УДК 517.946

М. И. Матийчук

Задача Коши для одного класса вырождающихся параболических систем

При изучении температурных полей в симметричных средах, радиальных колебаний мембраны, в задачах о взаимодействии тел и кристаллографии возникают уравнения с оператором Бесселя. В статье определяется класс систем параболического типа с оператором Бесселя, для которого изучается задача Коши. Близкие по конструкции системы исследовались в работах [1, 2].

1. Определение $2\vec{B}$-параболических систем. Функция Грина задачи Коши. Рассмотрим в области $\Pi^+ = (0, T) \times E_n^+$, $E_n^+ = E_{n-1} \times (0, \infty)$ задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1} A_{kj}(t, x) D_{x'}^k B_{x_n}^j u = f(t, x), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0, \tag{2}$$

где $B_{x_n} = \partial^2/\partial x_n^2 + (2\nu+1)/x_n \partial/\partial x_n$ — оператор Бесселя, $\nu_0 = 2\nu + 1 > 0$, $\tilde{k} + 2\tilde{j} = k_1/2b_1 + \ldots + k_{n-1}/2b_{n-1} + 2j/2b_n$, $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_{n-1} \geqslant b_n$ — целые числа.

Определение. *Система уравнений* (1) *называется* $2\vec{B}$*-параболической в области* Π^+, *если характеристическое уравнение*

$$\det\left\| \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}=1} A_{kj}(t, x)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j - \lambda E \right\| = 0 \tag{3}$$

имеет корни, удовлетворяющие неравенству

$$\mathrm{Re}\lambda(t, x; \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \leqslant -\delta(\sigma_1^{2b_1} + \ldots + \sigma_n^{2b_n}), \quad \delta = \mathrm{const} > 0. \tag{4}$$

Для решения задачи (1), (2) нужно построить функцию Грина задачи Коши для системы с коэффициентами, зависящими от параметра

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1} A_{kj}(t, y) D_{x'}^k B_{x_n}^j u. \tag{5}$$

Решение задачи Коши (5), (2) можно найти с помощью преобразования Фурье-Бесселя в виде

$$u(t, x) = \int_{E_n^+} G(t, 0, x, \xi; y)\varphi(\xi)\xi_n^{\nu_0} d\xi, \tag{6}$$

где G — матрица Грина:

$$G(t, \tau, x, \xi; y) = T_{x_n}^{\xi_n} G(t, \tau, x-\xi'; y) =$$

$$= C_\nu \int_0^\pi G\left(t, \tau, x'-\xi', \sqrt{x_n^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\alpha}; y\right) \sin^{2\nu}\alpha d\alpha, \tag{7}$$

$$G(t, \tau, x; y) = C'_\nu \int_{E_n^+} \exp(-i\sigma' x') Q(t, \tau, \sigma; y) j_\nu(\sigma_n x_n) \sigma_n^{\nu_0} d\sigma_n,$$

Q — нормальная фундаментальная матрица решений двойственной к (5) системы

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1} A_{kj}(t, y)(i\sigma')^k(-\sigma_n^2)^j v, \tag{8}$$

для которой на основании (4) существует оценка

$$|Q(t, \tau, \hat{\sigma}+i\hat{\gamma}; y)| \leqslant C\exp\left\{-c\sum_{s=1}^n \sigma_s^{2b_s} + c_1\sum_{s=1}^n \gamma_s^{2b_s}\right\}. \tag{9}$$

Последняя есть целая функция аргумента $\hat{s} = \hat{\sigma} + i\hat{\gamma} = (\sigma_1 + i\gamma_1/(t-\tau)^{1/2b_1}, \ldots, \sigma_n + i\gamma_n/(t-\tau)^{1/2b_n})$, четная по последнему аргументу. Ее аналитическое описание устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Матрица $G(t, \tau, x, \xi; y)$ как функция комплексных аргументов $(x_s-\xi_s)(t-\tau)^{-1/2b_s}$, $x_n(t-\tau)^{-1/2b_n}$, $\xi_n(t-\tau)^{-1/2b_n}$ есть целая функция порядка роста $q_s = 2b_s/2b_s - 1$, четная по последним аргументам, и при действительных аргументах справедлива оценка*

$$|D_{x'}^{k'} D_{x_n}^{k_n} B_{x_n}^j G(t, \tau, x, \xi; y)| \leqslant C_{kj}(t-\tau)^{-\tilde{n}_\nu-\tilde{k}-2\tilde{j}} T_{x_n}^{\xi_n}\left\{\exp\left(-c\sum_{s=1}^n |\hat{x}_s - \hat{\xi}'_s|^{q_s}\right)\right\}, \tag{10}$$

