УДК 517.946

Ф. Т. Барановский

О задаче Коши для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью

1. Постановка задачи. Теоремы. Рассмотрим при $t \geqslant 0$ уравнение

$$\varphi(t) u_{tt} - [a^{lj}(x, t) u_{x_l}]_{x_j} + b^l(x, t) u_{x_l} + b_1(x, t) u_t + c_1(x, t) u = f(x, t). \quad (1)$$

В уравнении (1) предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n и $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предполагаем, что $\varphi(t)$ — возрастающая функция и $\varphi(0) = 0$; функции a^{lj}, $a^{lj} = a^{jl}$, такие, что при $t \geqslant 0$ $\forall x$ и для всех $0 \neq \eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in R^n$

$$a^{lj}\eta_l\eta_j \geqslant \lambda t^{\alpha}\eta_l\eta_l \quad (2)$$

и $\lim\limits_{t\to 0} a^{lj}\eta_l\eta_j[\varphi(t)]^{-1} t^{\alpha'} < +\infty$, где λ — некоторая положительная константа, α — некоторое неотрицательное число и $\alpha' \in [0, 2)$.

В работе [1] показано, что уравнение (1) обобщает известное уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу.

Подобной тематике посвящены работы [2—7]. В работах [5—7] весовые множители в начальных условиях однозначно определяются коэффициентами b_1 и φ уравнения (1) и не зависят от других коэффициентов уравнения.

Рассмотрим для уравнения (1) задачу Коши с видоизмененными начальными данными

$$(t^{\beta}u - \overline{B})|_{t=0} = \psi(x), \quad \left[t^{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(t^{\beta}u - \overline{B})\right]\Big|_{t=0} = \psi_1(x) \quad (3)$$

или

$$(t^{\beta}u)|_{t=0} = \psi(x), \quad \left[t^{\nu}\frac{\partial}{\partial t}(t^{\beta}u)\right]\Big|_{t=0} = \psi_1(x), \quad (4)$$

или же

$$(t^{\beta}u)|_{t=0} = \psi(x), \left[t^{\gamma}\frac{\partial}{\partial t}(t^{\beta}u)\right]\Big|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

где γ — некоторое число из $[0,1)$, β — некоторое неотрицательное число, $\overline{B}$ — определенная функция, зависящая от коэффициентов, свободного члена уравнения (1), γ, β и функций ψ, ψ_1. Данная статья является обобщением и развитием результатов, полученных автором в работах [1, 8—11].

Обозначим S_0 n-мерную область гиперплоскости $t = 0$, которую вырезает характеристический коноид уравнения (1), выходящий из точки $P_0(x_0, t_0)$, $t_0 > 0$; S_1' — боковую поверхность рассматриваемого коноида; G' — область, ограниченную поверхностями S_0 и S_1'.

Введем операторы $D_t^{k_0} = \left(t^{\gamma}\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0}$, $D_x^{k'} = \dfrac{\partial^{|k'|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $k' = (k_1, k_2, \dots, k_n)$, $|k'| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $k = k_0 + |k'|$. Рассмотрим также функции, составленные на основании коэффициентов уравнения (1) и начальных данных (3) — (5): $\overline{\chi}(t) = \varphi(t) t^{-2\gamma}$, $\overline{\nu}(t) = \varphi(t) t^{-\gamma}$, $\overline{b} = b_1 - (2\beta + \gamma)\varphi(t) t^{-1}$, $\overline{c} = (1 - \gamma)^{-1}\{c_1 t - \beta[b_1 - (1 + \beta)\varphi(t) t^{-1}]\}$.

