УДК 517.947

Н. Н. Чаус

О поведении решений системы уравнений с частными производными в полупространстве

Рассматривается система уравнений

$$\partial u/\partial x = P\,(i\partial/\partial y)\,u \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами. Для нее ниже приводятся классы тривиальности решения [1] в полупространстве $x \geqslant 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $P\,(s) = P\,(s_1, \tilde{s})$— соответствующая системе (1). полиномиальная $N \times N$ — матрица от n комплексных переменных $s_1, \tilde{s} = (s_2, \ldots, s_n)$. Обозначим $\lambda_j\,(s_1, \tilde{s})$, $j = 1, \ldots, N$, корни характеристического уравнения для $P\,(s_1, \tilde{s})$.

Теорема 1. *Пусть для точки $\tilde{s}^0 = (s_2^0, \ldots, s_n^0)$ существует такая ее окрестность U_0, что для каждой $\tilde{s} \in U_0$ сразу для всех $j = 1, \ldots, N$ при $t > 0$ с некоторой постоянной $\alpha\,(\tilde{s})$ выполняется оценка*

$$\operatorname{Re}\lambda_j\,(\alpha\,(\tilde{s})\,t, \tilde{s}) \geqslant C\,(\tilde{s})\,t^r + D\,(\tilde{s}), \quad C\,(\tilde{s}), \quad r > 0.$$

А. *Пусть δ и q — два числа и $\delta > 0$, $q > 1$, $r > q'$, $1/q + 1/q' = 1$, $\mu\,(x)$ — произвольная непрерывная неубывающая при $x > 0$ функция. Тогда совокупность функций $\Theta\,(x, y_1, \tilde{y})$, выделяемых условием*

$$|\Theta| \leqslant C \exp\left\{\mu\,(x) - |y_1|^q - \sum_{i=2}^{n} (\delta + |s_i^0|)\,|y_i|\right\},$$

образует класс тривиальности решения системы уравнений (1) *в полупространстве $x > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.*

Б. *Пусть ε, $\delta > 0$, $q > 1$, $r < q'$, $1/q + 1/q' = 1$. Тогда совокупность функций $\Theta\,(x, y_1, \tilde{y})$, выделяемых условием*

$$|\Theta| \leqslant C \exp\left\{x^{q'/q'-r+\varepsilon} - |y_1|^q - \sum_{i=2}^{n} (\delta + |s_i^0|)\,|y_i|\right\},$$

образует класс тривиальности решения системы уравнений (1) *в полупространстве $x > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. А. Ограничимся случаем $(y_1, \tilde{y}) = (y_1, y_2)$. Пусть $u\,(x, y_1, y_2)$ — решение системы уравнений и для его компонент $u_j\,(x, y_1, y_2)$ выполнены условия

$$|u_j| \leqslant C \exp\{\mu\,(x) - |y_1|^q - (\delta + |s_2^0|)\,|y_2|\}.$$

Покажем, что $u_j \equiv 0$. Обозначим $\hat{u}_j\,(x, s_1, s_2)$ преобразование Фурье функции $u_j\,(x, y_1, y_2)$, существующее, как видно, не только для действительных s_1 и s_2 при каждом $x > 0$, но и для всех комплексных s_1 и комплексных s_2 из круга $\{s_2 : |s_2| \leqslant |s_2^0| + \delta/2\}$. Из предполагаемых оценок на $|u_j|$ опять следует, что каждая $\hat{u}_j\,(x, s_1, s_2)$—аналитическая функция в названной области изменения переменных s_1, s_2. Для нее с помощью неравенства $|ab| \leqslant |a|^q/q + |b|^{q'}/q'$, $1/q + 1/q' = 1$, получаем оценку

$$|\hat{u}_j| \leqslant (|u_j\,(x, y_1, y_2), \ \exp(|y_1 s_1| + |y_2|\,|s_2|)) \leqslant$$
$$\leqslant C_{1,\delta} \exp\mu\,(x)\,(\exp(-|y_1|^q), \ \exp|y_1 s_1|) \leqslant C'_{1,\delta} \exp(\mu\,(x) + |s_1|^{q'}).$$

Используем эту оценку и тот факт, что вектор-функция $\hat{u} =$

$= (\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_N)$ удовлетворяет системе уравнений $\partial \hat{u}/\partial x = P(s_1, s_2)\hat{u}$, т. е.

$$\hat{u}(x, s_1, s_2) = e^{(x-x_0)P(s_1,s_2)}\hat{u}(x_0, s_1, s_2), \qquad x, x_0 > 0.$$

