УДК 517.917

М. Р. Куленович, М. К. Грамматикопулос

Колеблемость и асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных неравенств и уравнений с отклоняющимися аргументами

Рассмотрим нелинейные дифференциальные неравенства вида

$$y(t)\,[(R(t)\,y'(t))' + H(t,\,y\langle\sigma(t)\rangle)] \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{1}$$

$$y(t)\,[(r(t)\,y'(t))' + h(t,\,y\langle\zeta(t)\rangle)] \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

где

$$z\langle\xi(t)\rangle = (z[\xi_1(t)],\ z[\xi_2(t)],\ \ldots,\ z[\xi_m(t)]), \qquad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m),$$

а функции $R, r: [t_0, \infty) \to (0, \infty)$, $\sigma_i, \zeta_i : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $H, h: [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ предполагаются непрерывными. Более того, для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ $\lim\limits_{t\to\infty} \sigma_i(t) = \infty$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \zeta_i(t) = \infty$.

Рассмотрим также нелинейное дифференциальное неравенство (частный случай (2)) вида

$$y(t)\,[(r(t)\,y'(t))' + p(t)\,f(y[\tau(t)])] \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{3}$$

и соответствующее ему дифференциальное уравнение

$$(r(t)\,x'(t))' + p(t)\,f(x[\tau(t)]) = 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

где функции $r: [t_0, \infty) \to (0, \infty)$, $p: [t_0, \infty) \to [0, \infty)$, $\tau: [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ и $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ предполагаются непрерывными и, более того, функция τ неубывающая на интервале $[t_0, \infty)$ и такая, что $\tau(t) \leqslant t$ для каждого $t \geqslant t_0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$, а функция f неубывающая на $\mathbb{R}$ и обладает следующим свойством знака: $uf(u) > 0$ для каждого $u \in \mathbb{R} - \{0\}$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими понятиями и определениями.

Ограничение функции ψ на подмножестве Δ области ее определения обозначим через $\psi \mid \Delta$.

Упорядоченность в $\mathbb{R}^n$ будем понимать в обычном ее смысле, т. е. для любых y и z из $\mathbb{R}^n$ $y \leqslant z \Leftrightarrow (\forall k = 1, \ , \ldots, n)\ y_k \leqslant z_k$.

Непрерывная действительная функция u, определенная на интервале вида $[a, \infty]$, обладает некоторым свойством *финально*, если существует $b \geqslant a$ такое, что u обладает этим свойством на интервале $[b, \infty)$. Функция u называется *неколеблющейся*, если она финально постоянного знака. В других случаях u называется *колеблющейся*.

Под решением (2) будем понимать функцию $u \in C^2([t_u, \infty), \mathbb{R})$, удовлетворяющую (2) для всех $t \geqslant t_u$ и для любого $T_0 \in [t_u, \infty)$, $\sup\{|u(t)| : t \in [T_0, \infty)\} > 0$. Ясно, что решения (2), определенные таким образом, являются нетривиальными и определенными в окрестности $+\infty$.

Дифференциальное неравенство (2) называется *колеблющимся*, если каждое его решение является колеблющимся.

Считаем, что дифференциальное неравенство (2) обладает *свойством* $\bar{0}$, если каждое его решение является колеблющимся или монотонно стремящимся к нулю при $t \to \infty$

Ниже мы воспользуемся также теоремой о неподвижной точке (см. [8] и [2]), суть которой в том, что если X — насыщенное упорядоченное множество, обладающее наибольшим и наименьшим элементом, а S — возрастающее отображение множества X в себя, то существует по меньшей мере один элемент $x \in X$ такой, что $Sx = x$.

Сформулируем две теоремы сравнения, первая из которых, представляющая собой обобщение известной теоремы Штурма (см. [9]), может быть получена из соответствующих результатов работы [6]. Заметим, что другое доказательство этой теоремы может быть дано на основе приведенной теоремы о неподвижной точке.

