УДК 517.98,517.51

В. К. Маслюченко

Условия включения некоторых пространств (категорный подход)

В [1] методом скользящего горба было установлено следующее свойство пространств L_p, $0 < p \leqslant \infty$: какова бы ни была убывающая последовательность положительных измеримых функций r_m, $m = 1, 2, \ldots$, из условия $\bigcap_{m=1}^{\infty} r_m L_p \subseteq L_s$ или $L_p \subseteq \bigcap_{m=1}^{\infty} r_m^{-1} L_s$ вытекает, что $r_m L_p \subseteq L_s$ для некоторого m. Хорошо известно, что многие результаты, первоначально полученные этим методом, допускают доказательство, основанное на понятии категории. В настоящей работе показано, что приведенный выше результат не исключение. Как оказалось впоследствии, сходный способ рассуждений в случае пространств последовательностей применялся уже в [2] для решения задач, возникших в теории методов суммирования.

1. Рассмотрим множество T со счетно аддитивной локально конечной положительной мерой μ, определенной на некоторой σ-алгебре измеримых множеств с единицей T, причем μ может принимать и бесконечные значения. Буквой Ω обозначим алгебру всех μ-измеримых функций $x : T \to \mathbb{K}$, где $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Как обычно, мы отождествляем функции, совпадающие почти всюду.

Пусть (X, τ) — F-пространство измеримых функций, т. е. полное метризуемое линейное топологическое пространство X с топологией τ, которое является векторным подпространство алгебры Ω. Его топологию τ всегда можно задать некоторой псевдонормой (см., например, [3, с. 42]), которую мы обозначим $|\cdot|_X$. Если X удовлетворяет к тому же условию (Z): каждая последовательность (x_n) элементов X, сходящаяся в X к x, сходится к x по мере на каждом множестве конечной меры, то X назовем целлеровым пространством. Локально выпуклые целлеровы пространства — частный случай FH-пространств, введенных в [4] (хотя в качестве примера они в этой работе не фигурируют), они обобщают понятие FK-пространства из [2] на случай пространств измеримых функций. Примерами целлеровых пространств служат пространство L_p всех μ-суммируемых с p-ой степенью функций на T, наделенное нормой $|x|_p = \left(\int_T |x(t)|^p d\mu\, x(t)\right)^{1/p}$, $1 \leqslant p < \infty$, и псевдонормой $|x|_p = \int_T |x(t)|^p d\mu(t)$, $0 < p < 1$, а также пространство L_∞

всех существенно ограниченных на T функций, наделенное нормой $|x|_\infty = \operatorname{vraisup}_{t\in T} |x(t)|$.

Нетрудно убедиться в том, что некоторые основные свойства FH-пространств [4, теоремы 1 и 2] справедливы и без условия их локальной выпуклости. В данной статье они сформулированы и доказаны в несколько расширенном по сравнению с [4] виде для рассматриваемого здесь случая целлеровых пространств.

Теорема 1. *Пусть X и Y — целлеровы пространства. Если $uX \subseteq Y$ для некоторой измеримой функции u, то оператор умножения $m_u(x) = ux : X \to Y$ непрерывен. В частности, при $X \subseteq Y$ вложение $X \to Y$ непрерывно.*

Доказательство. Легко проверить, что график оператора m_u замкнут. Действительно, если $x_n \to x$ в X и $ux_n \to y$ в Y, то для каждого множества A конечной меры $x_{n_k} \to x$ и $ux_{n_k} \to y$ почти всюду на A для некоторой подпоследовательности (x_{n_k}) последовательности (x_n). Но в таком случае $ux_{n_k} \to ux$ почти всюду на A, а поэтому $y = ux$ почти всюду на каждом множестве конечной меры. Тогда из локальной конечности меры μ следует, что $y = ux$ почти всюду на T. Теперь остается применить теорему о замкнутом графике [5, с. 35].

Пусть $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ — семейство целлеровых пространств. Наделим пространство $X = \bigcap_{i\in I} X_i$ проективной топологией τ относительно семейства вложений $X \to X_i$, $i \in I$ [3, с. 68]. Очевидно, τ — линейная хаусдорфова топология.

