УДК 517.98

І. В. Лівінський, Д. В. Радченко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗОБРАЖЕННЯ АЛГЕБР, ЗАДАНИХ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИМ СПІВВІДНОШЕННЯМ, ЩО ВІДПОВІДАЮТЬ РОЗШИРЕНИМ ГРАФАМ ДИНКІНА $\widetilde{D}_4$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$

We describe, up to unitary equivalence, all k-tuples $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$ of unitary operators such that $A_i^{n_i} = I$ for $i = \overline{1,k}$ and $A_1 A_2 \ldots A_k = \lambda I$, where the parameters $(n_1, \ldots, n_k)$ correspond to one of the extended Dynkin diagrams $\widetilde{D}_4$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$, and $\lambda \in \mathbb{C}$ is a fixed root of unity.

Описываются с точностью до унитарной эквивалентности неприводимые системы $(A_1, A_2, \ldots, A_k)$, состоящие из k унитарных операторов, таких, что $A_i^{n_i} = I$, $i = \overline{1,k}$, и $A_1 A_2 \ldots A_k = \lambda I$, где набор $(n_1, \ldots, n_k)$ соответствует одному из расширенных графов Дынкина $\widetilde{D}_4$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$, а число $\lambda \in \mathbb{C}$ является некоторым фиксированным корнем из единицы.

1. Вступ. Позначимо через $T_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ граф, що є об'єднанням k ланцюгів довжин $n_1, n_2, \ldots, n_k$ відповідно, які з'єдані в одній вершині, що є спільним кінцем усіх ланцюгів (під довжиною ланцюга тут мається на увазі кількість вершин). Наприклад, $T_{2,2,2,2}$ — це чотирикутна зірка. З кожним графом $\Gamma = T_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ пов'яжемо однопараметричну сім'ю $*$-алгебр

$$\mathcal{A}_\Gamma(\lambda) = \mathbb{C}\langle a_1, \ldots, a_k | a_1 a_1^* = \ldots = a_k a_k^* = a_1^{n_1} = \ldots = a_k^{n_k} = 1, a_1 \ldots a_k = \lambda \cdot 1 \rangle,$$

де $\lambda \in S^1$ — параметр (тут і далі через S^1 позначено множину комплексних чисел одиничної норми).

Дослідження зображень алгебр $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ є мультиплікативним аналогом задач про зображення сімей адитивно пов'язаних самоспряжених операторів із додатковими умовами на спектр (див., наприклад, [1 – 3]). Крім того, ця задача пов'язана з класичним результатом [4] відносно зображення унітарних операторів у вигляді добутку чотирьох унітарних інволюцій, а також його узагальненнями (див. [5, 6]).

У цій роботі ми описуємо всі незвідні $*$-зображення алгебр $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ обмеженими лінійними операторами у випадку, коли Γ є одним із чотирьох розширених графів Динкіна $\widetilde{D}_4$, $\widetilde{E}_6$, $\widetilde{E}_7$, $\widetilde{E}_8$, а λ — коренем з одиниці. Як буде доведено далі, всі такі зображення є скінченновимірними. Більше того, взявши визначник обох сторін мультиплікативного співвідношення в означенні алгебр, переконаємось, що скінченновимірні зображення $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ існують лише тоді, коли λ є коренем з одиниці. Для кожного λ, що не є коренем з одиниці, ми також вказуємо нескінченну сім'ю незвідних нескінченновимірних зображень.

Зауважимо, що образи елементів a_i автоматично будуть унітарними операторами, а отже, опис незвідних зображень алгебри $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ еквівалентний опису незвідних систем з k унітарних операторів A_1, $A_2, \ldots, A_k$, що задовольняють співвідношення $A_1^{n_1} = I$, $A_2^{n_2} = I, \ldots, A_k^{n_k} = I$, $A_1 A_2 \ldots A_k = \lambda I$.

Скінченновимірні зображення всіх алгебр $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ будемо будувати за однаковою схемою. В кожній алгебрі $\mathcal{A}$ ми вводимо самоспряжену підалгебру $\mathcal{B}$ таку, що $\mathcal{A} = \mathcal{B}[a_1]$ і всі незвідні зображення $\mathcal{B}$ скінченновимірні і легко знаходяться. Далі доводимо, що всі незвідні зображення $\mathcal{A}$ скінченновимірні. Кожне незвідне зображення π алгебри $\mathcal{A}$ в гільбертовому

© І. В. ЛІВІНСЬКИЙ, Д. В. РАДЧЕНКО, 2012

просторі $\mathcal{H}$, при обмеженні на $\mathcal{B}$, розпадається в пряму суму незвідних зображень $\mathcal{B}$. Використовуючи явний вигляд таких зображень і те, що $a_1^{n_1} = 1$, знаходимо формули для π.

Альтернативний підхід до опису зображень $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ дає теорія Маккі зображень розширень груп (див., наприклад, [7], §13.3). В цьому випадку замість алгебри $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ при $\lambda^n = 1$ розглядається група

$$G_{\Gamma,n} = \langle a_1,\ \ldots, a_k,\ e \mid a_i^{n_i} = 1,\ a_1 \ldots a_k = e,\ ea_i = a_i e,\ e^n = 1 \rangle.$$

При цьому незвідні зображення $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ відповідають незвідним унітарним зображенням $G_{\Gamma,n}$. Крім того, підалгебра $\mathcal{B}$ відповідає нормальній підгрупі $H \lhd G_{\Gamma,n}$ такій, що фактор-група $G_{\Gamma,n}/H$ є скінченною. Таким чином, група $G_{\Gamma,n}$ є скінченним розширенням групи H, і можна побудувати її незвідні зображення виходячи з незвідних зображень H. У цій роботі ми не будемо використовувати теорію Маккі, натомість будуємо зображення за допомогою підалгебри $\mathcal{B}$.

Нам знадобляться деякі допоміжні твердження. Далі скрізь через $[u, v]$ позначатимемо мультиплікативний комутатор $uvu^{-1}v^{-1}$ від оборотних елементів u, v. Доведення наступної теореми можна знайти, наприклад, у [8, с. 254].

Теорема 1. *Довільна незвідна пара U, V унітарних операторів, які задовольняють умову $[U, V] = \mu I$ для деякого фіксованого $\mu \in S^1$, що є первісним коренем з одиниці степеня n, унітарно еквівалентна одній із пар*

$$U = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu^{n-1} \end{pmatrix}, \qquad V = \beta \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де α, $\beta \in S^1$ — параметри. Дві пари (α, β), (α', β') задають унітарно еквівалентні зображення тоді і тільки тоді, коли $(\alpha/\alpha')^n = (\beta/\beta')^n = 1$.

Оператори у правих частинах формул (1) позначимо через U_α, V_β. Введемо також позначення

$$W_\gamma = \gamma \begin{pmatrix} 0 & \mu^{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{n-2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_\sigma = \sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu^2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Для всіх α, β, $\gamma \in S^1$ виконуються рівності $U_\alpha V_\beta W_\gamma = \alpha\beta\gamma I$, $W_\gamma V_\beta U_\alpha = \mu^{-1}\alpha\beta\gamma I$, $V_\beta U_\alpha^* = S_{\alpha^{-1}\beta}$. Наведемо деякі необхідні твердження щодо еквівалентності систем таких операторів.

Теорема 2. *Нехай α, β, $\gamma \in S^1$, тоді*:

1) *трійки $\left(U_\alpha^{-1}, V_\beta^{-1}, W_\gamma^{-1}\right)$ і $\left(U_{\alpha^{-1}}, V_{\beta^{-1}}, W_{\mu\gamma^{-1}}\right)$ унітарно еквівалентні*;

2) *трійки* $\big(U_\alpha, V_\beta, W_\gamma\big)$, $\big(W_{\delta^{-1}\alpha}, U_\beta, V_{\delta\gamma}\big)$, $\big(V_\alpha, W_{\delta^{-1}\beta}, U_{\delta\gamma}\big)$ *унітарно еквівалентні для кожного* $\delta \in S^1$ *такого, що* $\delta^n = (-1)^{n-1}$;

3) *четвірки* $\big(U_\alpha, V_\beta, U_\gamma^*, V_\delta^*\big)$, $\big(V_{\alpha^{-1}}^*, U_\beta, V_{\gamma^{-1}}, U_\delta^*\big)$, $\big(U_{\alpha^{-1}}^*, V_{\beta^{-1}}^*, U_{\gamma^{-1}}, V_{\delta^{-1}}\big)$, $\big(V_\alpha, U_{\beta^{-1}}^*, V_\gamma^*, U_{\delta^{-1}}\big)$ *унітарно еквівалентні для всіх* α, β, γ, $\delta \in S^1$;