где положительные постоянные c, C_{kj} зависят от чисел b, n, ν, δ, T, $\sup|A_{kj}|$ и модуля непрерывности $A_{kj}(t, y)$ по t с $\tilde{k}+2\tilde{j}=1$, $\xi'_s=\xi_s$, $s < n$, $\xi'_n = 0$, $\tilde{n}_\nu = 1/2b_1 + \ldots + 1/2b_{n-1} + 2(\nu+1)/2b_n$.

Доказательство. Оно основано на леммах о преобразовании Бесселя [3] и Фурье [4, стр. 36] целых функций. Обозначим

$$\Psi(t, \tau, \sigma', x_n; y) = \int_0^\infty Q(t, \tau, \sigma; y) j_\nu(\sigma_n x_n) \sigma_n^{\nu_0} d\sigma_n. \tag{11}$$

Переходя в последнем интеграле от σ_n к $\hat{\sigma}_n$, получим

$$\Psi(t, \tau, \hat{\sigma}', x_n; y) = \int_0^\infty Q(t, \tau, \hat{\sigma}; y) j_\nu(\sigma_n \hat{x}_n) \sigma_n^{\nu_0} d\sigma_n \times$$

$$\times (t-\tau)^{-2(\nu+1)/2b_n} \equiv \Psi_1(t, \tau, \hat{\sigma}', \hat{x}_n; y)(t-\tau)^{-2(\nu+1)/2b_n}. \tag{12}$$

Функция $\Psi_1(t, \tau, \hat{\sigma}', \hat{x}_n; y)$ бесконечно дифференцируема по x_n, при этом, очевидно, имеет место равенство

$$D_{x_n}^{k_n} B_{x_n}^j T_{x_n}^{\xi_n} \Psi(t, \tau, \hat{\sigma}', x_n; y) = D_{\hat{x}_n}^{k_n} B_{\hat{x}_n}^j T_{\hat{x}_n}^{\hat{\xi}_n} \Psi_1(t, \tau, \hat{\sigma}', \hat{x}_n; y) \times$$

$$\times (t-\tau)^{-2(\nu+1)+k_n+2j)/2b_n}. \tag{13}$$

Отсюда на основании оценки (9) и леммы 2 из [3]

$$|D^{k_n}_{\hat{x}_n} B^{j}_{\hat{x}_n} T^{\hat{\xi}_n}_{\hat{x}_n} \Psi_1| \leqslant C_{k_n j} \exp\left(-c\sum_{s=1}^{n-1}\sigma_s^{2b_s} + c_1\sum_{s=1}^{n-1}\gamma_s^{2b_s}\right) T^{\xi_n}_{x_n}\{\exp(-c_2\hat{x}_n^{q_n})\}. \quad (14)$$

Функцию $G(t, \tau, x; y)$ можно представить в виде

$$G(t, \tau, x; y) = C'_\nu \int_{E_{n-1}} \exp(-i\sigma', x')\,\Psi(t, \tau, \sigma x_n; y)\,d\sigma'.$$

Перейдем от σ' к переменным $\hat{\sigma}'$:

$$G(t, \tau, x; y) = C'_\nu \int_{E_{n-1}} \exp(-i\sigma' x')\,\Psi_1(t, \tau, \hat{\sigma}', \hat{x}_n; y)\,d\sigma'\,(t-\tau)^{-n_\nu}.$$