Теорема 2. *Пространство (X, τ) — полно.*

Доказательство. Пусть (x_α) — семейство Коши в (X, τ). Тогда $|x_\alpha - x_\beta|_{X_i} \to 0$ по α и β для каждого $i \in I$, Из полноты X_i следует, что существуют такие $y_i \in X_i$, что $|x_\alpha - y_i|_{X_i} \to 0$ по α. Поскольку топологии пространств X_i и X_j мажорируют топологию локальной сходимости по мере, то $y_i = y_j$. Полагая $x = y_i$, получим $x \in X$ и $x_\alpha \to x$ в (X, τ).

Теорема 3. *Пусть (X_m, τ_m), $m = 1, 2, \ldots$,—конечная или бесконечная последовательность целлеровых пространств. Тогда пространство $X = \bigcap_m X_m$, наделенное проективной топологией τ относительно вложений $X \to X_m$, $m = 1, 2, \ldots$, также целлерово пространство.*

Доказательство. Действительно, топология τ задается псевдонормой $|x|_X = \sum_m 2^{-m} |x|_{X_m} (1 + |x|_{X_m})^{-1}$, полнота следует из предыдущей теоремы, а условие (Z) — из того, что топология τ мажорирует, например, след топологии τ_1 на X.

Следующая теорема доказана в [2] в том случае, когда X_m — FK-пространства, а Y—BK-пространство.

Теорема 4. *Пусть $(X_m)_{m=1}^\infty$ — убывающая последовательность целлеровых пространств, такая, что пространство $X = \bigcap_{m=1}^\infty X_m$ плотно в каждом X_m и Y — некоторое локально ограниченное* [3, с. 44] *целлерово пространство. Тогда $X \subseteq Y$ в том и только в том случае, когда $X_m \subseteq Y$ при некотором m.*

Доказательство. Пусть $X \subseteq Y$. Наделим X топологией проективного предела относительно вложений $X \to X_m$. Из теорем 1 и 3 вытекает, что вложение $X \to Y$ непрерывно. Пусть V — ограниченная окрестность нуля в Y. Существует такой набор окрестностей нуля $U_1, \ldots, U_m$ соответственно в $X_1, \ldots, X_m$, что $X \cap U_1 \cap \ldots \cap U_m \subseteq V$. Из непрерывности вложений $X_m \to X_k$, $k = 1, \ldots, m$, следует, что существуют такие окрестности нуля U'_k в X_m, $k = 1, \ldots, m$, что $U'_k \subseteq U_k$. Полагая $U = \bigcap_{k=1}^m U'_k$, получим такую окрестность нуля в X_m, что $U \cap X \subseteq V$. Ограниченность V равносильна тому, что система ее кратных εV, $\varepsilon > 0$, образует фундаментальную систему окрестностей нуля в Y. Поскольку для каждого $\varepsilon > 0$ $\varepsilon U \cap X \subseteq \varepsilon V$, то вложение $(X, \tau_m) \to Y$ непрерывно. Продолжим его по непрерывности на все пространство X_m. Легко видеть, что продолженное отображение также будет вложением. Таким образом, $X_m \subseteq Y$.

Доказательство следующего утверждения полностью аналогично доказательству соответствующего утверждения для FK-пространств [2].

Теорема 5. *Пусть X — некоторое целлерово пространство, а $(Y_m)_{m=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность целлеровых пространств. Тогда $X \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m$ в том и только в том случае, когда $X \subseteq Y_m$ для некоторого m.*

2. Применим доказанные теоремы к пространствам L_p с весами.

Теорема 6. *Пусть $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых положительных функций, $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел и Y — локально ограниченное целлерово пространство (например, $Y = L_s$). Тогда включение $\bigcap_{k=1}^{\infty} r_k L_{p_k} \subseteq Y$ выполняется в том и только в том случае, когда $\bigcap_{k=1}^{m} r_k L_{p_k} \subseteq Y$ при некотором m.*

Доказательство. Положим $X = \bigcap_{k=1}^{\infty} r_k L_{p_k}$ и $X_m = \bigcap_{k=1}^{m} r_k L_{p_k}$ и наделим пространство X_m топологией τ_m, которая определяется псевдонормой $x \to |x|_{X_m} = \max\{|xr_1^{-1}|_{p_1}, \ldots, |xr_m^{-1}|_{p_m}\}$. Легко видеть, что (X_m, τ_m) — целлерово пространство. В силу теоремы 4 достаточно показать, что X — плотное подпространство (X_m, τ_m).

Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем множество $A \subseteq T$ конечной меры такое, чтобы $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant m} \int\limits_{T \setminus A} |xr_k^{-1}|^{p_k} d\mu \leqslant \varepsilon$. Из абсолютной непрерывности интегралов $\int\limits_E |xr_k^{-1}|^{p_k} d\mu$, $k = 1, \ldots, m$, следует, что при некотором $\delta > 0$ $\int\limits_E |xr_k^{-1}|^{p_k} d\mu \leqslant \varepsilon$ для $k = 1, \ldots, m$ как только $\mu(E) \leqslant \delta$. Рассмотрим множества $A_{kn} = \{t \in A : |x(t)/r_k(t)|^{p_k} \leqslant n\}$ при $k = 1, \ldots, m$ и $n = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $A_{kn} \uparrow A$ при $n \to \infty$, поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_{kn}) = \mu(A)$. Возьмем номера n_k, $k = 1, \ldots, m$, такие, чтобы $\mu(A \setminus A_{kn_k}) \leqslant \delta m^{-1}$, и положим $B = \bigcup_{k=1}^{m} A_{kn_k}$. Тогда $\mu(A \setminus B) \leqslant \sum_{k=1}^{m} \mu(A \setminus A_{kn_k}) \leqslant \delta$, поэтому $\int\limits_{A \setminus B} |xr_k^{-1}|^{p_k} d\mu \leqslant \varepsilon$ для $k = 1, \ldots, m$. Определим множества $A_{kn} = \{t \in B : |x(t)/r_k(t)| \leqslant n\}$ для $k = m + 1, m + 2, \ldots$ и $n = 1, 2, \ldots$. Аналогично предыдущему мы можем выбрать такие номера n_k, $k = m + 1, m + 2, \ldots$, что $\mu(B \setminus A_{kn_k}) \leqslant \varepsilon/2^k M$, где $M = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Понятно, что для множества $C = \bigcup_{k=m+1}^{\infty} A_{kn_k}$ имеем $\mu(B \setminus C) \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu(B \setminus A_{kn_k}) \leqslant \varepsilon/M$.

Рассмотрим функцию $y = x\varphi_C$, где φ_C — характеристическая функция множества C. Она принадлежит X, ибо y/r_k для каждого k — это ограниченная измеримая функция, носитель которой имеет конечную меру. При

$1 \leqslant k \leqslant m$ имеем

$$\int\limits_T |(x-y)r_k^{-1}|^{p_k}d\mu = \int\limits_{T\setminus C} |xr_k^{-1}|^{p_k}d\mu = \int\limits_{B\setminus C} |xr_k^{-1}|^{p_k}d\mu +$$

$$+ \int\limits_{A\setminus B} |xr_k^{-1}|^{p_k}d\mu + \int\limits_{T\setminus A} |xr_k^{-1}|^{p_k}d\mu \leqslant 3\varepsilon,$$

откуда следует, что $|x-y|_{X_m} \leqslant 3\varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие. *Если (r_m) — убывающая последовательность положительных измеримых функций, $0 < p < \infty$ и Y — локально ограниченное целлерово пространство, то включение $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} r_m L_p \subseteq Y$ выполняется в том и только в том случае, когда $r_m L_p \subseteq Y$ для некоторого m.*

В том случае, когда некоторые $p_k = \infty$, условие плотности X в X_m, как показывают простые примеры, может нарушиться, однако, с помощью теоремы 4 все же можно доказать следующий результат.

Теорема 7. *Если (r_m) — убывающая последовательность положительных измеримых функций, $0 < s \leqslant \infty$, то включение $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} r_m L_\infty \subseteq L_s$ выполняется тогда и только тогда, когда $r_m L_\infty \subseteq L_s$ для некоторого m.*

Для доказательства введем некоторые вспомогательные пространства, обобщающие пространство c_0 сходящихся к нулю последовательностей.

Пусть $\mathcal{A}$ — направленная относительно включения система измеримых подмножеств T. Будем говорить, что измеримая функция x сходится к нулю по системе $\mathcal{A}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $A \in \mathcal{A}$, что $|x(t)| \leqslant \varepsilon$ почти везде на $T \setminus A$.