4) *шістки* $\big(U_\alpha, V_\beta, S_\sigma, U_{\alpha'}^*, V_{\beta'}^*, S_{\sigma'}^*\big)$, $\big(S_{\delta\alpha^{-1}}^*, U_\beta, V_{\delta\sigma}, S_{\delta\alpha'^{-1}}, U_{\beta'}^*, V_{\delta\sigma'}^*\big)$, $\big(V_{\delta^2\alpha^{-1}}^*, S_{\delta\beta^{-1}}^*, U_{\delta\sigma}, V_{\delta^2\alpha'^{-1}}, S_{\delta\beta'^{-1}}, U_{\delta\sigma'}^*\big)$, $\big(U_{\delta^2\alpha^{-1}}^*, V_{\delta^2\beta^{-1}}^*, S_{\sigma^{-1}}^*, U_{\delta^2\alpha'^{-1}}, V_{\delta^2\beta'^{-1}}, S_{\sigma'^{-1}}\big)$, $\big(S_{\delta^{-1}\alpha}, U_{\delta^2\beta^{-1}}^*, V_{\delta\sigma^{-1}}^*, S_{\delta^{-1}\alpha'}^*, U_{\delta^2\beta'^{-1}}, V_{\delta\sigma'^{-1}}\big)$, $\big(V_\alpha, S_{\delta^{-1}\beta}, U_{\delta\sigma^{-1}}^*, V_{\alpha'}^*, S_{\delta^{-1}\beta'}^*, U_{\delta\sigma'^{-1}}\big)$ *унітарно еквівалентні для всіх* α, β, σ, α', β', $\sigma' \in S^1$ *і* $\delta \in S^1$ *такого, що* $\delta^n = (-1)^{n-1}$.

Доведення. Розглянемо оператори U_α, V_β, W_γ, S_σ детальніше.

1. Оператор U_α має власні вектори

$$u_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \quad k = \overline{0, n-1},$$

що відповідають власним числам $\alpha\mu^k$. Крім того, $V_\beta u_k = \beta u_{k+1}$, $W_\gamma u_k = \gamma\mu^{-k} u_{k-1}$. Таким чином, у новій базі $\{u_0, u_{n-1}, \ldots, u_1\}$ оператори U_α^{-1}, V_β^{-1}, W_γ^{-1} запишуться як $U_{\alpha^{-1}}$, $V_{\beta^{-1}}$, $W_{\mu\gamma^{-1}}$ відповідно.

2. Оператор V_β має власні вектори

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\delta^{-k}\mu^{-\binom{k}{2}}, \delta^{-k}\mu^{-k-\binom{k}{2}}, \ldots, \delta^{-k}\mu^{-(n-1)k-\binom{k}{2}}\right), \quad k = \overline{0, n-1},$$

що відповідають власним числам $\beta\mu^k$. Оскільки

$$\delta^{-n-k}\mu^{-\binom{n+k}{2}} = \delta^{-k}\mu^{-\binom{k}{2}} \qquad \text{для всіх} \quad k \in \mathbb{Z},$$

безпосередньою перевіркою встановлюємо, що $W_\gamma v_k = \delta\gamma v_{k+1}$. Таким чином, у новій базі $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ оператори V_β, W_γ запишуться як U_β і $V_{\delta\gamma}$. Для останньої трійки доведення аналогічне.

3. Оператори V_β, V_δ^* мають власні вектори

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1, \mu^{-k}, \ldots, \mu^{-(n-1)k}\right), \quad k = \overline{0, n-1},$$

що відповідають власним числам $\beta\mu^k$ і $\delta\mu^{-k}$ відповідно. Таким чином, у новій базі $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ оператори V_β і V_δ^* запишуться як U_β, U_δ^* відповідно. Далі,

$$U_\alpha v_k = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\left(1, \mu^{-(k-1)}, \ldots, \mu^{-(n-1)(k-1)}\right) = \alpha v_{k-1},$$

тому U_α запишеться як $V_{\alpha^{-1}}^*$. Аналогічно для U_γ^* і двох інших четвірок.

4. Оператор V_β має власні вектори

$$v_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\delta^{-k}\mu^{\binom{k}{2}}, \delta^{-k}\mu^{-k+\binom{k}{2}}, \ldots, \delta^{-k}\mu^{-(n-1)k+\binom{k}{2}}\right), \quad k = \overline{0, n-1},$$

що відповідають власним числам $\beta\mu^k$. Крім того,

$$U_\alpha v_k = \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\left(\delta^{-k}\mu^{\binom{k}{2}}, \delta^{-k}\mu^{1-k+\binom{k}{2}}, \ldots, \delta^{-k}\mu^{-(n-1)(k-1)+\binom{k}{2}}\right) = \delta^{-1}\alpha\mu^{k-1} v_{k-1}$$

і

$$S_\sigma v_k = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\left(\delta^{-k}\mu^{-(n-1)(k+1)+\binom{k}{2}}, \delta^{-k}\mu^{\binom{k}{2}}, \ldots, \delta^{-k}\mu^{-(n-2)(k+1)+\binom{k}{2}}\right) = \delta\sigma v_{k+1}.$$

Таким чином, у новій базі $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ оператори U_α, $U_{\alpha'}^*$, V_β, $V_{\beta'}^*$, S_σ, $S_{\sigma'}^*$ запишуться як $S_{\delta\alpha^{-1}}^*$, $S_{\delta\alpha'^{-1}}$, U_β, $U_{\beta'}^*$, $V_{\delta\sigma}$, $V_{\delta\sigma'}^*$ відповідно. Для інших шісток доведення аналогічні.

Теорему 2 доведено.

Для довільного зображення π образ $\pi(x)$ елемента x, де $x = a$, b, c, d, u, v, w, s, t, будемо позначати відповідною великою літерою X. Літерами α, β, γ, δ, ζ, λ, μ, σ позначатимемо лише комплексні числа з одиничного кола. Означимо також функцію $e\colon \mathbb{R} \to S^1$, $e(x) = \exp(2\pi i x)$.

Для параметризації зображень алгебр $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_6}$ і $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_8}$ нам знадобляться значення деяких гауссових сум. Позначимо

$$G(m,n) = \sum_{j=0}^{n-1} e\left(\frac{mj^2}{n}\right)$$

для натуральних взаємно простих m, n. Справджуються наступні формули [9]:

$$G(m,n) = \begin{cases} 0, & n \equiv 2 \pmod 4, \\ \sqrt{n}\left(\dfrac{m}{n}\right), & n \equiv 1 \pmod 4, \\ e\left(\dfrac{1}{4}\right)\sqrt{n}\left(\dfrac{m}{n}\right), & n \equiv 3 \pmod 4, \\ e\left(\dfrac{1}{8}\right)\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{m}\right), & n \equiv 0, \quad m \equiv 1 \pmod 4, \\ e\left(-\dfrac{1}{8}\right)\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{m}\right), & n \equiv 0, \quad m \equiv 3 \pmod 4, \end{cases}$$

де $\left(\dfrac{m}{n}\right)$ позначає символ Якобі.

2. Зображення алгебри $\boldsymbol{\mathcal{A}_{\widetilde{D}_4}(\lambda)}$. Нехай $\Gamma = \widetilde{D}_4 = T_{2,2,2,2}$. Розглянемо $*$-алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$:

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle a,b,c,d \,|\, aa^* = bb^* = cc^* = dd^* = a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = 1, abcd = \lambda \cdot 1\rangle.$$

Позначимо унітарні елементи $u = ac$, $v = cb$, $w = ba$ в $\mathcal{A}$. Тоді $uvw = 1$ і

$$[u,v] = uvu^{-1}v^{-1} = ac\cdot cb\cdot ca\cdot bc = (abc)^2 = \lambda^2\cdot 1,$$

$$[v,w] = vwv^{-1}w^{-1} = cb\cdot ba\cdot bc\cdot ab = (cab)^2 = \lambda^2\cdot 1,$$

$$[w,u] = wuw^{-1}u^{-1} = ba\cdot ac\cdot ab\cdot ca = (bca)^2 = \lambda^2\cdot 1.$$

Нехай $\mu = \lambda^2$ і $\mathcal{B}$ — самоспряжена підалгебра $\mathcal{A}$, породжена елементами u, v, w. Тоді справджується наступна лема, що випливає з теореми 1.

Лема 1. *Довільне незвідне зображення (U,V,W) алгебри $\mathcal{B}$ унітарно еквівалентне одному з наступних*:

$$U = U_\alpha, \qquad V = V_\beta, \qquad W = W_\gamma,$$

де α, β, $\gamma \in S^1$, $\alpha\beta\gamma = 1$, — деякі числа. Дві трійки (α,β,γ), (α',β',γ') задають унітарно еквівалентні зображення тоді і тільки тоді, коли $(\alpha/\alpha')^n = (\beta/\beta')^n = (\gamma/\gamma')^n = 1$.