Этот интеграл — преобразование Фурье по σ' функции $\Psi_1(t, \tau, \hat{\sigma}', x_n; y)$, целой в силу свойств матрицы $Q(t, \tau, s; y)$, удовлетворяющей неравенству (14). В силу леммы 1.1 из [4] ее преобразование Фурье $G(t, \tau, x; y)$, как функция аргументов $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{n-1})$, есть целая функция. Справедлива оценка

$$|G(t, \tau, x + i\bar{x}'; y)| \leqslant C(t-\tau)^{-\tilde{n}_\nu} \exp\left\{-c\sum_{s=1}^{n-1}\hat{x}_s^{q_s} + c_1\sum_{s=1}^{n-1}\hat{\bar{x}}_s^{q_s}\right\}. \quad (15)$$

Чтобы получить оценку производных функции $G(t, \tau, x, \xi; y)$, воспользуемся равенством (13):

$$D^{k'}_{x'} D^{k_n}_{x_n} B^{j}_{x_n} G(t, \tau, x, \xi; y) = C_\nu \int_{E_{n-1}} \exp(-i\sigma'(\hat{x}' - \hat{\xi}'))\, D^{k_n}_{\hat{x}_n} B^{j}_{\hat{x}_n} T^{\xi_n}_{x_n} \Psi_1 \times$$

$$\times (t, \tau, \hat{\sigma}', \hat{x}_n; y)(i\sigma')^{k'} d\sigma'\,(t-\tau)^{-\tilde{k}'-\tilde{n}_\nu-2\tilde{j}-\tilde{k}_n}.$$

Используя (14) и упомянутую лемму, находим

$$|D^{k'}_{x'} B^{j}_{x_n} D^{k_n}_{x_n} G(t, \tau, x + i\bar{x}', \xi_n; y)| \leqslant C_{kj}(t-\tau)^{-\tilde{n}_\nu - \tilde{k} - 2\tilde{j}} \times$$

$$\times T^{\xi_n}_{x_n}\left\{\exp\left(-c\sum_{s=1}^{n}\hat{x}_s^{q_s} + c_1\sum_{s=1}^{n-1}\bar{x}_s^{q_s}\right)\right\}. \quad (16)$$

Пусть x_n, ξ_n комплексные. На основании леммы 2 из [3] функция $\Psi(t, \tau, \hat{\sigma}', \hat{x}_n, \hat{\xi}_n; y) = \int_0^\infty Q(t, \tau, \hat{\sigma}; y)\, j_\nu(\sigma_n x_n)\, j_\nu(\sigma_n \hat{\xi}_n)\, \sigma_n^{\nu_0} d\sigma_n$ — целая по $\hat{x}_n$, $\hat{\xi}_n$ и выполняется неравенство

$$|\Psi(t, \tau, \hat{\sigma}', \hat{x}_n, \hat{\xi}_n; y)| \leqslant C\exp\left\{-c\sum_{s=1}^{n-1}\sigma_s^{2b_s} + c_1|\operatorname{Im}\hat{x}_n|^{q_n} + c_1|\operatorname{Im}\hat{\xi}_n|^{q_n}\right\}.$$

Тогда для интеграла Фурье функции Ψ по σ' находим оценку

$$|G(t, \tau, x', x_n, \xi_n; y)| \leqslant C(t-\tau)^{-\tilde{n}_\nu} \exp\left(-c\sum_{s=1}^{n-1} x_s^{q_s} + c'|\operatorname{Im}\hat{x}_n|^{q_n} + \right.$$

$$\left. + c'|\operatorname{Im}\hat{\xi}_n|^{q_n}\right). \quad (17)$$

Неравенства (16), (17) характеризуют поведение матрицы Грина при действительных и комплексных значениях аргументов. Теорема доказана. Заметим, что матрица Грина $G(t, \tau, x, \xi, y)$ обладает свойствами нормальности.