Теорема 1. *Пусть дифференциальные неравенства* (1) *и* (2) *удовлетворяют следующим условиям*:

$$\int^{\infty} \frac{dt}{R(t)} = \infty, \tag{5}$$

$$R(t) \leqslant r(t) \text{ для каждого } t \geqslant t_0, \tag{6}$$

$$\sigma(t) \geqslant \zeta(t) \Leftrightarrow (\forall\, i = 1, 2, \ldots, m)\ \sigma_i(t) \geqslant \zeta_i(t) \text{ для каждого } t \geqslant t_0, \tag{7}$$

$$(H - h)|[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^m_+ \geqslant 0 \text{ и } (H - h)|[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^m_- \leqslant 0, \tag{8}$$

где функция h *предполагается возрастающей и, более того*: $h|\,[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^m_+ \geqslant 0$ *и* $h\,|\,[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^m_- \leqslant 0$.

Тогда из колеблемости дифференциального неравенства (1) *следует колеблемость дифференциального неравенства* (2).

Теорема 2. *При условиях, наложенных на функции* τ, r, p, f, *где для каждого* $t \geqslant t_0 : p(t) > 0$ и $\tau(t) < t$, *дифференциальное неравенство* (3) *является неколеблющимся (колеблющимся, обладающим свойством* $\tilde{0}$), *если и только если дифференциальное уравнение* (4) *является неколеблющимся (колеблющимся, обладающим свойством* $\tilde{0}$).

Доказательство. Так как из неколеблемости (4) следует неколеблемость (3), докажем, что неколеблемость (3) влечет за собой неколеблемость (4). (Доказательство случая колеблемости или присутствия свойства $\tilde{0}$ с небольшими изменениями проводится аналогично). Пусть (3) — неколеблющееся, и пусть y — финально положительное решение неравенства (3). При наших предположениях из (3) следует

$$(r(t)\, y'(t))' \leqslant 0 \tag{9}$$

при всех больших t.

Заметим, что если $\int^{\infty} \frac{dt}{r(t)} = \infty$, то согласно (9) $y'(t) > 0$ при всех больших t, а если $\int^{\infty} \frac{dt}{r(t)} < \infty$, то при всех больших t $y'(t) > 0$ или $y'(t) < 0$. Согласно этому рассмотрим следующие два случая.

1. $y'(t) > 0$ при всех больших t. В этом случае функция $r(t)\, y'(t)$ — положительная и невозрастающая и, следовательно, существует $c \geqq 0$ такое, что $\lim\limits_{t \to \infty} r(t)\, y'(t) = c$.

Интегрируя (3) от $t \geqslant T \geqslant t_0$ до ∞, получим, что для каждого $t \geqslant T$

$$\int_t^{\infty} p(s)\, f(y[\tau(s)])\, ds \leqslant \int_t^{\infty} p(s)\, f(y[\tau(s)])\, ds + c \leqslant r(t)\, y'(t)$$

откуда следует, что $y'(t) \geqslant \frac{1}{r(t)} \int_t^{\infty} p(s)\, f(y[\tau(s)])\, ds$ для каждого $t \geqslant T$.

Интегрируя последнее соотношение от T до t, будем иметь $y(t) \geqslant y(T) + \int_T^t \frac{1}{r(u)} \int_u^{\infty} p(s)\, f(y[\tau(s)])\, ds\,du$ для каждого $t \geqslant T$.

Пусть X—множество всех функций x, неубывающих на интервале $[T, \infty)$ и таких, что $y(T) \leqslant x(t) \leqslant y(t)$ для каждого $t \geqslant T$. Множество X поточечно упорядочено: $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow (\forall t \geqslant T)\ x_1(t) \leqslant x_2(t)$. Легко заключить, что для любого $A \subseteq X$ $\sup A \in X$, т. е. X — насыщенное множество.

Определим отображение S множества X в себя по формуле

$$(Sx)(t) = \begin{cases} y(T) + \int\limits_T^t \frac{1}{r(u)} \int\limits_u^\infty p(s) f(x[\tau(s)])\, ds du, & \text{если } t \geqslant T_1, \\ y(T), & \text{если } T \leqslant t < T_1, \end{cases}$$

где $T_1 \geqslant T$ подобрано так, что $\tau(t) \geqslant T$ для каждого $t \geqslant T_1$.