Тут і далі дві трійки вигляду (α,β,γ) будемо вважати еквівалентними, якщо вони задають унітарно еквівалентні зображення алгебри $\mathcal{B}$.

Лема 2. *Довільне незвідне зображення алгебри $\mathcal{A}$ є скінченновимірним.*

Доведення. Розглянемо незвідне зображення алгебри $\mathcal{A}$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Зі співвідношень в алгебрі $\mathcal{B}$ випливає, що оператори U^n, V^n, W^n комутують з усією алгеброю $\mathcal{B}$ (де $\mu^n = 1$). Оскільки спряження оператором A змінює кожний з U, V, W на обернений, $U^n + {}+U^{-n}$ комутує з $\mathcal{A}$, а отже, є скалярним. Таким чином, $U^{2n} - c_0 U^n + 1 = 0$ і аналогічні рівності виконуються для V, W. Тоді неважко перевірити, що для довільного вектора $x \in \mathcal{H}$ вектори $\left\{U^i V^j W^k x | i, j, k \in \overline{0, 2n-1}\right\}$ породжують скінченновимірний підпростір $\mathcal{H}_0$, інваріантний відносно $\mathcal{B}$. Тоді $\mathcal{H}_0 + A(\mathcal{H}_0)$ буде інваріантним відносно $\mathcal{A}$.

Лему 2 доведено.

Зауважимо, що скінченновимірність зображень в трьох інших алгебрах доводиться аналогічно.

Нехай π — незвідне зображення алгебри $\mathcal{A}$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Обмеження π на підалгебру $\mathcal{B}$ розпадається в пряму суму незвідних зображень $\mathcal{B}$. Нехай $\mathcal{H}_1$ — один із мінімальних інваріантних відносно $\mathcal{B}$ підпросторів і π_1 — відповідне зображення $\mathcal{B}$ в цьому просторі. Індуктивно позначимо $\mathcal{H}_{k+1} = A(\mathcal{H}_k)$, $A_k = A|_{\mathcal{H}_k}$. За індукцією неважко показати, що кожний підпростір $\mathcal{H}_k$ є інваріантним відносно $\mathcal{B}$. Дійсно, припустимо, що $\mathcal{H}_k$ — інваріантний підпростір. Тоді $U(\mathcal{H}_{k+1}) = UA(\mathcal{H}_k) = AVW(\mathcal{H}_k) = A(\mathcal{H}_k) = \mathcal{H}_{k+1}$. Аналогічно, $\mathcal{H}_{k+1}$ є інваріантним для V і W, а тому і для всіх операторів, що зображують $\mathcal{B}$. Таким чином, можемо означити незвідні зображення π_k алгебри $\mathcal{B}$ у просторах $\mathcal{H}_k$.

Оскільки $A^2 = I$, отримуємо $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_1$, і серед просторів $\mathcal{H}_k$ є щонайбільше два різних. Простір $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ є інваріантним для всієї алгебри $\mathcal{A}$, звідки $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Зафіксуємо в кожному просторі $\mathcal{H}_k$ базу так, щоб матриці обмежень операторів U, V, W на $\mathcal{H}_k$ записувались за допомогою формул (1), (2) для деяких α_k, β_k, $\gamma_k \in S^1$, $\alpha_k \beta_k \gamma_k = 1$.

З рівнянь $au = u^{-1}a$, $av^{-1} = \mu va$, $wa = aw^{-1}$ отримуємо

$$\begin{aligned} A_k U_{\alpha_k} &= U^{-1}_{\alpha_{k+1}} A_k, \\ A_k V^{-1}_{\beta_k} &= \mu V_{\beta_{k+1}} A_k, \\ A_k W^{-1}_{\gamma_k} &= W_{\gamma_{k+1}} A_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Зафіксуємо k і позначимо $A_k = (a_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$ (для зручності ми скрізь рахуємо рядки і стовпчики з нуля). Тоді

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \alpha_k \alpha_{k+1} \mu^{i+j} a_{ij}, \\ a_{ij} &= \beta_k \beta_{k+1} \mu a_{i-1,j+1}, \\ a_{ij} &= \gamma_k \gamma_{k+1} \mu^{-1-i-j} a_{i+1,j-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Зокрема, $(\alpha_k \alpha_{k+1})^n = (\beta_k \beta_{k+1})^n = (\gamma_k \gamma_{k+1})^n = 1$. Таким чином, всі трійки $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ знаходяться з точністю до еквівалентності з першої трійки $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, яку далі будемо позначати просто (α, β, γ). Розглянемо два випадки.

Припустимо, що $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ і π — зображення розмірності n. У цьому випадку

$$(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n) = (1, 1, 1),\ (1, -1, -1)\ (-1, -1, 1),\ (-1, 1, -1). \tag{5}$$

Якщо n є непарним, можна вважати, що

$$(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n) = (\alpha, \beta, \gamma) \qquad \text{і} \qquad \left(\alpha^2, \beta^2, \gamma^2\right) = (1, 1, 1).$$

Використовуючи рівняння (4), знаходимо оператор A :

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \mu \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \mu^{n-1} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо n є парним, можна вибрати

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 1, 1), \quad (1, \lambda, \lambda^{-1}), \quad (\lambda, 1, \lambda^{-1}), \quad (\lambda, \lambda^{-1}, 1).$$

Для кожної з цих трійок аналогічно конструюємо по два нееквівалентних зображення. Всього існує вісім зображень розмірності n.

Припустимо, що $\mathcal{H}_1 \neq \mathcal{H}_2$. Змінимо базу в просторі $\mathcal{H}_2$ так, щоб замінити трійку $(U_{\alpha_2}, V_{\beta_2}, W_{\gamma_2})$ на еквівалентну їй $(U_\alpha^{-1}, V_{\mu\beta}^{-1}, W_\gamma^{-1})$. В цій базі оператор A_1 стає скалярним. Тому, ще трохи зсунувши базу в $\mathcal{H}_2$, можемо вважати далі, що $A_1 = I$. Оскільки $A^2 = I$, звідси отримуємо $A_2 = I$ і

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо $(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n)$ є однією із трійок (5), зображення розшаровується на два n-вимірних, що описані раніше. Трійки (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ задають еквівалентні зображення $\mathcal{A}$, якщо $(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n) = (\alpha'^n, \beta'^n, \gamma'^n)$, або $(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n) = (\alpha'^{-n}, \beta'^{-n}, \gamma'^{-n})$. У противному разі відповідні оператори U мають різні множини власних значень і зображення нееквівалентні.

Для зручності підсумуємо отримані результати в двох теоремах відповідно до парності n.

Теорема 3. *Кожне незвідне зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_4}(\lambda)$, де $\mu = \lambda^2$ — первісний корінь степеня n (n є непарним), з точністю до унітарної еквівалентності збігається з одним із наступних зображень $\pi^{(k)} = \left(A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}, D^{(k)}\right)$, $k = \overline{1,9}$:*

вісім n-вимірних зображень

$$A^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \mu^{n-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(k)} = \pm\gamma \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(k)} = \pm\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{(k)} = \pm\beta \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{2n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda^{2n-3} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,1,1)$ *для* $k = 1,2$, $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,-1,-1)$ *для* $k = 3,4$, $(\alpha,\beta,\gamma) = (-1,-1,1)$ *для* $k = 5,6$ *і* $(\alpha,\beta,\gamma) = (-1,1,-1)$ *для* $k = 7,8$;

двовимірна сім'я $2n$*-вимірних зображень*

$$A^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & W_\gamma \\ W_\gamma^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & U_\alpha^* \\ U_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & V_{\lambda\beta} \\ V_{\lambda\beta}^* & 0 \end{pmatrix},$$

де $\alpha = e(x)$, $\beta = e(\varepsilon y)$, $\gamma = (\alpha\beta)^{-1}$, $0 \le x,\ y \le \dfrac{1}{2n}$, $\varepsilon = \pm 1$ *при* $0 < x,\ y < \dfrac{1}{2n}$ *і* $\varepsilon = 0$ *у протилежному випадку,* $(x,y,\varepsilon) \ne (0,0,0)$, $\left(0, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$. *При* $(x,y,\varepsilon) = (0,0,0)$ *зображення* $\pi^{(9)}$ *є звідним і розпадається в пряму суму зображень* $\pi^{(1)}, \pi^{(2)}$, *при* $(x,y,\varepsilon) = \left(0, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$ *— в пряму суму зображень* $\pi^{(3)}$, $\pi^{(4)}$, *при* $(x,y,\varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$ *— в пряму суму зображень* $\pi^{(5)}$, $\pi^{(6)}$, *при* $(x,y,\varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$ *— в пряму суму зображень* $\pi^{(7)}, \pi^{(8)}$.