Теорема 1. *Пусть*: 1) *функции* $D_t^{k_0} D_x^{k'} a^{lj}$, $k \leqslant [3n/2]+5+2N_1$, $k_0 \leqslant [3n/2]+5$, *непрерывны в* G', *при этом выражения* $|D_x^{k'} a^{lj} t^{\gamma/2}|$, $|k'| \leqslant n+3+2N_1$, *ограничены в* $\overline{G}'$, *число* N_1 *определяется равенством* (14); 2) *функция* $\overline{\chi}(t)$ *имеет непрерывные производные при* $t>0$ *в* G' *до порядка* $[3n/2]+5$ *и* $\overline{\chi}'(t) \geqslant 0$, *функция* $\overline{\chi}(t)/t\overline{\chi}'(t)$ *ограничена в* $\overline{G}'$, $\exists p_1 \geqslant 0$ *такое, что* $\lim\limits_{t\to 0}(t^{p_1(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t)) < +\infty$, $\lim\limits_{t\to 0}(t^{(p_1-\delta_1)(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t)) = +\infty$, *где* δ_1 — *некоторое достаточно малое положительное число*; 3) *функции* $D_t^{k_0} D_x^{k'} b^l$, $D_t^{k_0} D_x^{k'} \overline{b}$, $D_t^{k_0} D_x^{k'} \overline{c}$, $D_t^{k_0} D_x^{k'} f$, $k_0 \leqslant [3n/2]+4$, $k \leqslant [3n/2]+4+2N_1$, *непрерывны в* G'; *при этом выражения*

$$|D_x^{k'} b^l t^{\gamma+p(1-\gamma)}|,\quad |D_x^{k'} \overline{c} t^{(1-\gamma)(p-1)}|,\quad |D_x^{k'} f t^{\beta+\gamma+q_1(1-\gamma)}|,\quad |k'| \leqslant n+2+2N_1,$$

ограничены в $\overline{G}'$, *где* p — *некоторое число из* $[0, 1)$ *и* q_1 — *некоторое неотрицательное число*; 4) *функции* a^{lj} *и* b^l *таковы, что при* $t \geqslant 0$ *и любом* η *в* $\overline{G}'$ *выполняются условие*

$$\Delta_1 (1-\gamma)^{-1} t (b^l \eta_l)^2 \leqslant A_1 a^{lj} \eta_l \eta_j - (1-\gamma)^{-1} t \frac{\partial a^{lj}}{\partial t} \eta_l \eta_j \tag{6}$$

и неравенство (2), *где* Δ_1 *и* A_1 — *некоторые положительные постоянные*; 5) *функция* $\overline{b}$ *удовлетворяет в* $\overline{G}'$ *условию* $2\overline{b} - 1/\Delta_1 \geqslant \lambda_1 > 0$, *если* $t/\varphi(t) = t^{1-\gamma}/\overline{\nu}(t)$ *при* $t \to 0$ *стремится к* $+\infty$, *и условию* $\overline{b} - p_0 > 0$ *в* $\overline{G}'$, *если* $t/\varphi(t)$ *при* $t \to 0$ *стремится к отличному от нуля числу, и такая, что интегралы* $\int\limits_0^R D_x^{k'} \overline{b}\, [\varphi(t)]^{-1}\, dt$, $0 < R \leqslant t_0$, *сходятся для всех* $|k'| = 1, 2, \ldots, n+2+2N_1$, *где* $p_0 = \max(p, q_1)$, λ_1 — *некоторая константа*; 6) *начальные данные* ψ, ψ_1 *имеют непрерывные частные производные в* S_0 *до порядка* $[3n/2]+6+2N_1$.

Тогда существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое в области G' *решение задачи* (1), (3).

Теорема 2. *Пусть*: 1) *функции* $D_t^{k_0} D_x^{k'} a^{lj}$, $k \leqslant [3n/\ ]+5+2N_2$, $k_0 \leqslant [3n/2]+5$, *непрерывны в* G', *при этом производные* $D_x^{k'} a^{lj}$, $|k'| \leqslant n+3+2N_2$, *ограничены в* $\overline{G}'$, *число* N_2 *имеет такой же смысл, как и* N_1 *в предыдущей теореме*; 2) *функция* $\overline{\chi}(t)$, $\overline{\chi}(t) \not\equiv \mathrm{const}$, *имеет непрерывные производные при* $t > 0$ *до порядка* $[3n/2]+5$ *и* $\overline{\chi}'(t) \geqslant 0$, *выражения* $t^{p(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t)$, $\overline{\chi}(t)/t\overline{\chi}'(t)$ *ограничены в* $\overline{G}'$, *где* p — *некоторое число из* $[0, 1)$; 3) *функции* $D_t^{k_0} D_x^{k'} b^l$, $D_t^{k_0} D_x^{k'} \overline{b}$, $D_t^{k_0} D_x^{k'} \overline{c}$, $D_t^{k_0} D_x^{k'} f$, $k \leqslant [3n/2]+4+2N_2$, $k_0 \leqslant [3n/2]+4$, *непрерывны в* G'; *при этом выражения*

