1,n-1} + Z_2 + \Delta_{2,n-1}) - \Psi(Z_1 + Z_2)| \leqslant L\{|\Delta_{1,n-1}| + |\Delta_{2,n-1}|\},$$

где L — постоянная Липшица.

Решение системы дифференциальных уравнений (8) принимает вид:

$$\Delta_{i,n}(t) = \exp\{P_iAt\}\Delta_{i,n}(t_0) + \mu\exp\{P_iAt\}\int_{t_0}^{t}\exp\{-P_iAt\}P_i\delta\Psi dt.$$

Для невязки решений находим

$$\Delta_{1,n}(b) = \exp\{P_1A(b-a)\}\Delta_{1,n}(a) + \mu\exp\{P_1A(b-a)\}\int_a^b\exp\{-P_1At\}P_1\delta\Psi dt.$$

Из краевых условий (9) имеем $S_2\Delta_{2,n}(b) = -S_2\Delta_{1,n}(b)$ или $\Delta_{2,n}(b) = -\Delta_{1,n}(b)$. Невязку решений запишем в виде

$$\Delta_{2,n}(a) = \exp\{-P_2A(b-a)\}\Delta_{2,n}(b) + \mu\exp\{-P_2A(b-a)\} \times$$

$$\times\int_a^b\exp\{-P_2At\}P_2\delta\Psi dt.$$

Из краевых условий (9) следует $S_1\Delta_{1,n+1}(a) = -S_1\Delta_{2,n}(a)$, или

$$\Delta_{1,n+1}(a) = -\Delta_{2,n}(a) = -\exp\{-P_2A(b-a)\}\Big[-\exp\{P_1A(b-a)\}\Delta_{1,n}(a) -$$

$$-\mu\exp\{P_1A(b-a)\}\int_a^b\exp\{-P_1At\}P_1\delta\Psi dt\Big] - \mu\exp\{-P_2A(b-a)\}\times$$

$$\times\int_a^b\exp\{-P_2At\}P_2\delta\Psi dt = \exp\{(P_1-P_2)A(b-a)\}\Delta_{1,n}(a) +$$

$$+\mu\exp\{(P_1-P_2)A(b-a)\}\int_a^b\exp\{-P_1At\}P_1\delta\Psi dt +$$

$$+\mu\exp\{-P_2A(b-a)\}\int_a^b\exp\{-P_2At\}P_2\delta\Psi dt.$$

Полагаем $\gamma_N = \max\limits_{[a,b]}\{|\Delta_{1,N}| + |\Delta_{2,N}|\}$, где N — номер итерации. Из системы уравнений (10) получаем оценку

$$| \Delta_{1,n+1}(a) | \leqslant \| \exp\{(P_1 - P_2) A (b-a)\} \| \, | \Delta_{1,n}(a) | + | \mu | \, \| \exp\{(P_1 - P_2) A (b-a)\} \| \, \| P_1 \| \, L\gamma_{n-1} \int_a^b \| \exp\{-P_1 A t\} \| \, dt + | \mu | \, \| \exp\{-P_2 A (b-a)\} \| \, \| P_2 \| \, L\gamma_{n-1} \int_a^b \| \exp\{-P_2 A t\} \| \, dt.$$

Проинтегрировав два последних интеграла правой части и произведя соответствующие преобразования, получим оценку

$$| \Delta_{1,n+1}(a) | \leqslant \| \exp(P_1 - P_2) A (b-a) \| \, | \Delta_{1,n}(a) | + | \mu | \, \| \exp\{-P_2 A (b-a)\} \| \, L\gamma_{n-1}/\| A \| + | \mu | \, \| \exp\{-2P_2 A (b-a)\} \| \, L\gamma_{n-1}/\| A \|.$$

Из краевых условий (9) находим $| \Delta_{1,n+1}(a) | = | \Delta_{2,n}(a) | < \gamma_n$. В свою очередь, $| \Delta_{1,n}(a) | < \gamma_n$. Теперь неравенство (11) можно представить в виде

$$\gamma_n \leqslant \| \exp\{(P_1 - P_2) A (b-a)\} \| \, \gamma_{n-1} + | \mu | \, \| \exp\{-P_2 A (b-a)\} \| \, L\gamma_{n-1}/\| A \| + | \mu | \, \| \exp\{-2P_2 A (b-a)\} \| \, L\gamma_{n-1}/\| A \|,$$

или

$$\gamma_n \leqslant [(| \mu | \, \| \exp\{-P_2 A (b-a)\} \| \, L (1 - \| \exp\{-P_2 A (b-a)\} \|))/ (\| A \| (1 - \| \exp\{(P_1 - P_2) A (b-a)\} \|))] \, \gamma_{n-1},$$

где $b > a$.

При возрастании аргумента множитель при γ_{n-1} стремится к 0. Следовательно, $\gamma_n < \gamma_{n-1}$, что свидетельствует о сходимости предложенного способа решения квазилинейных краевых задач.

1. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова.— Киев : Наук. думка, 1981.— 411 с.
2. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 588 с.
3. *Квакернаак X., Сиван В.* Линейные оптимальные системы уравнений. — М. : Мир, 1977.— 650 с.
4. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М. : Наука, 1978.— 280 с.

Киев. ин-т инж. гражд. авиации

Поступила в редакцию 22.11.81