Так как для любого $x \in X$ $(Sx)(t) \geqslant y(T)$ для каждого $t \geqslant T_1$ и, в силу определения множества X, $(Sx)(t) \leqslant y(t)$ для каждого $t \geqslant T_1$, заключим, что $SX \subseteq X$. Кроме того, из наших предположений следует, что отображение S — неубывающее относительно упорядоченности множества X, т. е. для любых x_1, x_2 из X и для каждого $t \geqslant T_1$ $x_1(t) \leqslant x_2(t) \Rightarrow (Sx_1)(t) \leqslant (Sx_2)(t)$.

Применив теорему о неподвижной точке, легко заключить, что существует $x \in X$ такое, что $Sx = x$, т. е. для каждого $t \geqslant T_1$

$$x(t) = y(T) + \int\limits_T^t \frac{1}{r(u)} \int\limits_u^\infty p(s) f(x[\tau(s)])\, ds du,$$

где функция x, очевидно, непрерывна на интервале $[T_1, \infty)$. Дифференцируя дважды это равенство, заключим, что x — решение (E_D) на интервале $[T_1, \infty)$ со свойством: для каждого $t \geqslant T_1$ $y(T) \leqslant x(t) \leqslant y(t)$ и $0 \leqslant x'(t) \leqslant y'(t)$.

Заметим, что в рассмотренном случае из выполнения условия $\int\limits^\infty \frac{dt}{r(t)} = \infty$ следует, что $y'(t) > 0$ при всех больших t и $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \in \mathbb{R} - \{0\}$. Следовательно, в этом случае от функций τ и p достаточно потребовать выполнения более слабых условий: $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$ и $p(t) \geqslant 0$ для каждого $t \geqslant t_0$.

2. $y'(t) < 0$ при всех больших t. В этом случае существует $L \geqslant 0$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = L. \tag{10}$$

Интегрируя (3) от T до t, $t \geqslant T \geqslant t_0$, и принимая во внимание условия, наложенные на функции r, p, τ и f, получим, что для каждого $t \geqslant T$

$$y'(t) \leqslant r(T) y'(T) \frac{1}{r(t)} - \frac{1}{r(t)} \int\limits_T^t p(s) f(y[\tau(s)])\, ds \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{1}{r(t)} \int\limits_T^t p(s) f(y[\tau(s)])\, ds.$$

Интегрируя последнее неравенство от t до ∞ и учитывая (2), найдем

$$y(t) \geqslant L + \int\limits_t^\infty \frac{1}{r(u)} \int\limits_T^u p(s) f(y[\tau(s)])\, ds du \text{ для каждого } t \geqslant T.$$

Пусть X — множество всех функций x, невозрастающих на интервале $[T, \infty)$ и таких, что $L \leqslant x(t) \leqslant y(t)$ для каждого $t \geqslant T$. Множество X поточечно упорядочено: $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow (\forall t \geqslant T)\ x_1(t) \leqslant x_2(t)$. Легко проверить, что для любого $A \subseteq X$ $\sup A \in X$, т. е. X — насыщенное множество.

Определим отображение множества X в себя по формуле

$$(Sx)(t) = \begin{cases} L + \int\limits_t^\infty \frac{1}{r(u)} \int\limits_T^u p(s) f(x[\tau(s)])\, ds du, \text{ если } t \geqslant T_1, \\ y(t), \text{ если } T \leqslant t < T_1, \end{cases}$$

где $T_1 \geqslant T$ подобрано так, что $\tau(t) \geqslant T$ для каждого $t \geqslant T_1$.

Нетрудно убедиться, что отображение S удовлетворяет всем требованиям теоремы о неподвижной точке. Следовательно, существует $x \in X$ такое, что $Sx = x$, т. е. для каждого $t \geqslant T_1$

$$x(t) = L + \int\limits_t^\infty \frac{1}{r(u)} \int\limits_T^u p(s) f(x[\tau(s)])\, ds du,$$

функция x непрерывна на интервале $[T_1, \infty)$. Дифференцируя дважды это равенство, заключим, что x — решение уравнения (4) на интервале $[T_1, \infty)$ со свойством: для каждого $t \geqslant T_1$ $L \leqslant x(t) \leqslant y(t)$ и $y'(t) \leqslant x'(t) \leqslant 0$.