2. Решение задачи Коши. Определим банахово пространство функций, в котором решается задача (1), (2). Пусть $\omega_i(t)$, $F(t)$ — функции типа модуля непрерывности; $C^{(\overrightarrow{2b},F)}_{\omega_1,\omega_2}(\Pi^+)$ — множество функций $u(t,x)$, имеющих производные, которые входят в уравнение (1), и норма $|u|^F_{\overrightarrow{2b},\vec{\omega}} = |u|_{\overrightarrow{2b},\omega_1} + [u]_{\overrightarrow{2b},\omega_2}$ конечна,

$$u|_{\overrightarrow{2b},\omega_1} = \sum_{0<\tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1} \sup\{|D^k_{x'}B^j_{x_n}u(t,x)|\,\omega_1(\sqrt[2b_1]{t})\,t^{-\tilde{k}-2\tilde{j}}\,\psi(t,x)\} +$$

$$+\sup_{\Pi+}\{|u(t,x)|\,\psi(t,x)\},\ \ [u]^F_{\overrightarrow{2b},\omega_2} = \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}=1}\sup_{\Pi+}\left\{\frac{|\Delta_x D^k_{x'}B^j_{x_n}u(t,x)|}{F(\|\Delta x\|)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{t\psi(t,x,x+\Delta x)}{\omega_2(\sqrt[2b_1]{t})}\right\},\quad \|x\| = \sqrt{\sum_{s=1}^{n} x_s^{2b_s/b_1}},$$

$$\psi(t,x) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} k_i(t)\,x_i^{q_i}\right\},\ \psi(t,x,x+\Delta x) =$$

$$= \max\{\psi(t,x),\ \psi(t,x+\Delta x)\}.$$

Теорема 2. 1. *Предположим:* а) *коэффициенты* $A_{kj}(t,x)$ *определены в* Π^+ *и непрерывны по* t, *причем непрерывность* A_{kj} *с* $\tilde{k}+2\tilde{j}=1$ *равномерна по* x; б) *коэффициенты* A_{kj} *по* x *принадлежат классу* $C^{0,\omega}_x(\Pi^+)$ *и сходится интеграл* $F_\omega(a) = \int\limits_0^a \omega(\tau)\,\tau^{-1}d\tau$.

Тогда для любых $\varphi\in C^{(0,\omega)}_{a,N}(E^+_n)$, $f\in C^{(0,\omega)}_{\omega,\omega}(\Pi^+)$ *единственное решение задачи Коши (1), (2), определяется интегралом Стилтьеса с мерой Бореля*

$$u(t,x) = \int\limits_{E^+_n} P(t,x;0,d\xi)\,\xi_n^{\nu_0}\varphi(\xi) + \int\limits_0^t\int\limits_{E^+_n} P(t,x;d\tau,d\xi)\,\xi_n^{\nu_0}f(\tau,\xi). \tag{18}$$

Оно принадлежит классу $C^{(\overrightarrow{2b},F)}_{\omega,1}(\Pi^+)\equiv\hat{C}$ и

$$\|u\|_{\hat{C}} \leqslant C(|\varphi|^{\omega}_{0} + |f|^{0}_{\omega,\omega}). \tag{19}$$

2. *Если, кроме условий* а), б), *модуль непрерывности коэффициентов* A_{kj}, $\tilde{k}+2\tilde{j}>1-1/2b_n$, *удовлетворяет условию* $\int\limits_0^a F_\omega(t)\,t^{-1}dt<\infty$, *то существует матрица* $\mathscr{Z}(t,\tau,x,\xi)$ *такая, что*

$$u(t,x) = \int\limits_{E^+_n}\mathscr{Z}(t,0,x,\xi)\,\varphi(\xi)\,\xi_n^{\nu_0}d\xi + \int\limits_0^t d\tau\int\limits_{E^+_n}\mathscr{Z}(t,\tau,x,\xi)\,f(\tau,\xi)\,\xi_n^{\nu_0}d\xi \tag{20}$$