Все вместе приводит к следующему результату:

$$\|\hat{u}(x_0, s_1, s_2)\| = \|e^{-(x-x_0)P(s_1,s_2)}\hat{u}(x, s_1, s_2)\| \leqslant C_\delta \exp(\mu(x) + |s_1|^{q'}) \times$$
$$\times \|e^{-(x-x_0)P(s_1,s_2)}\| \leqslant C_\delta \exp(\mu(x) + |s_1|^{q'})(1+|s|)^{(N-1)h} \exp\{-(x-x_0)V(s_1, s_2)\}. \tag{2}$$

Последнее неравенство выведено на основании теоремы о поведении экспоненты от полиномиальной матрицы [2, с. 77] и с использованием обозначения $V(s_1, s_2) = \min\limits_k \operatorname{Re}\lambda_k(s_1, s_2)$. Если положить в (2) $x = x_0$, то для целой аналитической вектор-функции $\hat{u}(x_0, s_1, s_2)$ комплексной переменной s_1 получаем оценку при каждом $s_2 \in U_0$:

$$\|\hat{u}(x_0, s_1, s_2)\| \leqslant C_{\delta,x_0} \exp(C_1 |s_1|^{q'}), \quad C_1 > 0.$$

Если же в (2) положить $x = x_0 + t^{q'-r+\rho}$, $t, \rho > 0$, то при $s_2 \in U_0$

$$\|\hat{u}(x_0, \alpha(s_2)t, s_2)\| \leqslant C_\delta (1+|s|)^{(N-1)h} \exp\{\mu(x) + |\alpha(s_2)t|^{q'} -$$
$$- t^{q'-r+\rho}[C(s_2)t^r + D(s_2)]\} \leqslant C_{\delta,x_0,\rho} \exp\{\mu(x_0 + t^{q'-r+\rho}) - C^* t^{q'+\rho}\}. \tag{3}$$

В (3) согласно условию А $q' < r$. Поэтому при достаточно малом $\rho > 0$ при всех $t > 1$ имеем $\mu(x_0 + t^{q'-r+\rho}) \leqslant \mu^*(x_0)$.

Приведенные рассуждения показывают, что каждая $\hat{u}_j(x, s_1, s_2)$ — это целая аналитическая функция по s_1 порядка роста не больше q', которая по некоторому лучу ($s_1 = \alpha(s_2)t$, $t > 0$) убывает:

$$|\hat{u}_j(x_0, \alpha(s_2)t, s_2)| \leqslant C^*_{\delta,x_0,\rho} \exp(-C^* t^{q'+\rho}), \qquad \rho > 0.$$

Применяя в данной ситуации теорему Фрагмена—Линделефа, получаем равенство $\hat{u}_j(x_0, s_1, s_2) = 0$ (для всех s_1 и для $s_2 \in U_0$). Отсюда следует, что $u_j(x_0, y_1, y_2) \equiv 0$.

Б. Все предыдущие рассуждения, включая формулу (3), остаются в силе для частного случая $\mu(x) = x^{q'/(q'-r+\varepsilon)}$. Считая, что $\varepsilon > 0$ фиксировано условием теоремы, а $\rho > 0$ произвольное и может быть достаточно малым, из (3) получаем оценку

$$\|\hat{u}(x_0, \alpha(s_2)t, s_2)\| \leqslant C_{\delta,x_0,\rho} \exp\{(x_0 + t^{q'-r+\rho})^{q'/(q'-r+\varepsilon)} - C^* t^{q'+\rho}\} \leqslant$$
$$\leqslant C^*_{\delta,x_0,\rho} \exp(\mu^*(x_0) + C_0 t^{q} - C^* t^{q'+\rho}), \quad \rho > 0,$$

так что поведение аналитической по s_1 вектор-функции $\hat{u}(x_0, s_1, s_2)$ в этом случае соответствует условию А. Это опять приводит к равенству $u_j(x_0, y_1, y_2) \equiv 0$. Теорема доказана.

Заметим, что условие на $\lambda_j(s_1, \tilde{s})$ в теореме выглядит очень просто, если (1) — одно уравнение. При этом $\lambda_j(s_1, \tilde{s}) = \lambda(s_1, \tilde{s}) = P(s_1, \tilde{s}) = \sum\limits_{k=0}^{p} s_1^k Q_k(\tilde{s})$. Отсюда

$$\operatorname{Re}\lambda(\alpha(\tilde{s})t, \tilde{s}) = [\alpha(\tilde{s})t]^p Q_p(\tilde{s}) + P_1(\tilde{s}, t).$$

Понятно, что можно выбрать для $\tilde{s}$ окрестность U_0, сколь угодно близко лежащую около нуля ($|s_i^0| < \delta$), и такое $\alpha(\tilde{s})$, чтобы выполнялось условие $\alpha(\tilde{s})^p Q_p(\tilde{s}) > 0$, $\tilde{s} \in U_0$. Отсюда для $\tilde{s} \in U_0$

$$\operatorname{Re}\lambda(\alpha(\tilde{s})t, \tilde{s}) \geqslant \alpha_0 t^p + O(t^{p-1}, \tilde{s}) \geqslant \alpha_0 t^p + D(\tilde{s}),$$

$\alpha_0 = \text{const} > 0$ и $|D(\tilde{s})| < \alpha_1 = \text{const}$. Поэтому с каждым из переменных y_j, фигурирующих в уравнении, очень просто связывается свой класс тривиальности решения.