Легко доказать, что x — положительное решение (4). Действительно, так как функция x положительна на $[T, T_1)$ и $T \leqslant \tau(T_1) < T_1$, то $x[\tau(T_1)] = y[\tau(T_1)] > 0$ и $p(T_1) f(x[\tau(T_1)]) > 0$. Используя этот факт, из (4) получим, что $[r(T_1) x'(T_1)]' \neq 0$. Более того, функция x является положительной и убывающей на $[T_1, \infty)$. Если $x(T_1) = 0$, то $x \equiv 0$ на всем интервале $[T_1, \infty)$, но тогда и $[r(T_1) x'(T_1)]' = 0$, что является противоречием. Таким образом, доказано, что $x(T_1) > 0$.

Пусть теперь T^* — первый нуль функции x в (T_1, ∞). Так как x — положительная функция на $[T, T^*)$ и $T \leqslant \tau(T^*) < T^*$, повторив вышеприведенную аргументацию, заключим, что $x(T^*) > 0$.

Итак, положительность функции x доказана, что и завершает доказательство теоремы.

Приведем теперь ряд теорем (достаточные условия) о колеблемости и асимптотическом поведении решений дифференциального неравенства (3) при предположении, что функции τ и f удовлетворяют следующим условиям: $\tau'(t) \geqslant 0$ для каждого $t \geqslant t_0$, f — возрастающая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R} - \{0\}$ со свойством $uf(u) > 0$ для каждого $u \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Теорема 3. *Пусть существует положительная непрерывно дифференцируемая функция g, определенная на интервале $[t_0, \infty)$, с неотрицательной производной и такая, что функция rg' — невозрастающая на $[t_0, \infty)$. Тогда при выполнении условий*

$$\int\limits_{\pm a}^{\pm\infty} \frac{dt}{f(u)} < \infty, \quad a > 0, \tag{11}$$

$$\int\limits^{\infty} g[\tau(t)]\, p(t)\, dt = \infty, \tag{12}$$

$$\int\limits^{\infty} \frac{1}{g[\tau(t)]\, r(t)} \int\limits_{t_0} g[\tau(s)]\, p(s)\, ds dt = \infty \tag{13}$$

дифференциальное неравенство (3) *обладает свойством* $\tilde{0}$.

Доказательство. Пусть y — неколеблющееся решение неравенства (3), для которого без ограничения общности предположим, что $y(t) > 0$ при всех больших t. Подберем $t_1 \geqslant t_0$ так, чтобы

$$y(t) > 0, \quad y[\tau(t)] > 0 \quad \text{для каждого } t \geqslant t_1 \tag{14}$$

и рассмотрим следующие два случая.

1. $y(t)\, y'(t) > 0$ при всех больших t. Без ограничения общности предположим, что $y(t)\, y'(t) > 0$ для каждого $t \geqslant t_1$. Из (3) и (14) следует, что

$$r(t)\, y'(t) \leqslant r[\tau(t)]\, y'[\tau(t)] \quad \text{для каждого } t \geqslant t_1. \tag{15}$$

Рассмотрим функцию V, определяемую по формуле

$$V(t)=\frac{r(t)\,y'(t)}{f(y[\tau(t)])}\,g[\tau(t)] \text{ для каждого } t\geqslant t_1. \tag{16}$$

Дифференцируя (16), получим для каждого $t\geqslant t_1$

$$V'(t)=\frac{((r(t)\,y'(t))'}{f(y[\tau(t)])}\,g[\tau(t)]-\frac{r(t)\,y'(t)\,f'(y[\tau(t)])\,y'[\tau(t)]\,\tau'(t)}{(f(y[\tau(t)]))^2}\,g[\tau(t)]+$$
$$+\frac{r(t)\,y'(t)}{f(y[\tau(t)])}\,g'[\tau(t)]\,\tau'(t),$$

откуда в силу принятых предположений и неравенства (3) следует

$$V'(t)\leqslant-g[\tau(t)]\,p(t)+\frac{r(t)\,y'(t)\,\tau'(t)}{f(y[\tau(t)])}\,g'[\tau(t)] \text{ для каждого } t\geqslant t_1.$$

Интегрируя последнее соотношение от t_1 до t и используя (15), получим, что для каждого $t\geqslant t_1$

$$V(t)\leqslant V(t_1)-\int_{t_1}^{\infty}g[\tau(s)]\,p(s)\,ds+\int_{t_1}^{\infty}\frac{r(s)\,y'(s)\,\tau'(s)}{f(y[\tau(s)])}\,g'[\tau(s)]\,ds\leqslant$$
$$\leqslant V(t_1)-\int_{t_1}^{\infty}g[\tau(s)]\,p(s)\,ds+\int_{t_1}^{\infty}\frac{r[\tau(s)]\,y'[\tau(s)]\,\tau'(s)}{f(y[\tau(s)])}\,g'[\tau(s)]\,ds. \tag{17}$$

Применив теорему Бонне ко второму интегралу правой части (17) и воспользовавшись условием (11), можно заключить, что этот интеграл ограничен.