Теорема 4. *Кожне незвідне зображення алгебри* $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_4}(\lambda)$, *де* $\mu = \lambda^2$ *— первісний корінь степеня* n (n *є парним*), *з точністю до унітарної еквівалентності збігається з одним із наступних зображень* $\pi^{(k)} = \left(A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}, D^{(k)}\right)$, $k = \overline{1,9}$:

чотири n*-вимірних зображення*

$$A^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu\beta^2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & (\mu\beta^2)^{n-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \cdots & \beta^3 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \beta^{2n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \beta^2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \beta^{2(n-1)} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 0 & (\lambda\beta)^{2n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (\lambda\beta)^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & (\lambda\beta)^{2n-3} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\beta = 1$ *для* $k = 1, 2$ *і* $\beta = \lambda$ *для* $k = 3, 4$;

чотири n*-вимірних зображення*

$$A^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda\beta \\ 0 & \cdots & (\lambda\beta)^3 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ (\lambda\beta)^{2n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \beta^2 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \beta^{2n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \cdots & \beta^3 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \beta^{2n-1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{(k)} = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu\beta^2 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & (\mu\beta^2)^{n-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\beta = 1$ *для* $k = 5, 6$ *і* $\beta = \lambda^{-1}$ *для* $k = 7, 8$;

двовимірна сім'я $2n$*-вимірних зображень*

$$A^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & W_\gamma \\ W_\gamma^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & U_\alpha^* \\ U_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad D^{(9)} = \begin{pmatrix} 0 & V_{\lambda\beta} \\ V_{\lambda\beta}^* & 0 \end{pmatrix},$$

де $\alpha = e(x)$, $\beta = e(\varepsilon y)$, $\gamma = (\alpha\beta)^{-1}$, $0 \le x,\ y \le \dfrac{1}{2n}$, $\varepsilon = \pm 1$ *при* $0 < x,\ y < \dfrac{1}{2n}$ *і* $\varepsilon = 0$ *у протилежному випадку*, $(x, y, \varepsilon) \neq (0, 0, 0)$, $\left(0, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$.

При $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$ *зображення* $\pi^{(9)}$ *є звідним і розпадається в пряму суму зображень* $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$, *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(0, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$ — *в пряму суму зображень* $\pi^{(3)}$, $\pi^{(4)}$, *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$ — *в пряму суму зображень* $\pi^{(5)}, \pi^{(6)}$, *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$ — *в суму* $\pi^{(7)}$, $\pi^{(8)}$.

В обох випадках проекція множини зміни параметрів $2n$-вимірних зображень на площину xy має вигляд, зображений на рис. 1.

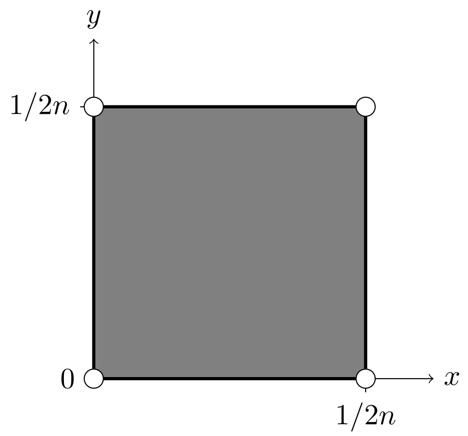

Рис. 1

3. Зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_6}(\lambda)$. Нехай $\Gamma = \widetilde{E}_6 = T_{3,3,3}$. Розглянемо $*$-алгебру $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$:

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}\langle a, b, c | aa^* = bb^* = cc^* = a^3 = b^3 = c^3 = 1, abc = \lambda \cdot 1\rangle.$$

Позначимо $u = a^2b$, $v = aba$, $w = ba^2$. Виконуються наступні співвідношення:

$$\begin{gathered} uvw = a^2b \cdot aba \cdot ba^2 = a(ababab)a^2 = a \cdot \lambda^3 \cdot a^2 = \lambda^3 \cdot 1, \\ [u, v] = uvu^{-1}v^{-1} = a^2b \cdot aba \cdot b^2a \cdot a^2b^2a^2 = a^2b \cdot aba \cdot ba^2 = \lambda^3 \cdot 1, \\ [v, w] = vwv^{-1}w^{-1} = aba \cdot ba^2 \cdot a^2b^2a^2 \cdot ab^2 = aba \cdot ba^2 \cdot a^2b = \lambda^3 \cdot 1, \\ [w, u] = wuw^{-1}u^{-1} = ba^2 \cdot a^2b \cdot ab^2 \cdot b^2a = b^2a \cdot a^2b \cdot aba = \lambda^3 \cdot 1. \end{gathered} \tag{6}$$

З означення елементів u, v, w очевидним чином випливають також рівності

$$v = a^{-1}ua, \qquad w = a^{-1}va, \qquad u = a^{-1}wa. \tag{7}$$

Позначимо $\mu = \lambda^3 \in S^1$. Нехай $\mathcal{B}$ — підалгебра, породжена елементами u, v, w. Очевидно, $\mathcal{A} = \mathcal{B}[a]$, і елемент a, крім співвідношень (7), задовольняє лише умову $a^3 = 1$.

Знайдемо всі незвідні зображення $\mathcal{B}$. Очевидно, що w однозначно знаходиться із u, v за формулою $w = \mu v^{-1}u^{-1}$. Єдиним співвідношенням між u і v є умова на комутатор $[u, v] = \mu \cdot 1$.

Лема 3. *Довільне незвідне зображення (U, V, W) алгебри $\mathcal{B}$ унітарно еквівалентне одному з наступних*:

$$U = U_\alpha, \qquad V = V_\beta, \qquad W = W_\gamma,$$

де $\alpha, \beta, \gamma \in S^1$, $\alpha\beta\gamma = \mu$, — деякі числа. Дві трійки (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ задають унітарно еквівалентні зображення тоді і тільки тоді, *коли* $(\alpha/\alpha')^n = (\beta/\beta')^n = (\gamma/\gamma')^n = 1$.

Припустимо, що μ — первісний корінь з одиниці степеня n. Нехай π — незвідне зображення алгебри $\mathcal{A}$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Як і при доведенні леми 2, показуємо, що простір $\mathcal{H}$ є скінченновимірним. При обмеженні на $\mathcal{B}$ зображення π розпадається в пряму суму незвідних зображень. Нехай π_1 — одне з таких зображень у просторі $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$. Позначимо $\mathcal{H}_{k+1} = A(\mathcal{H}_k)$,

$A_k = A|_{\mathcal{H}_k}$. За індукцією доводимо, що кожний простір $\mathcal{H}_k$ є інваріантним для $\mathcal{B}$. Аналогічно вводимо незвідні зображення π_k в цих просторах.

Оскільки $A^3 = I$, то $\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_1$, і серед просторів $\mathcal{H}_k$ є щонайбільше три різних. Очевидно, що простір $\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ є інваріантним для всієї алгебри $\mathcal{A}$. Таким чином, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$.

Виберемо в кожному просторі $\mathcal{H}_k$ базу так, щоб оператори $U|_{\mathcal{H}_k}, V|_{\mathcal{H}_k}, W|_{\mathcal{H}_k}$ записувались в ній формулами (1), (2) із $\alpha = \alpha_k$, $\beta = \beta_k$, $\gamma = \gamma_k$, де $\alpha_k\beta_k\gamma_k = \mu$.

Зафіксуємо k і позначимо $A_k = (a_{ij})_{i,j=0}^{n-1}$, тоді із співвідношень

$$\begin{aligned} U_{\alpha_{k+1}} A_k &= A_k V_{\beta_k}, \\ V_{\beta_{k+1}} A_k &= A_k W_{\gamma_k}, \\ W_{\gamma_{k+1}} A_k &= A_k U_{\alpha_k} \end{aligned} \tag{8}$$

отримуємо

$$\begin{aligned} a_{i,j+1} &= \alpha_{k+1}\beta_k^{-1}\mu^i a_{ij}, \\ a_{i+1,j} &= \alpha_k \gamma_{k+1}^{-1}\mu^{i+j+1} a_{ij}, \end{aligned} \tag{9}$$

звідки випливає, що всі трійки $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$, з точністю до еквівалентності, отримуються з першої трійки $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, яку ми будемо позначати далі просто (α, β, γ), за правилом

$$(\alpha_{k+1}^n, \beta_{k+1}^n, \gamma_{k+1}^n) = \left(\beta_k^n, (-1)^{n-1}\gamma_k^n, (-1)^{n-1}\alpha_k^n\right). \tag{10}$$

З цієї рівності випливає, що параметри $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ або попарно нееквівалентні, або всі еквівалентні (α, β, γ). Таким чином, або $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_3$ і $\dim \mathcal{H} = n$, або $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \oplus \mathcal{H}_3$ і $\dim \mathcal{H} = 3n$. Розглянемо ці два випадки.