$$|D_x^{k'} b^l (t^{p(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t))|,\quad |D_x^{k'} \overline{b} (t^{p(1-\gamma)}/\overline{\nu}(t))|,\quad |D_t^{k'} \overline{c} (t^{p(1-\gamma)}/t\overline{\chi}(t)),$$
$$|D_x^{k'} f (t^{(p+\beta/1-\gamma)(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t))|,\qquad |k'| \leqslant n+2+\ N_2,$$

ограничены в $\overline{G}'$; 4) *функции* a^{lj} *и* b^l *таковы, что выполняются в* $\overline{G}'$ *условие*

$$\Delta_2 \frac{(1-\gamma)^{-1} t^{1-2\gamma}}{\overline{\chi}'(t)} (b^l \eta_l)^2 \leqslant A_2 a^{lj} \eta_l \eta_j - (1-\gamma)^{-1} t \frac{\partial a^{lj}}{\partial t} \eta_l \eta_j \tag{7}$$

и неравенство (2), *где* Δ_2 *и* A_2 — *некоторые положительные константы*; 5) *начальные данные* ψ, ψ_1 *имеют непрерывные частные производные в* S_0 *до порядка* $[3n/2]+6+2N_2$.

Тогда существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое в области G' *решение, удовлетворяющее уравнению* (1) *и начальным данным* (4).

Теорема 3. *Пусть*: 1) *функции* $D_t^{k_0} D_x^{k'} a^{lj}$, $k \leqslant [3n/2]+5+2N_3$, $k_0 \leqslant [3n/2]+5$, *непрерывны в* G', *при этом производные* $D_x^{k'} a^{lj}$, $|k'| \leqslant n+$

$+3+2N_3$, *ограничены в* $\overline{G}'$; 2) *функция* $\overline{\chi}(t)$, $\overline{\chi}(t) \not\equiv \mathrm{const}$, *имеет непрерывные производные при* $t>0$ *до порядка* $[3n/2]+5$ *и* $\overline{\chi}'(t)\geqslant 0$, *выражения* $t^{p(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t)$, $\overline{\chi}(t)/t\overline{\chi}'(t)$ *ограничены в* $\overline{G}'$, *где* p — *некоторое число из* $[0, 1)$; 3) *функции* $D_t^{k_0}D_x^{k'}b^l$, $D_t^{k_0}D_x^{k'}\overline{b}$, $D_t^{k_0}D_x^{k'}\overline{c}$, $D_t^{k_0}D_x^{k'}f$, $k\leqslant[3n/2]+4+2N_3$, $k_0\leqslant[3n/2]+4$, *непрерывны в* G'; *при этом выражения* $|D_x^{k'}b^l(t^{p(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t))|$, $|D_x^{k'}\overline{c}(t^{p(1-\gamma)}/t\overline{\chi}(t))|$, $|D_x^{k'}f(t^{(p+\beta/(1-\gamma))(1-\gamma)}/\overline{\chi}(t))|$, $|k'|\leqslant n+2+2N_3$, *ограничены в* $\overline{G}'$; 4) *функции* a^{lj} *и* b^l *таковы, что в* $\overline{G}'$ *выполняется условие* (7) *и имеет место неравенство* (2); 5) *функция* $\overline{b}$ *удовлетворяет в* $\overline{G}'$ *условию* $\overline{b}\geqslant 0$ *и такая, что интегралы* $\int\limits_0^R D_x^{k'}\overline{b}\,[\varphi(t)]^{-1}\,dt$, $0<R\leqslant t_0$, *сходятся для всех* $|k'|=1, 2, \ldots, n+\ \ +2N_3$; *выражение* $t/\varphi(t)=t^{1-\gamma}/\overline{\nu}(t)$ *при* $t\to 0$ *стремится к* $+\infty$ *или числу, отличному от нуля*; 6) *функция* ψ *имеет непрерывные частные производные в* S_0 *до порядка* $[3n/2]+6+2N_3$.