для $\varphi\in C_{a,N}(E^+_n)$, $f\in C^{(0,\omega)}(\Pi^+)$ *и решение принадлежит классу* $C^{(\overrightarrow{2b},F)}(\Pi^+)$. *Для* $\mathscr{Z}$ *справедливы оценки*

$$|D^k_{x'}B^j_{x_n}\mathscr{Z}(t,\tau,x,\xi)| \leqslant C_{kj}(t-\tau)^{-\tilde{n}_\nu-\tilde{k}-2\tilde{j}}\,T^{\xi_n}_{x_n}\{e^{-c\rho(t,\tau,x,\xi')}\},\ \ \tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1, \tag{21}$$

$$|\Delta_x D^k_{x'}B^j_{x_n}\mathscr{Z}(t,\tau,x,\xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-\tilde{n}_\nu-1}\,[F(\|\Delta x\|)+\|\Delta x\|(t-\tau)^{-1/2b_1}]\times$$

$$\times T^{\xi_n}_{x_n}\{e^{-c\rho(t,\tau,x,x+\Delta x,\xi')}\},\quad \rho(t,\tau,x,\xi) = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{x_s-\xi_s}{(t-\tau)^{1/2b_s}}\right)^{q_s},\ \ \tilde{k}+2\tilde{j}=1. \tag{22}$$

Доказательство. Его можно провести с помощью теоремы 1 по развитой в [5] методике. Для доказательства второй части теоремы достаточно построить фундаментальную матрицу системы $\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1} A_{kj} \times$ $\times (t, x) D_{x'}^k B_{x_n}^j u - Au$, $A = \text{const} > 0$. Ее отыскиваем в виде $\tilde{\mathcal{Z}}(t, \tau, x, \xi) =$ $= \tilde{G}(t, \tau, x, \xi; \xi) + W(t, \tau, x, \xi)$, где $\tilde{G}$ — матрица Грина системы $\frac{\partial u}{\partial t} =$ $= \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}>1-1/2b_n} A_{kj}(t, \xi) D_{x'}^k B_{x_n}^j u - Au$. Тогда $W(t, \tau, x, \xi)$ будет решением системы

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{1-1/2b_n<\tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1} A_{kj}(t, y) D_{x'}^k B_{x_n}^j W + F(t, \tau, x, \xi) +$$

$$+ \sum_{\tilde{k}+2\tilde{j}\leqslant 1} [A_{kj}(t, x) - A_{kj}(t, y)\, \delta_{kj}^*] D_{x'}^k B_{x_n}^j W,$$

$$F(t, \tau, x, \xi) = \sum_{\tilde{m}+2\tilde{p}\leqslant 1} [A_{mp}(t, x) - A_{mp}(\tau, \xi)\, \delta_{mp}^*] D_{x'}^m B_{x_n}^p \tilde{G}(t, \tau, x, \xi; \xi), \quad (23)$$

$\delta_{mp}^* = 1$ при $\tilde{m} + 2\tilde{p} > 1 - 1/2b_n$ и $\delta_{mp}^* = 0$ при $\tilde{m} + 2\tilde{p} < 1 - 1/2b_n$, y — произвольно фиксировано в E_n^+.

Воспользовавшись формулой Грина—Остроградского, из (23) получим, что W удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$W(t, \tau, x, \xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{E_n^+} \tilde{G}(t, \beta, x, \zeta; y) F(\beta, \tau, \zeta, \xi)\, \zeta_n^{\nu_0} d\zeta +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int_{E_n^+} \tilde{G}(t, \beta, x, \zeta; y) \sum_{\tilde{m}+2\tilde{p}\leqslant 1} [A_{mp}(\beta, \zeta) - \delta_{mp}^* A_{mp}(\beta, y)] \times$$

$$\times D_{\zeta'}^m B_{\zeta_n}^p W(\beta, \tau, \zeta, \xi)\, \zeta_n^{\zeta_0} d\zeta. \quad (24)$$

Применяя к обеим частям последнего соотношения оператор $D_{x'}^k B_{x_n}^j$ и перебрасывая производные с $\tilde{G}$ на W с подстановкой $y = x$, приходим к системе интегральных уравнений относительно $D_{x'}^k B_{x_n}^j W$:

$$D_{x'}^k B_{x_n}^j W(t, \tau, x, \xi) = F_{kj}(t, \tau, x, \xi) + \sum_{\tilde{m}+2\tilde{p}\leqslant 1} \int_\tau^t d\beta \int_{E_n^+} K_{kj}^{(m,p)}(t, \beta, x, \zeta) \times$$

$$\times D_{\zeta'}^m B_{\zeta_n}^p W(\beta, \tau, \zeta, \xi)\, \zeta_n^{\nu_0} d\zeta, \quad (25)$$