Таким образом, из (17) в силу условия (12) следует, что существует $t_2\geqslant t_1$ такое, что $V(t)<0$ для каждого $t\geqslant t_2$, а это противоречит (16).

2. $y(t)\,y'(t)<0$ при всех больших t. Как и в случае (1), без ограничения общности предположим, что $y(t)\,y'(t)<0$ для каждого $t\geqslant t_1$. Заметим, что в этом случае существует $c\geqslant 0$ такое, что $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=c$.

Докажем, что $c=0$. Пусть $c>0$. Рассмотрим функцию W, определяемую по формуле

$$W(t)=r(t)\,y'(t)\,g[\tau(t)] \text{ для каждого } t\geqslant t_1. \tag{18}$$

Дифференцируя (18) и используя (3), получим для каждого $t\geqslant t_1$

$$W'(t)\leqslant-g[\tau(t)]\,p(t)\,f(y[\tau(t)])+r(t)\,y'(t)\,g'[\tau(t)]\,\tau'(t). \tag{19}$$

Интегрируя (19) от t_1 до t, установим, что для каждого $t\geqslant t_1$

$$W(t)\leqslant W(t_1)-\int_{t_1}^{t}g[\tau(s)]\,p(s)\,f(y[\tau(s)])\,\tau'(s)\,ds+\int_{t_1}^{t}r(s)\,y'(s)\,g'[\tau(s)]\times$$
$$\times\tau'(s)\,ds=W(t_1)+\int_{t_1}^{t}f'(y[\tau(s)])\,y'[\tau(s)]\,\tau'(s)\int_{t_1}^{s}g[\tau(u)]\,p(u)\,du\,ds-$$
$$-f(y[\tau(t)])\int_{t_1}^{t}g[\tau(s)]\,p(s)\,ds+\int_{t_1}^{t}r(s)\,y'(s)\,g'[\tau(s)]\,\tau'(s)\,ds. \tag{20}$$

Из (20) в силу наших предположений следует, что для каждого $t\geqslant t_2\geqslant t_1$ $W(t)\leqslant-\frac{1}{2}f(c)\int_{t_1}^{t}g[\tau(s)]\,p(s)\,ds$, или

$$y'(t)\leqslant-\frac{1}{2}f(c)\frac{1}{g[\tau(t)]\,r(t)}\int_{t_1}^{t}g[\tau(s)]\,p(s)\,ds.$$

Интегрируя последнее неравенство от t_2 до t и используя условие (13), получим противоречие тому, что $y > 0$ на $[t_1, \infty)$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 3 *и условие*

$$\int^{\infty} \frac{dt}{g[\tau(t)]\, r(t)} = \infty \tag{21}$$

вместо условия (13). *Тогда дифференциальное неравенство* (3) *колеблющееся.*

Доказательство. Пусть y — неколеблющееся решение (3). Без ограничения общности предположим, что $y(t) > 0$ для каждого $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$. Как и при доказательстве теоремы (3), рассмотрим два случая: $y(t)\, y'(t) > 0$ для каждого $t \geqslant t_1$ и $y(t)\, y'(t) < 0$ для каждого $t \geqslant t_1$. Так как первый из них совпадает со случаем 1 теоремы 3, рассмотрим только второй случай. Рассмотрим снова функцию W, определяемую по формуле (18), и докажем (19) и (20). Из (20) вытекает, что существует $t_2 \geqslant t_1$ такое, что для каждого $t \geqslant t_2$

$$W(t) \leqslant W(t_1) < 0, \tag{22}$$

или $y'(t) \leqslant W(t_1)\,(g(\tau(t))\, r(t))^{-1}$.

Наконец, интегрируя (22) от t_2 до t и принимая во внимание (21), получим противоречие тому, что $y > 0$ на $[t_1, \infty)$.