Нехай $\dim \mathcal{H} = n$. Тоді трійка (α, β, γ) задовольняє умови

$$\alpha^n = \beta^n = (-1)^{n-1}\gamma^n, \qquad \alpha\beta\gamma = \mu.$$

Ми можемо вибрати $\beta = \alpha$ і $\gamma = \mu\alpha^{-2}$. Число α задовольняє умову $\alpha^{3n} = (-1)^{n-1}$. Таким чином, з точністю до еквівалентності існують три попарно нееквівалентні допустимі трійки (α, β, γ).

Розв'язуючи рівняння (9), отримуємо

$$A = \frac{\zeta}{\sqrt{n}} \left(\alpha^{3i}\mu^{ij+\binom{i}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1}$$

для деякого $\zeta \neq 0$. Залишилося показати, що можна підібрати ζ так, щоб виконувалась умова $A^3 = I$. Оскільки

$$A^2 = \frac{\zeta^2}{n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}\right]\left(\alpha^{-3j}\mu^{-ij-\binom{j}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1} = \frac{\zeta^3}{\sqrt{n}}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}\right] A^*,$$

знаходимо $\zeta^3 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{-3k}\mu^{-\binom{k}{2}}$.

Припустимо спочатку, що $\alpha^n = (-1)^{n-1}$. Якщо n є парним, покладемо $\alpha = e\left(\dfrac{m}{2n}\right)$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}=\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{mk^2+2mk}{2n}\right)=\alpha^{-1}\sum_{k=1}^{n}e\left(\frac{mk^2}{2n}\right)=\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{mk^2}{2n}\right)=$$

$$=\frac{\alpha^{-1}}{2}G(m,2n)=\alpha^{-1}\left(\frac{2n}{m}\right)\sqrt{n}\times\begin{cases}e\left(\dfrac{1}{8}\right), & m\equiv 1 \pmod 4,\\ e\left(-\dfrac{1}{8}\right), & m\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Якщо n є непарним, а m — парним, знову покладемо $\alpha=e\left(\dfrac{m}{2n}\right)$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}=\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{mk^2+2mk}{2n}\right)=\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{m/2\cdot k^2}{n}\right)=$$

$$=\alpha^{-1}G(m/2,n)=\alpha^{-1}\left(\frac{m/2}{n}\right)\sqrt{n}\times\begin{cases}1, & n\equiv 1 \pmod 4,\\ e\left(\dfrac{1}{4}\right), & n\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Якщо n і m є непарними, покладемо $\alpha=-e\left(\dfrac{m}{2n}\right)=e\left(\dfrac{n+m}{2n}\right)$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}=\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{mk^2+2mk+3nk}{2n}\right)=\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{(m+n)/2\cdot k^2}{n}\right)=$$

$$=\alpha^{-1}G((m+n)/2,n)=\alpha^{-1}\left(\frac{(m+n)/2}{n}\right)\sqrt{n}\times\begin{cases}1, & n\equiv 1 \pmod 4,\\ e\left(\dfrac{1}{4}\right), & n\equiv 3 \pmod 4.\end{cases}$$

Нехай тепер $\alpha^n=(-1)^{n-1}e\left(\dfrac{1}{3}\right)$. Якщо n не ділиться на 3, ми замінимо попереднє значення α на $\alpha e\left(\dfrac{n}{3}\right)$, аналогічно для $\alpha^n=(-1)^{n-1}e\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Якщо n ділиться на три, виникає ще кілька випадків. Якщо n є парним і $m\equiv 5 \pmod 6$, покладемо $\alpha=e\left(\dfrac{m}{6n}\right)$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}=\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{mk^2}{2n}\right)=\frac{1}{2}G(m,2n).$$

Якщо n є парним і $m\equiv 1 \pmod 6$, покладемо $\alpha=e\left(-\dfrac{m}{6n}\right)$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}=\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{mk^2-2mk}{2n}\right)=\frac{\alpha^3}{2}G(m,2n).$$

Якщо n є непарним і $m\equiv 2 \pmod 6$, знову візьмемо $\alpha=e\left(\dfrac{m}{6n}\right)$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^{3k}\mu^{\binom{k}{2}}=\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{mk^2}{2n}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}e\left(\frac{m/2\cdot k^2}{n}\right)=G(m/2,n).$$

Якщо n є непарним і $m \equiv 4 \pmod 6$, покладемо $\alpha = e\left(-\dfrac{m}{6n}\right)$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{3k} \mu^{\binom{k}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} e\left(\frac{mk^2 - 2mk}{2n}\right) = \alpha^3 \sum_{k=0}^{n-1} e\left(\frac{m/2k^2}{n}\right) = \alpha^3 G(m/2, n).$$

Якщо n є непарним і $m \equiv 1 \pmod 6$, покладемо $\alpha = e\left(\dfrac{n+m}{6n}\right)$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{3k} \mu^{\binom{k}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} e\left(\frac{mk^2 + nk}{2n}\right) = G((m+n)/2, n).$$

Якщо n є непарним і $m \equiv 5 \pmod 6$, покладемо $\alpha = e\left(\dfrac{n-m}{6n}\right)$, тоді

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^{3k} \mu^{\binom{k}{2}} = \sum_{k=0}^{n-1} e\left(\frac{mk^2 - 2mk + nk}{2n}\right) = \alpha^3 G((m+n)/2, n).$$

Для випадку $\alpha^n = (-1)^{n-1} e\left(\dfrac{2}{3}\right)$ всі формули знаходимо аналогічно.

Нехай тепер $\mathcal{H}$ має розмірність $3n$. Зафіксуємо довільне δ таке, що $\delta^n = (-1)^{n-1}$. Відповідно до співвідношень (10) можемо вважати, що будь-яка трійка параметрів $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ збігається з однією із наступних: (α, β, γ), $(\beta,\, \delta\gamma,\, \delta^{-1}\alpha)$, $(\delta\gamma,\, \alpha,\, \delta^{-1}\beta)$. Згідно з теоремою 2 змінимо базу в просторах $\mathcal{H}_2$ і $\mathcal{H}_3$ так, щоб замінити трійки $(U_{\alpha_2}, V_{\beta_2}, W_{\gamma_2})$ і $(U_{\alpha_3}, V_{\beta_3}, W_{\gamma_3})$ на еквівалентні їм $(V_\alpha,\, W_\beta,\, U_\gamma)$, $(W_\alpha,\, U_\beta,\, V_\gamma)$. В новій базі оператори A_k стають скалярними. Ми ще трохи повернемо базу в $\mathcal{H}_2$ і $\mathcal{H}_3$, щоб отримати $A_1 = A_2 = I$. Тоді з умови $A^3 = I$ випливає $A_3 = I$. Таким чином,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси знаходимо також формули для B і C.

Якщо трійка (α, β, γ) збігається з однією з нерухомих трійок, то оператори U_α, V_β, W_γ унітарно еквівалентні. Припустимо, що $V_\beta = A'^{-1} U_\alpha A'$, $W_\gamma = A'^{-2} U_\alpha A'^2$ для унітарного оператора A', що є розв'язком рівнянь (8), $A'^3 = I$. Тоді підпростір

$$\big\{(v, A'v, A'^2 v) \mid v \in \mathcal{H}_1\big\} \subset \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$$

є інваріантним відносно всіх операторів, і зображення π розшаровується в суму трьох n-вимірних.

В іншому випадку зображення алгебри $\mathcal{B}$ у підпросторах $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ попарно нееквівалентні, а отже, будь-який інваріантний відносно $\mathcal{B}$ підпростір повинен бути прямою сумою деяких $\mathcal{H}_k$, але серед таких підпросторів лише $\mathcal{H}$ є інваріантним відносно $\mathcal{A}$, тому зображення дійсно є незвідним.

Зауважимо також, що трійки (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ задають еквівалентні $3n$-вимірні зображення алгебри $\mathcal{A}$, якщо $(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n) = (\alpha'^n, \beta'^n, \gamma'^n)$, $(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n) = \big(\beta'^n, (-1)^{n-1}\gamma'^n, (-1)^{n-1}\alpha'^n\big)$

або $(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n) = \big((-1)^{n-1}\gamma'^n, \alpha'^n, (-1)^{n-1}\beta'^n\big)$. У противному разі зображення нееквівалентні, бо відповідні оператори U мають різні набори власних значень.