где F_{kj} обозначены производные потенциала в (24) с плотностью $F(t, \tau, x, \xi)$,

$$K_{kj}^{(mp)}(t, \tau, x, \xi) \equiv D_{x'}^k B_{x_n}^j \tilde{G}(t, \tau, x, \xi; x) [A_{mp}(\tau, \xi) - A_{mp}(\tau, x)] +$$

$$+ \Pi_{kj}^{(m,p)}(t, \tau, x, \xi),$$

$$\Pi_{kj}^{(m,p)}(t, \tau, x, \xi) = \begin{cases} \overline{D}_{x'}^k \overline{B}_{x_n}^{j-1} \tilde{G} A_{mp-1}(\tau, x) - \overline{D}_{x'}^{k+1} \overline{B}_{x_n}^{j-1} \tilde{G} A_{m+1p-1}(\tau, x), & p \geqslant 1, \\ -\overline{D}_{x'}^{k+1} \overline{B}_{x_n}^{j-1} \tilde{G} A_{m+1p-1}(\tau, x), & m \neq 0,\ j \geqslant 1, \\ -\overline{D}_{x'}^{k-1} \overline{B}_{x_n}^{j} \tilde{G}(t, \tau, x, \xi; x) A_{m-1p}(\tau, x), & A_{0-1} \equiv 0,\ k \neq 0. \end{cases}$$

Из условий теоремы и оценок (16) следует

$$|K_{kj}^{(mp)}(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C_0\omega[d(t, \tau, x, \xi)]\, d^{-2b_1(\tilde{n}_\nu+\tilde{k}+2\tilde{j})}(t, \tau, x, \xi)\exp(-A(t-\tau)) \times$$

$$\times T_{x_n}^{\xi_n}\{\exp(-c\hat{\rho}(t, \tau, x, \xi'))\} \equiv C_0 T_{x_n}^{\xi_n}\Psi_{2b_1(\tilde{n}_\nu+\tilde{k}+2\tilde{j})}^{(c,A)}(t, \tau, x, \xi'),$$

$$d(t, \tau, x, \xi) = \sqrt{\|x-\xi\|^2 + |t-\tau|^{1/b_1}},\ \hat{\rho}(t, \tau, x, \xi) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\tilde{d}(t, \tau, x, \xi)}{(t-\tau)^{1/2b_1}}\right)^{\tilde{q}_s},\ \tilde{q}_s = \frac{2b_1}{2b_s-1}. \tag{26}$$

Для ядра $K = (K_{kj}^{mp})$ определяются ряд Неймана

$$R(t, \tau, x, \xi) = K(t, \tau, x, \xi) + \sum_{p=1}^{\infty}\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_n^+} K(t, \beta, x, y) K_p(\beta, \tau, y, \xi)\, y_n^{\nu_0} dy, \tag{27}$$

повторные ядра которого оцениваются с помощью (26) и неравенства

$$\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_n^+} T_{x_n}^{y_n}\Psi_{2b_1(\tilde{n}_\nu+\tilde{k}+2\tilde{j})}^{(c,A)}(t, \beta, x, y')\, T_{y_n}^{\xi_n}\Psi_{2b_1(\tilde{n}_\nu+1)}(\beta, \tau, y, \xi')\, y_n^{\nu_0} dy \leqslant$$

$$\leqslant \Phi(A, \varepsilon)\, T_{x_n}^{\xi_n}\Psi_{2b_1(\tilde{n}_\nu+\tilde{k}+2\tilde{j})}^{(c_1A/2)}(t, \tau, x, \xi'),\ 0 < c_1 < c, \tag{28}$$