Теорема 5. *Пусть существует положительная непрерывно дифференцируемая функция g, определённая на интервале $[t_0, \infty)$ и такая, что* $\int^{\infty} |(r[\tau(t)]\, g'[\tau(t)])'|\, dt < \infty$.

Тогда при выполнении условий (11), (12), (13) *и*

$$\int_0^{\pm a} \frac{du}{f(u)} < \infty, \quad a > 0, \tag{23}$$

дифференциальное неравенство (3) колеблющееся.

Доказательство. Пусть y — неколеблющееся решение (3). Без ограничения общности предположим, что $y(t) > 0$ для всех больших t. Заметим, что в этом случае либо $y'(t) > 0$ для всех больших t, либо $y'(t) < 0$ для всех больших t.

Как и в доказательстве теоремы (3), подберем $t_1 \geqslant t_0$ так, чтобы выполнялось (14). Затем, используя (14) и (3), докажем (15). Далее, рассмотрим функцию V, определяемую по формуле (16), и докажем (17). Покажем, что второй интеграл в правой части (17) ограничен. Действительно, так как для каждого $t \geqslant t_1$

$$\left| \int_{t_1}^{t} \frac{r[\tau(s)]\, y'[\tau(s)]\, \tau'(s)}{f(y[\tau(s)])}\, g'[\tau(s)]\, ds \right| = \left| \int_{t_1}^{t} \left(\frac{y'[\tau(s)]\, \tau'(s)}{f(y[\tau(s)])} \right) \times \right.$$

$$\left. \times (r[\tau(s)]\, g'[\tau(s)])\, ds \right| = \left| \left(\int_{t_1}^{t} \frac{y'[\tau(s)]\, \tau'(s)}{f(y[\tau(s)])}\, ds \right) (r[\tau(t)]\, g'[\tau(t)]) - \right.$$

$$\left. - \int_{t_1}^{t} \left(\int_{t_1}^{s} \frac{y'[\tau(s)]\, \tau'(s)}{f(y[\tau(s)])}\, ds \right) (r[\tau(s)]\, g'[\tau(s)])'\, ds \right| =$$

$$= \left| \left(\int_{y[\tau(t_1)]}^{y[\tau(t)]} \frac{du}{f(u)} \right) (r[\tau(t)]\, g'[\tau(t)]) - \int_{t_1}^{t} \left| \left(\int_{y[\tau(t_1)]}^{y[\tau(s)]} \frac{du}{f(u)} \right) (r[\tau(s)]\, g'[\tau(s)])'\, ds \right| \right. \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{y[\tau(t_1)]}^{y[\tau(t)]} \frac{du}{f(u)} \right| |r[\tau(t)]\, g'[\tau(t)]| + \int_{t_1}^{t} \left| \int_{y[\tau(t_1)]}^{y[\tau(s)]} \frac{du}{f(u)} \right| |(r[\tau(s)]\, g'[\tau(s)])'|\, ds,$$

а в силу предположений относительно функции g существуют $L > 0$ и $t_2 \geqslant t_1$ такие, что для каждого $t \geqslant t_2$

$$\int_{t_1}^{t} |r[\tau(s)]\, g'[\tau(s)]|\, ds < L, \quad |r[\tau(t)]\, g'[\tau(t)]| = \Bigg| r[\tau(t_1)]\, g'[\tau(t_1)] + \\ + \int_{t_1}^{t} (r[\tau(s)]\, g'[\tau(s)])'\, ds \Bigg| \leqslant |r[\tau(t_1)]\, g'[\tau(t_1)]| + L,$$

то, учитывая (11) или (23), заключим, что существуют $M > 0$ и $t_3 \geqslant t_2$ такие, что для всех $t \geqslant t_3$

$$\left| \int_{t_1}^{t} \frac{r[\tau(s)]\, y'[\tau(s)]\, \tau'(s)}{f(y[\tau(s)])}\, g'[\tau(s)]\, ds \right| \leqslant M.$$

Таким образом, из (17) получим

$$V(t) \leqslant V(t_1) + M - \int_{t_1}^{t} g[\tau(s)]\, p(s)\, ds \leqslant -\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t} g[\tau(s)]\, p(s)\, ds$$