Теорема 5. *Кожне незвідне зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_6}(\lambda)$, де $\mu = \lambda^3 = e\left(\dfrac{m}{n}\right)$, m і n є взаємно простими, унітарно еквівалентне одному з наступних зображень $\pi^{(k)} = \Big(A^{(k)},\ B^{(k)},$ $C^{(k)}\Big)$, $k = \overline{1,10}$:*

дев'ять зображень розмірності n

$$A^{(k)} = \frac{\zeta}{\sqrt{n}}\left(\alpha^{3i}\mu^{ij+\binom{i}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1},$$

$$B^{(k)} = \frac{\zeta}{\sqrt{n}}\left(\alpha^{3i+1}\mu^{(i+1)j+\binom{i}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1},$$

$$C^{(k)} = \frac{\lambda\zeta}{\sqrt{n}}\left(\alpha^{3i-1}\mu^{i(j-1)+\binom{i}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1};$$

зображення $\pi^{(k)}$, $k = 1,2,3$, отримуються при $\alpha = (-1)^{mn}e\left(\dfrac{m}{2n}\right)$, $\zeta^3 = \alpha\sigma$, зображення $\pi^{(k)}$, $k = 4,5,6$, — при

$$\zeta^3 = \alpha\sigma e\left(-\frac{n}{3}\right), \qquad \alpha = (-1)^{mn}e\left(\frac{m}{2n} + \frac{n}{3}\right), \qquad n \equiv 1,2 \pmod 3,$$

$$\zeta^3 = \alpha^{-3}\sigma, \qquad \alpha = e\left(-\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 0, \quad m \equiv 1 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 0, \quad m \equiv 5 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \alpha^{-3}\sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{n-m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 1 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 2 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \alpha^{-3}\sigma, \qquad \alpha = e\left(-\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 4 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{n+m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 5 \pmod 6;$$

зображення $\pi^{(k)}$, $k = 7,8,9$, отримуються при

$$\zeta^3 = \alpha\sigma e\left(-\frac{2n}{3}\right), \qquad \alpha = (-1)^{mn}e\left(\frac{m}{2n} + \frac{2n}{3}\right), \qquad n \equiv 1,2 \pmod 3,$$

$$\zeta^3 = \sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 0, \quad m \equiv 1 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \alpha^{-3}\sigma, \qquad \alpha = e\left(-\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 0, \quad m \equiv 5 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{n+m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 1 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \alpha^{-3}\sigma, \qquad \alpha = e\left(-\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 2 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 4 \pmod 6,$$

$$\zeta^3 = \alpha^{-3}\sigma, \qquad \alpha = e\left(\frac{n-m}{6n}\right), \qquad n \equiv 3, \quad m \equiv 5 \pmod 6,$$

де

$$\sigma = \begin{cases} e\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2n}{m}\right), & n \quad \textit{парне}, \quad m \equiv 1 \pmod 4, \\ e\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2n}{m}\right), & n \quad \textit{парне}, \quad m \equiv 3 \pmod 4, \\ \left(\frac{m/2}{n}\right), & n \equiv 1 \pmod 4, \quad m \quad \textit{парне}, \\ \left(\frac{(m+n)/2}{n}\right), & n \equiv 1 \pmod 4, \quad m \quad \textit{непарне}, \\ e\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{m/2}{n}\right), & n \equiv 3 \pmod 4, \quad m \quad \textit{парне}, \\ e\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{(m+n)/2}{n}\right), & n \equiv 3 \pmod 4, \quad m \quad \textit{непарне}; \end{cases}$$

двовимірна сім'я зображень розмірності $3n$:

$$A^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & W_\gamma \\ U_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & V_\beta & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(10)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & U^*_{\lambda^{-1}\alpha} \\ V^*_{\lambda^{-1}\beta} & 0 & 0 \\ 0 & W^*_{\lambda^{-1}\gamma} & 0 \end{pmatrix},$$

де $\delta = (-1)^{mn} e\left(\frac{m}{2n}\right)$, $\alpha = \delta e(\varepsilon x)$, $\beta = \delta e(\varepsilon y)$, $\gamma = \mu(\alpha\beta)^{-1}$, $x \le y$, $2x + y \ge \frac{1}{n}$, $\frac{1}{2}x + y \le \frac{1}{n}$, $\varepsilon = \pm 1$ *при* $x < y$, $2x + y > \frac{1}{n}$, $\frac{1}{2}x + y < \frac{1}{n}$ *і* $\varepsilon = 0$ *у протилежному випадку*, $(x, y, \varepsilon) \ne$ $\ne \left(0, \frac{1}{n}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n}, 0\right)$, $\left(\frac{2}{3n}, \frac{2}{3n}, 0\right)$.

При $(x, y, \varepsilon) = \left(0, \frac{1}{n}, 0\right)$ *зображення* $\pi^{(10)}$ *є звідним і розпадається в пряму суму зображень* $\pi^{(1)} - \pi^{(3)}$; *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\frac{1}{3n}, \frac{1}{3n}, 0\right)$ *— в пряму суму зображень* $\pi^{(4)} - \pi^{(6)}$; *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\frac{2}{3n}, \frac{2}{3n}, 0\right)$ *— в пряму суму зображень* $\pi^{(7)} - \pi^{(9)}$. *Проекція множини зміни параметрів на площину* xy *має вигляд, зображений на рис.* 2.

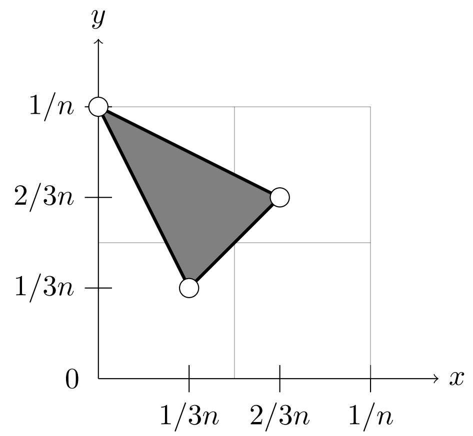

Рис. 2

4. Зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_7}(\lambda)$. Нехай $\Gamma = \widetilde{E}_7 = T_{4,4,2}$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\widetilde{E}_7}(\lambda) = \mathbb{C}\langle a, b, c \mid aa^* = bb^* = cc^* = a^4 = b^4 = c^2 = 1,\ abc = \lambda \cdot 1\rangle.$$

Позначимо $u = a^3b$, $v = a^2ba$, $w = aba^2$, $t = ba^3$, $twvu = 1$. Виконуються наступні співвідношення:

$$[u, v] = uvu^{-1}v^{-1} = a^3b \cdot a^2ba \cdot b^3a \cdot a^3b^3a^2 = a^3ba(abab)ba^2 = \lambda^4,$$

$$[v, w] = vwv^{-1}w^{-1} = a^2ba \cdot aba^2 \cdot a^3b^3a^2 \cdot a^2b^3a^3 = a^2ba(abab)ba^3 = \lambda^4,$$

$$[w, t] = wtw^{-1}t^{-1} = aba^2 \cdot ba^3 \cdot a^2b^3a^3 \cdot ab^3 = aba(abab)b = \lambda^4,$$

$$[t, u] = tut^{-1}u^{-1} = ba^3 \cdot a^3b \cdot ab^3 \cdot b^3a = ba(abab)ba = \lambda^4,$$

$$uw = a^3b \cdot aba^2 = a^2(ab)^2a^2 = \lambda^2,$$

$$vt = a^2ba \cdot ba^3 = a(ab)^2a^3 = \lambda^2.$$

Нехай $\mathcal{B}$ — підалгебра в $\mathcal{A}$, породжена елементами u, v, w, t. Покладемо $\mu = \lambda^4$.

Лема 4. *Кожне незвідне зображення $\pi = (U, V, W, T)$ алгебри $\mathcal{B}$ унітарно еквівалентне одному з наступних зображень*:

$$U = U_{\lambda^2\alpha}, \qquad V = V_{\lambda^2\beta}, \qquad W = U_\alpha^*, \qquad T = V_\beta^*,$$

де $\alpha, \beta \in S^1$. Дві пари (α, β), (α', β') задають унітарно еквівалентні зображення тоді і тільки тоді, коли $(\alpha/\alpha')^n = (\beta/\beta')^n = 1$.

Наступна теорема доводиться аналогічно до опису незвідних зображень алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_6}(\lambda)$.