Лемма 1. *Совокупность $C_0(\mathcal{A})$ всех почти всюду ограниченных сходящихся к нулю по системе $\mathcal{A}$ функций есть замкнутое подпространство L_∞.*

Доказательство. Инвариантность $C_0(\mathcal{A})$ относительно умножения на скаляры очевидна, инвариантность относительно сложения следует из направленности системы $\mathcal{A}$.

Пусть $x_n \in C_0(\mathcal{A})$, $x \in L_\infty$ и $x_n \to x$ в L_∞. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Возьмем такой номер n_0, что $|x_{n_0}(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon/2$ почти всюду на T и такое $A \in \mathcal{A}$, что $|x_{n_0}(t)| \leqslant \varepsilon/2$ почти всюду на $T \setminus A$. Тогда $|x(t)| \leqslant |x_{n_0}(t)| + |x(t) - x_{n_0}(t)| \leqslant \varepsilon$ почти всюду на $T \setminus A$, т. е. $x \in C_0(\mathcal{A})$.

Следствие. *$C_0(\mathcal{A})$ — целлерово пространство относительно нормы $|\cdot|_\infty$.*

Назовем направленную систему $\mathcal{A}$ плотной, если для каждого измеримого множества E конечной меры и для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $A \in \mathcal{A}$, $A \subseteq E$, что $\mu(E \setminus A) \leqslant \varepsilon$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — плотная система, $0 < s \leqslant \infty$. Тогда для измеримой функции a следующие утверждения равносильны:* 1) $aL_\infty \subseteq L_s$; 2) $aC_0(\mathcal{A}) \subseteq L_s$; 3) $a \in L_s$.

Доказательство. Импликации 1) $\Rightarrow$ 2) и 3) $\Rightarrow$ 1) очевидны. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). В силу теоремы 1 оператор умножения m_a из $C_0(\mathcal{A})$ в L_s непрерывен, а значит, ограничен на единичном шаре пространства $C_0(\mathcal{A})$, в частности существует $\gamma > 0$ такое, что $\int\limits_T |a\varphi_A|^s d\mu \leqslant \gamma$ при $s < \infty$ и $\operatorname{vraisup}\limits_T |a\varphi_A| \leqslant \gamma$ при $s = \infty$ для каждого $A \in \mathcal{A}$. В случае $s < \infty$ пусть E — произвольное множество конечной меры. Из плотности $\mathcal{A}$ вытекает, что существует возрастающая последовательность подмножеств $A_n \subseteq E$, $A_n \in \mathcal{A}$ такая, что $\mu(A_n) \to \mu(E)$. Тогда последовательность функций $|a\varphi_{A_n}|^s$, возрастая, стремится почти всюду к функции $|a\varphi_E|^s$. В силу теоремы Леви $\int\limits_E |a|^s d\mu = \int\limits_T |a\varphi_E|^s d\mu \leqslant \gamma$, откуда следует, что $a \in L_s$. В случае $s=\infty$ допустим, что $\operatorname{vraisup}_T |a| > \gamma$. Тогда существует множество E с $0 < \mu(E) < \infty$ такое, что $|a(t)| > \gamma$ почти всюду на E. Поскольку $\mathcal{A}$ плотное семейство, то существует $A \in \mathcal{A}$, для которого $A \subseteq E$ и $\mu(A) > 0$. В таком случае $\operatorname{vraisup}_T |a\varphi_A| > \gamma$, что противоречит выбору γ.

Пусть $\mathbf{r} = (r_m)_{m=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность измеримых положительных функций на T. Рассмотрим совокупность $\mathcal{A}(\mathbf{r})$ тех множеств конечной меры, на которых каждая из функций r_m ограничена сверху и отделена от нуля.

Лемма 3. *$\mathcal{A}(\mathbf{r})$ — плотная система измеримых множеств.*

Доказательство. Пусть E — произвольное множество конечной меры и $\varepsilon > 0$. Положим $A_{mk} = \{t \in E : k^{-1} \leqslant r_m(t) \leqslant k\}$. Поскольку $A_{mk} \uparrow E$, то существует такая последовательность номеров k_m, что $\mu(E \setminus A_{mk_m}) \leqslant \varepsilon 2^{-m}$. Тогда для множества $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{mk_m}$ будем иметь $A \subseteq E$, $A \in \mathcal{A}(\mathbf{r})$ и $\mu(E \setminus A) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-m} = \varepsilon$.