для каждого $t \geqslant t_4 \geqslant t_3$, откуда

$$\frac{y'(t)}{f(y[\tau(t)])} \leqslant -\frac{1}{2}\, \frac{1}{g[\tau(t)]\, r(t)} \int_{t_1}^{t} g[\tau(s)]\, p(s)\, ds.$$

Так как для каждого $t \geqslant t_4$ имеет место $y[\tau(t)] \leqslant y(t)$ при $y' > 0$ на $[t_4, \infty)$ и $y[\tau(t)] \geqslant y(t)$ при $y' < 0$ на $[t_4, \infty)$, из последнего неравенства следует, что для всех $t \geqslant t_4$

$$\frac{y'(t)}{f(y(t))} \leqslant -\frac{1}{2}\, \frac{1}{g[\tau(t)]\, r(t)} \int_{t_1}^{t} g[\tau(s)]\, p(s)\, ds.$$

Интегрируя последнее неравенство от t_4 до t, получим

$$\int_{y(t_4)}^{y(t)} \frac{du}{f(u)} \leqslant -\frac{1}{2} \int_{t_4}^{t} \frac{1}{g[\tau(u)]\, r(u)} \int_{t_1}^{u} g[\tau(s)]\, p(s)\, ds du, \quad t \geqslant t_4,$$

что в силу условий (13) и (11) или (23) приводит к противоречию.

Аналогично доказывается и следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть существует положительная непрерывно дифференцируемая функция g, определенная на интервале $[t_0, \infty)$, с неположительной производной и такая, что функция rg' — неубывающая на $[t_0, \infty)$. Тогда при выполнении условий* (23), $\int^{\infty} g(t)\, p(t)\, dt = \infty$ *и* $\int^{\infty} \frac{1}{g(t)\, r(t)} \times \int_{t_0}^{t} g(s)\, p(s)\, dsdt = \infty$ *дифференциальное неравенство* (3) *колеблющееся.*

Приведем пример, показывающий, что условие (21) в некотором смысле неулучшаемо для колеблемости (3).

Пример. Дифференциальное неравенство

$$y(t)\left[(t^2 y'(t))' + \frac{(t-1)^3 \log^3(t-1)(\log t - 2)}{[(t-1) - \log(t-1)]^3 \log^3 t}\, y^3(t-1)\right] \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0 \equiv e^2,$$

удовлетворяет всем условиям теоремы (3) при $g(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{r(s)}$ для каждого $t \geqslant t_0$. Неколеблющаяся функция $y(t) = (\log t)^{-1} - t^{-1}$ — решение этого неравенства, которое монотонно стремится к нулю при $t \to \infty$.

Нетрудно показать, что теоремы (3) и (4) не могут быть перенесены на случай линейных или сублинейных уравнений.

1. *Kulenović M. R., Grammatikopoulos M. K.* On the asymptotic behavior of second order differential inequalities with alternating coefficients.— Math. Nachr., 1980, 98, p. 317—327.
2. *Monk J. D.* Introduction to set theory.— McGraw — Hill, 1969.
3. *Nababan S., Noussair E. S.* Oscillation criteria for second order nonlinear delay inequalities.— Bull. Austral. Math. Soc., 1976, 14, p. 331—341.
4. *Natio M., Yoshida N.* Oscillation theorems for semilinear elliptic differential operators.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1978, 85A, p. 135—151.
5. *Noussair E. S., Swanson C. A.* Oscillation theory for semilinear Schrödinger e uations and inequalities.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1975/76, 75A, N 6, p. 67—81.
6. *Philos Ch. G., Staikos V. A.* Basic comparison results for the oscillatory and asymptotic behavior of differential equations with deviating arguments.—Univ. of Ioannina, Technical Report N 12, 1978.
7. *Sficas Y. G.* On the behavior of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating arguments.— Nonlinear Analysis, 1979, 3, p. 379—394.
8. *Стаїкос В. А.* Курс математического анализа. Ч. 1.— Иоаннина, 1972.— (На греч. яз.)
9. *Swanson C. A.* Comparison and oscillation theory of linear differential equations.— N. Y. : Academic Press, 1968.

Сараевский ун-т, Югославия
Иоаннинский ун-т, Греция

Поступила в редакцию
01.09.81