Теорема 6. *Кожне незвідне зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_7}(\lambda)$, де $\mu = \lambda^4 = e\left(\dfrac{m}{n}\right)$, m і n є взаємно простими, унітарно еквівалентне одному із наступних зображень $\pi^{(k)} = \left(A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}\right)$, $k = \overline{1, 11}$:*

чотири n-вимірних зображення

$$A^{(k)} = \left(\frac{\gamma}{\sqrt{n}}\mu^{ij}\right)_{i,j=0}^{n-1}, \qquad B^{(k)} = \left(\frac{\gamma\lambda}{\sqrt{n}}\mu^{(i+1)j}\right)_{i,j=0}^{n-1},$$

$$C^{(k)} = \gamma^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \mu^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \mu & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\gamma = \pm 1, \pm i$, $k = 1, 2, 3, 4$;

чотири n*-вимірних зображення*

$$A^{(k)} = \left(\frac{\gamma\lambda}{\sqrt{n}} \mu^{i(j+1)} \right)_{i,j=0}^{n-1}, \qquad B^{(k)} = \left(\frac{\gamma\lambda^2\delta^{-1}}{\sqrt{n}} \mu^{(i+1)(j+1)} \right)_{i,j=0}^{n-1},$$

$$C^{(k)} = \lambda^2 \delta^{-1} \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\delta = (-1)^{m-1} e\left(\dfrac{m}{2n}\right)$, $\gamma = \pm 1, \pm i$, $k = 5, 6, 7, 8$;

два $2n$*-вимірних зображення*

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & A' \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & A'V_{-\lambda} \\ U_\lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad C^{(k)} = \begin{pmatrix} A'U_1 & 0 \\ 0 & A'V_{-1} \end{pmatrix},$$

де

$$A' = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$\gamma = 1$ *при* $k = 9$ *і* $\gamma = -1$ *при* $k = 10$;

двовимірна сім'я $4n$*-вимірних зображень*

$$A^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V_\beta^* \\ U_{\lambda^2\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{\lambda^2\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_\alpha^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & U_{\lambda\alpha}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{\lambda\beta}^* \\ U_{\lambda\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_{\lambda\beta} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

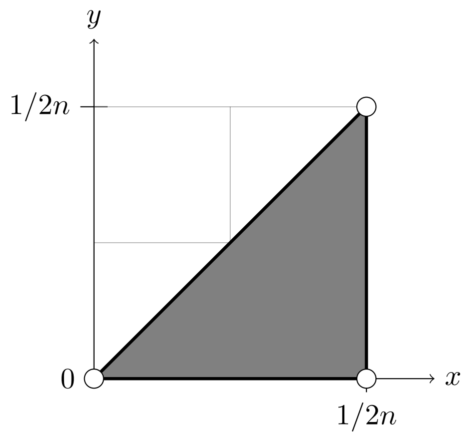

Рис. 3

де $\alpha = \lambda^{-1}e(x)$, $\beta = \lambda^{-1}e(\varepsilon y)$, $0 \leq x \leq \dfrac{1}{2n}$, $0 \leq y \leq x$, $\varepsilon = \pm 1$ *при* $0 < x < \dfrac{1}{2n}$, $0 < y < x$ *і* $\varepsilon = 0$ *у протилежному випадку,* $(x, y, \varepsilon) \neq (0,0,0)$, $\left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$.

При $(x, y, \varepsilon) = (0,0,0)$ *зображення* $\pi^{(11)}$ *є звідним і розпадається в пряму суму зображень* $\pi^{(1)} - \pi^{(4)}$, *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{2n}, 0\right)$ *— в пряму суму зображень* $\pi^{(5)} - \pi^{(8)}$, *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$ *— в пряму суму* $\pi^{(9)}$, $\pi^{(10)}$. *Проекція множини зміни параметрів* x, y, ε *на площину* xy *має вигляд, зображений на рис.* 3.

5. Зображення алгебри $\boldsymbol{\mathcal{A}_{\widetilde{E}_8}(\lambda)}$. Нехай $\Gamma = \widetilde{E}_8 = T_{6,3,2}$,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\widetilde{E}_8}(\lambda) = \mathbb{C}\langle a, b, c \mid aa^* = bb^* = cc^* = a^6 = b^3 = c^2 = 1,\ abc = \lambda \cdot 1\rangle.$$

Позначимо $u = a^2b^2$, $v = ab^2a$, $s = b^2a^2$, $t = ba^2b$. Виконуються співвідношення

$$[u, v] = uvu^{-1}v^{-1} = a^2b^2 \cdot ab^2a \cdot ba^4 \cdot a^5ba^5 = a^2b^2ab(ba)^2a^2ba^5 =$$

$$= \lambda^2a^2b(ba)^2aba^5 = \lambda^4a^2(ba)^2a^4 = \lambda^6,$$

$$vt = ab^2a \cdot ba^2b = ab(ba)^2ab = \lambda^2(ab)^2 = \lambda^4,$$

$$su = b^2a^2 \cdot a^2b^2 = b^{-1}a^{-2}b^{-1} = (b^{-1}a^{-1})^2ab^2a(a^{-1}b^{-1})^2 = \lambda^{-4}v,$$

а також

$$a^{-1}ua = v, \qquad a^{-1}va = s, \qquad a^{-1}sa = \lambda^{-2}u^{-1},$$

$$a^{-1}u^{-1}a = \lambda^{-4}t, \qquad a^{-1}ta = \lambda^4s^{-1}, \qquad a^{-1}s^{-1}a = \lambda^2u.$$

Нехай $\mathcal{B}$ — підалгебра, породжена елементами u, v, s, t.

Лема 5. *Довільне незвідне зображення* (U, V, S, T) *алгебри* $\mathcal{B}$ *унітарно еквівалентне одному із зображень*

$$U = U_\alpha, \qquad V = V_\beta, \qquad S = S_{\lambda^{-4}\alpha^{-1}\beta}, \qquad T = V^*_{\lambda^{-4}\beta} \tag{11}$$

для деяких $\alpha, \beta \in S^1$. *Дві пари* (α, β), (α', β') *задають унітарно еквівалентні зображення тоді і тільки тоді, коли* $(\alpha/\alpha')^n = (\beta/\beta')^n = 1$.

Наступна теорема доводиться аналогічно до опису незвідних зображень алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_6}(\lambda)$.

Теорема 7. *Довільне незвідне зображення алгебри* $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_8}(\lambda)$, *де* $\mu = \lambda^6 = e\left(\dfrac{m}{n}\right)$, m *і* n *є взаємно простими, унітарно еквівалентне одному із наступних зображень* $\pi^{(k)} = \left(A^{(k)}, B^{(k)}, C^{(k)}\right)$, $k = \overline{1, 12}$:

шість n*-вимірних зображень*

$$A^{(k)} = \frac{\zeta}{\sqrt{n}} \left(\delta^i \mu^{ij - \binom{i}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1}, \qquad B^{(k)} = \frac{\gamma\lambda^{-2}\zeta^{-1}}{\sqrt{n}} \left(\delta^{-1-j} \mu^{i(j-1) + \binom{j}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1},$$

$$C^{(k)} = \gamma\lambda^{-3}\delta^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \delta^{0^2-1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \delta^{1^2-0^2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \delta^{2^2-(n-1)^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 0 & \delta^{(n-1)^2-2^2} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

де $\delta = (-1)^{mn} e\left(-\dfrac{m}{2n}\right)$, $\zeta^3 = \gamma\sigma$,

$$\sigma = \begin{cases} e\left(-\dfrac{1}{8}\right)\left(\dfrac{2n}{m}\right), & n \text{ \textit{парне},} \quad m \equiv 1 \pmod 4, \\ e\left(\dfrac{1}{8}\right)\left(\dfrac{2n}{m}\right), & n \text{ \textit{парне},} \quad m \equiv 3 \pmod 4, \\ \left(\dfrac{m/2}{n}\right), & n \equiv 1 \pmod 4, \quad m \text{ \textit{парне},} \\ \left(\dfrac{(m+n)/2}{n}\right), & n \equiv 1 \pmod 4, \quad m \text{ \textit{непарне},} \\ e\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{m/2}{n}\right), & n \equiv 3 \pmod 4, \quad m \text{ \textit{парне},} \\ e\left(-\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{(m+n)/2}{n}\right), & n \equiv 3 \pmod 4, \quad m \text{ \textit{непарне},} \end{cases}$$

$\gamma = \pm 1, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$

три $2n$*-вимірних зображення*

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & A' \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(k)} = \begin{pmatrix} U_\alpha^* A' & 0 \\ 0 & A' U_{\lambda^2\alpha} \end{pmatrix}, \qquad C^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & A'^* U_{\lambda\alpha} \\ U_{\lambda\alpha}^* A' & 0 \end{pmatrix},$$

де $A' = \dfrac{\zeta}{\sqrt{n}} \left(\delta^{-j} \mu^{ij + \binom{j}{2}}\right)_{i,j=0}^{n-1}$, $\alpha = \lambda^2 \delta e\left(\dfrac{1}{3}\right)$, $\zeta^3 = \sigma^{-1}$, δ *і* σ *вказані вище,* $k = 7, 8, 9$;