Доказательство теоремы 7. Рассмотрим для последовательности $\mathbf{r} = (r_m)$ пространство $C_0(\mathcal{A}(\mathbf{r}))$. Пространство $X = \bigcap_{m=1}^{\infty} r_m C_0(\mathcal{A}(\mathbf{r}))$ плотно в каждом $X_m = r_m C_0(\mathcal{A}(\mathbf{r}))$. Действительно, если $x \in X_m$ и $\varepsilon > 0$, то, поскольку $x r_m^{-1} \in C_0(\mathcal{A}(\mathbf{r}))$, существует такое $A \in \mathcal{A}(\mathbf{r})$, что $|x(t) r_m^{-1}(t)| \leqslant \varepsilon$ почти везде на $T \setminus A$. Полагая $y = x\varphi_A$, получим, что $y \in X$ и $|y - x|_{X_m} \leqslant \varepsilon$.

Если $\bigcap_{m=1}^{\infty} r_m L_\infty \subseteq L_s$, то тем более $X \subseteq L_s$, поэтому на основании теоремы 4 $r_m C_0(\mathcal{A}(\mathbf{r})) \subseteq L_s$ для некоторого m, но тогда в силу лемм и 3 $r_m L_\infty \subseteq L_s$ для этого же m. Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть $(r_m)_{m=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность положительных измеримых функций, $0 < p_m \leqslant \infty$, $m = 1, 2, \ldots$, и X — некоторое целлерово пространство. Тогда включение $X \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} r_m L_{p_m}$ выполняется в том и только том случае, если $X \subseteq r_m L_{p_m}$ для некоторого m.*

Эта теорема — непосредственное следствие теоремы 5.

Из теорем 6, 7, 8 легко получаются теоремы 1, 2, 4 работы [1]. Однако следует отметить, что диагональное доказательство теоремы 7 все же проще категорного.

3. Покажем, что для более чем счетного количества весов теорема 6, вообще говоря, не выполняется.

Рассмотрим случай считающей меры μ на множестве $T = \mathbb{N}$. Обозначим l_q^+ конус всех положительных последовательностей $r = (\rho_k)_{k=1}^{\infty}$ из пространства l_q, $0 < q < \infty$. Пусть числа $p, q, s \in (0, \infty)$ удовлетворяют условию $p^{-1} + q^{-1} = s^{-1}$. Как известно, $x l_q^+ \subseteq l_s$ тогда и только тогда, когда $x \in l_p$. Поэтому $l_p = \bigcap_{r \in l_q^+} r^{-1} l_s$. Нетрудно увидеть, что $\bigcap_{k=1}^{m} r_k^{-1} l_s = r^{-1} l_s$, где $r = \sup\{r_1, \ldots, r_m\}$. К тому же понятно что из условия $r_1, \ldots, r_m \in l_q^+$ следует, что $r = \sup\{r_1, \ldots, r_m\} \in l_q^+$. Включение $r^{-1} l_s \subseteq l_p$ невозможно ни при каком $r \in l_q^+$, так как $s < p$, а последовательность r^{-1} неограничена. Таким образом, несмотря на то, что $\bigcap_{r \in l_q^+} r^{-1} l_s \subseteq l_p$, ни одно конечное пересечение $\bigcap_{k=1}^{m} r_k^{-1} l_s$ не содержит в l_p.

1. *Маслюченко В. К.* Об условиях включения пересечений и объединений пространств $L_p(\mu)$ с весом.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 4, с. 518—522.
2. *Zeller K.* Allgemeine Eigenschaften von Limitirungsverfahren.— Mat. Z., 1951, 53, № 5, S. 463—487.
3. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 360 с.
4. *Wilansky A.*, *Zeller K.* *FH*-spaces and intersections of *FK*-spaces.— Michigan Math. J., 1959, 6, N 4, p. 346—357.
5. *Банах С. С.* Курс функціонального аналізу.— К. : Радянська школа, 1948.— 216 с.

Черновиц. гос. ун-т

Поступила в редакцию 13.12.82