при этом

$$|K_p(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C_0^p \Phi^{p-1}(A, \varepsilon)\, T_{x_n}^{\xi_n}\Psi_{2b_1(\tilde{n}_\nu+1)}^{(c_1A/2)}(t, \tau, x, \xi'),$$

$$\Phi(A, \varepsilon) = c_1\int_0^{\varepsilon}\omega(\tau)\tau^{-1}d\tau + c_2\omega(\varepsilon)\,\varepsilon^{-2b_1(\tilde{n}_\nu+1)} A^{-1/2b_1}. \tag{29}$$

Если параметры ε, A выбраны так, что $\Phi(A, \varepsilon) < c_0^{-1}$, ряд Неймана при $t > \tau$ сходится равномерно и абсолютно и для его суммы $R(t, \tau, x, \xi)$ выполняется неравенство вида (26), но с другими постоянными. Решение системы определяется формулой

$$D_{x'}^{k} B_{x_n}^{j} W(t, \tau, x, \xi) = F_{kj} + \sum_{\tilde{m}+2\tilde{p}\leqslant 1}\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{E_n^+} R_{kj}^{(mp)}(t, \beta, x, y) F_{mp} \times$$

$$\times (\beta, \tau, x, y, \xi)\, y_n^{\nu_0} dy,\ \tilde{k} + 2\tilde{j} \leqslant 1. \tag{30}$$

Из формул (30), (25) с помощью рассуждений работы [5] устанавливаются оценки (21), (22) и формулой (20) определяется решение задачи (1), (2). При этом условие $\int_{+0} F_\omega(t)\, t^{-1} dt < \infty$ обеспечивает существование интегралов в (30) за счет суммируемости F_{mp}.

При выполнении п. 1 теоремы производные решения задачи Коши удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$D_{x'}^{k} B_{x_n}^{j} u(t, x) = \Phi_{kj}(t, x) + \sum_{\tilde{m}+2\tilde{p}\leqslant 1}\int_{0}^{t} d\tau \int_{E_n^+} K_{kj}^{(m,p)}(t, \tau, x, \xi)\, D_{\xi'}^{m}, B_{\xi_n}^{n} u \times$$

$$\times (\tau, \xi)\, \xi_n^{\nu_0} d\xi,\ k + 2\tilde{j} \leqslant 1, \tag{31}$$

где $K_{kj}^{(m,p)}(t, \tau, x, \xi) = \overline{D}_{x'}^{k}\overline{B}_{x_n}^{j}\tilde{G}(t, \tau, x, \xi; x)[A_{mp}(\tau, \xi) - A_{mp}(\tau, x)]$, $\tilde{G}(t, \tau, x, \xi; y) = G(t, \tau, x, \xi; y)\exp\{-A(t-\tau)\}$, $G(t, \tau, x, \xi; y)$ — матрица Грина системы (5), $\Phi_{kj}(t, x)$ — результат применения оператора $D_{x'}^k B_{xn}^l$ к потенциалам

$$\Phi(t, x) = \int_{E_n^+} \tilde{G}(t, 0, x, \xi; y)\, \varphi(\xi)\, \xi_n^{\nu_0} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{E_n^+} \tilde{G}(t, \tau, x, \xi; y)\, \tilde{f}(\tau, \xi)\, \xi_n^{\nu_0} d\xi.$$

Решение системы (31) определяется по формуле (30) и устанавливается его оценка (19), а с помощью рассуждений работы [3, стр. 898] получаем представление решения интегралами Стилтьеса с мерами Бореля в виде (18).

1. *Киприянов И. А.* Об одном классе сингулярных эллиптических операторов.— Сиб. мат. мат. журн., 1973, 14, № 3, с. 560—568.
2. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем.— Докл. АН СССР, 1960, 133, № 1, с. 40—43.
3. *Матийчук М. И.* Фундаментальные решения параболических систем с разрывными коэффициентами и их применения к краевым задачам. II, IV.— Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 7, с. 1293—1303; 1978, 14, № 5, с. 885—899.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы.— М. : Наука, 1964.— 443 с.
5. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини.— Тр. семинара по функцион. анализу. Воронеж, 1967, вып. 9, с. 54—83.

Черновиц. гос. ун-т

Поступила в редакцию 23.03.83