два $3n$*-вимірних зображення*

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A' \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 & U^*_{\lambda^2\delta}A' & 0 \\ 0 & 0 & V^*_{-\lambda^2\delta}A' \\ S^*_{-\lambda^{-4}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(k)} = \begin{pmatrix} A'S^*_{-\lambda^{-3}} & 0 & 0 \\ 0 & U^*_{\lambda^3\delta}A' & 0 \\ 0 & 0 & V^*_{-\lambda^3\delta}A' \end{pmatrix},$$

де $A' = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $\gamma = \pm 1$, $k = 10, 11$;

двовимірна сім'я $6n$*-вимірних зображень*

$$A^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix},$$

$$B^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & U^*_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V^*_{\beta} \\ S^*_{\lambda^{-4}\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{\lambda^2\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{\lambda^2\beta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{\lambda^{-2}\gamma} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & S_{\lambda^{-3}\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U^*_{\lambda\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V^*_{\lambda\beta} \\ S^*_{\lambda^{-3}\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{\lambda\alpha} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_{\lambda\beta} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

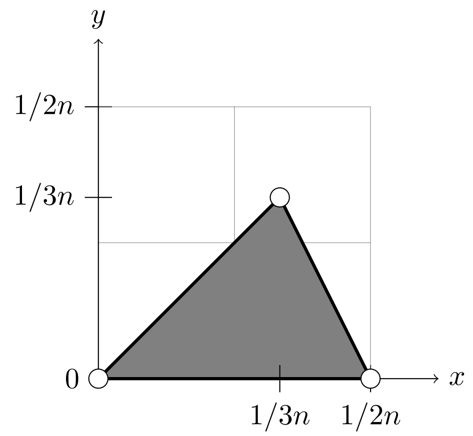

Рис. 4

де $\alpha = \lambda^2 \delta e(x)$, $\beta = \lambda^2 \delta e(\varepsilon y)$, $\gamma = \alpha^{-1}\beta$, $0 \le x \le \dfrac{1}{2n}$, $0 \le y \le x$, $2x + y \le 1$, $\varepsilon = \pm 1$ *при* $0 < x < \dfrac{1}{2n}$, $0 < y < x$, $2x + y < \dfrac{1}{n}$ *і* $\varepsilon = 0$ *у протилежному випадку,* $(x, y, \varepsilon) \ne (0, 0, 0)$, $\left(\dfrac{1}{3n}, \dfrac{1}{3n}, 0\right)$, $\left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$.

При $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$ *зображення* $\pi^{(12)}$ *є звідним і розпадається в пряму суму зображень* $\pi^{(1)}$ – $\pi^{(6)}$, *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\dfrac{1}{3n}, \dfrac{1}{3n}, 0\right)$ — *в пряму суму зображень* $\pi^{(7)}$ – $\pi^{(9)}$, *при* $(x, y, \varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2n}, 0, 0\right)$ — *в пряму суму зображень* $\pi^{(10)}$, $\pi^{(11)}$. *Проекція множини зміни параметрів* x, y, ε *на площину xy має вигляд, зображений на рис.* 4.

6. Нескінченновимірні зображення. Нехай тепер λ не є коренем з одиниці. В цьому випадку алгебра $\mathcal{B}$ є квантовим тором і, як відомо (див., наприклад, [10]), не є типу I, а отже, в цьому випадку опис усіх незвідних зображень алгебр $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$ є складною задачею. Ми вкажемо лише деяку нескінченну сім'ю таких зображень. Нехай $M = \{\mu^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — нескінченна підгрупа в S^1, породжена μ.

Теорема 8. *Кожна наступна пара унітарних операторів* U, V, *що діють в нескінченновимірному гільбертовому просторі з базою* $\{v_i | i \in \mathbb{Z}\}$ *за правилом*

$$Uv_i = \alpha \mu^i v_i, \qquad Vv_i = v_{i+1},$$

задає незвідне зображення співвідношення $[U, V] = \mu I$, *де* $\alpha \in S^1$. *Два зображення, що задаються параметрами* α, $\alpha' \in S^1$, *еквівалентні тоді і тільки тоді, коли* $\alpha/\alpha' \in M$. *Оператори можна зобразити нескінченними в усі боки матрицями.*

Можна довести, що це всі незвідні зображення, у яких U має власні вектори. Аналогічно можна описати всі зображення, у яких V або $(UV)^{-1}$ має власні вектори. Проте можуть існувати інші зображення. Позначимо далі $W = (UV)^{-1}$, $S = VU^{-1}$.

Теорема 9. *Для кожної трійки унітарних операторів* U, V, W, *що діють у гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *і таких, що* $[U, V] = \mu I$, $W = (UV)^{-1}$, $\mu = \lambda^2$, *оператори*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & U^* \\ U & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & \lambda V \\ \lambda^{-1} V^* & 0 \end{pmatrix}$$

задають зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{D}_4}(\lambda)$ *у просторі* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. *Для довільної пари* U, V *із теореми* 8 *відповідне зображення алгебри є незвідним.*

Теорема 10. *Для кожної трійки унітарних операторів* U, V, W, *що діють у гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *і таких, що* $[U, V] = \mu I$, $W = \mu(UV)^{-1}$, $\mu = \lambda^3$, *оператори*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & W \\ U & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & \lambda U^* & 0 \\ 0 & 0 & \lambda V^* \\ \lambda W^* & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задають зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_6}(\lambda)$ *у просторі* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. *Для довільної пари* U, V *із теореми* 8 *відповідне зображення алгебри є незвідним.*

Теорема 11. *Для кожної пари унітарних операторів* U, V, *що діють у гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *і таких, що* $[U, V] = \mu I$, $\mu = \lambda^4$, *оператори*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & V^* \\ \lambda^2 U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda^{-1} U^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} V^* \\ \lambda U & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda V & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задають зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_7}(\lambda)$ *у просторі* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. *Для довільної пари* U, V *із теореми* 8 *відповідне зображення алгебри є незвідним.*

Теорема 12. *Для кожної трійки унітарних операторів* U, V, S, *що діють у гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *і таких, що* $[U, V] = \mu I$, $S = VU^{-1}$, $\mu = \lambda^6$, *оператори*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & U^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V^* \\ \lambda^4 S^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-2} S & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^{-3} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} U^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} V^* \\ \lambda^3 S^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda U & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda V & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

задають зображення алгебри $\mathcal{A}_{\widetilde{E}_8}(\lambda)$ *у просторі* $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. *Для довільної пари* U, V *із теореми* 8 *відповідне зображення алгебри є незвідним.*

Доведення всіх чотирьох теорем подібні і повторюють попередні доведення.

Таким чином, для кожного $\Gamma = \widetilde{D}_4, \widetilde{E}_6, \widetilde{E}_7, \widetilde{E}_8$ маємо нескінченну сім'ю незвідних зображень алгебри $\mathcal{A}_\Gamma(\lambda)$, коли λ не є коренем з одиниці.

Автори вдячні Ю. С. Самойленку за інтерес до їхньої роботи та корисні обговорення.

1. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 1998. – **36**, вып. 3. – С. 20 – 35.
2. *Меллит А. С., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма частичных отражений кратна единичному оператору // Функцион. анализ и его прил. – 2004. – **38**, вып. 2. – С. 91 – 94.
3. *Островський В. Л., Самойленко Ю. С.* Про спектральні теореми для сімей лінійно пов'язаних самоспряжених операторів із заданими спектрами, що асоційовані з розширеними графами Динкіна // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1556 – 1570.
4. *Halmos P. R., Kakutani S.* Products of symmetries // Bull. Amer. Math. Soc. – 1958. – **64**, № 3. – P. 77 – 78.
5. *Hladnik M., Omladic M., Radjavi H.* Products of roots of the identity // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – **129**. – P. 459 – 465.
6. *Albeverio S., Rabanovich S.* Decomposition of a scalar operator into a product of unitary operators with two points in spectrum // Linear Algebra and its Appl. – 2010. – **433**. – P. 1127 – 1137.
7. *Кириллов А. А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978. – 180 с.
8. *Williams D. P.* Crossed products of C^*-algebras. – Providence: Amer. Math. Soc., 2007. – 528 p.
9. *Berndt B. C., Evans R. J., Williams K. S.* Gauss and Jacobi sums. – Wiley and Sons, Inc., 1998. – 598 p.
10. *Elliot G. A., Evans D. E.* The Structure of the irrational rotation C^*-algebra // Ann. Math. – 1993. – **138**, № 3. – P. 477 – 501.

Одержано 20.07.12,
після доопрацювання — 05.10.12