Схема доказательства теоремы 1 может быть так же просто использована для доказательства следующих теорем.

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{Re}\lambda_j(s^0) > a$ *для фиксированной точки* $s^0 = (s_1^0, \ldots, s_n^0)$ *и* $j = 1, \ldots, N$. *Пусть* $\mathscr{L}(x)$ — *непрерывная при* $x > 0$ *функция, для которой существует такая последовательность* $x_k \to \infty$, *что* $\mathscr{L}(x_k) \leqslant a x_k$. *Тогда совокупность функций* $\Theta(x, y)$, *выделяемых условием*

$$|\Theta| \leqslant C \exp\left\{\mathscr{L}(x) - \sum_{i=1}^{n} (\delta + |s_i^0|)|y_i|\right\}, \qquad \delta > 0,$$

образует класс тривиальности решения системы уравнений (1) *в полупространстве* $x > 0$, $y \in R^n$.

Теорема 3. *Предположим, что для всех корней* $\lambda_j(s)$ *матрицы* $P(s)$ *выполнено требование: при* $\sigma \in \mathbb{R}^n$ $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \geqslant 0$, *причем для каждого* j $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) = 0$ *лишь для* σ, *составляющих в* $\mathbb{R}^n$ *множество* $\mathfrak{M}_j$ *меры нуль.*

Пусть $h(y)$ — *непрерывная, монотонная функция из* $L_1(\mathbb{R}^n, dy)$. *Пусть* $\mathscr{L}(x)$ — *непрерывная при* $x > 0$ *функция, для которой существует такая последовательность* $x_k \to \infty$ *и такое* $\varepsilon > 0$, *что* $\mathscr{L}(x_k) \leqslant \exp x_k^{1-\varepsilon}$. *Тогда совокупность функций* $\Theta(x, y)$, *выделяемых условием* $|\Theta| \leqslant Ch(|y|)\mathscr{L}(x)$ (C *не зависит от* x, y), *образует класс тривиальности решения системы уравнений* (1) *в полупространстве* $x > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Отметим, что в теоремах 2 и 3 функции $\mathscr{L}(x)$ не обязаны быть монотонными и подчиняются ограничениям на рост только вдоль некоторой последовательности $x_k \to \infty$.

В доказательстве, например, теоремы 2 главное то, что преобразование Фурье $\hat{u}(x, s)$, $s = (s_1, \ldots, s_n)$, решения системы (1) является аналитической вектор-функцией не только $s \in R^n$, но и комплексных переменных из поликруга $\{s_i : |s_i| \leqslant |s_i^0| + \delta/2,\ i = 1, \ldots, n\}$. Для $\hat{u}(x_0, s)$ пишется аналог неравенства (2), в котором $x = x_k \to \infty$; заключаем, что $\hat{u}(x_0, s^0) = 0$. В силу непрерывности функций $\operatorname{Re}\lambda_j(s)$ последнее равенство получится тем же путем и для s из некоторой окрестности точки s^0, а поэтому из-за аналитичности будет выполняться во всем поликруге, а, следовательно, и при $s \in \mathbb{R}^n$, равенство $\hat{u}(x_0, s) = 0$.

Приведенные теоремы 1—3 дополняют результаты статьи [1], в которой установлены классы тривиальности решения, состоящие из функций, убывающих по $x \to \infty$ и допускающих рост по $|y| \to \infty$. Интерес к подобным исследованиям определился в работах целого ряда авторов достаточно давно. Укажем лишь на результаты, содержащиеся в [3, с. 165—166], и некоторое их усиление в [4].

1. *Чаус Н. Н.* О классах тривиальности решения системы дифференциальных уравнений.— Мат. физика. Вып. 30, 1981, с. 101—105.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1958.— 276 с.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М. : Физматгиз, 1958.— 362 с.
4. *Чаус Н. Н.* Лиувиллевы теоремы для решений уравнений с частными производными.— В кн.: Спектральная теория операторов в задачах математической физики. Киев : Наукова думка, 1983, с. 43—45.

Ин-т матем, АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 25.04.83