Тогда существует единственное дважды непрерывно дифференцируемое в области G' *решение, удовлетворяющее уравнению* (1) *и начальным данным* (5).

В уравнении (1) при выполнении условий (2), (6) и (2), (7) на начальной гиперплоскости $t=0$ может вырождаться как тип, так и порядок уравнения.

В работах [12—15] особое внимание уделено корректной постановке задач для таких уравнений.

Введем новую функцию $w=t^{\beta}u$ и новую переменную $\tau=(1-\gamma)^{-1}t^{1-\gamma}$ Тогда относительно w получим уравнение

$$\mathscr{L}w=\chi(\tau)\,w_{\tau\tau}-(a^{lj}w_{x_l})_{x_j}+b^lw_{x_l}+bw_\tau/(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}+$$
$$+cw/\tau\,(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}=f\,(q\tau)^{\beta/(1-\gamma)}, \tag{8}$$

где $q=1-\gamma$, $\chi(\tau)=\overline{\chi}\,[(q\tau)^{1/(1-\gamma)}]=\varphi\,[(q\tau)^{1/(1-\gamma)}]\,(q\tau)^{2\gamma/(\gamma-1)}$, $\nu(\tau)=\varphi[(q\tau)^{1/(1-\gamma)}]\times\times(q\tau)^{\gamma/(\gamma-1)}$, $b=\overline{b}=b_1-(2\beta+\gamma)\,\varphi\,[(q\tau)^{1/(1-\gamma)}]\,(q\tau)^{1/(\gamma-1)}$, $c=\overline{c}=q^{-1}\{c_1(q\tau)^{1/(1-\gamma)}-\beta\,[b_1-(1+\beta)\,\varphi\,[(q\tau)^{1/(1-\gamma)}]\,(q\tau)^{1/(\gamma-1)}]\}$ и в функциях a^{lj}, b^l и f сделана замена $t=(q\tau)^{1/(1-\gamma)}$. Начальные данные (3) — (5) и условие (2) примут вид

$$(w-\overline{B})\,|_{\tau=0}=\psi(x),\quad \frac{\partial}{\partial\tau}(w-\overline{B})\,|_{\tau=0}=\psi_1(x), \tag{9}$$

$$w\,|_{\tau=0}=\psi(x),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=\psi_1(x), \tag{10}$$

$$w\,|_{\tau=0}=\psi(x),\quad \left.\frac{\partial w}{\partial\tau}\right|_{\tau=0}=0, \tag{11}$$

$$a^{lj}\eta_l\eta_j\geqslant\lambda\,(q\tau)^{\alpha/(1-\gamma)}\eta_l\eta_l. \tag{12}$$

Область G' и поверхности S_0, S_1', ограничивающие ее, преобразуются в область и поверхности, которые мы обозначим соответственно G, S_0, S_1. Введем оператор $D_\tau^{k_0}=\partial^{k_0}/\partial\tau^{k_0}$. Учитывая связь между переменными t и τ, получим $D_\tau^{k_0}=D_t^{k_0}$.

2. Сведение начальных данных к однородным и построение вспомогательных функций. Обозначим

$$N_1'=\begin{cases}[(q_1-1)/(1-p)]+2, & \text{если } q_1\geqslant 1,\\ 0, & \text{если } q_1<1,\end{cases} \tag{13}$$

$$N_1=N_1'+$$
$$+\left[\frac{[p_1(1-\gamma)+\gamma]\,(n+4)+(A_1+2p)\,(1-\gamma)+\alpha-(n+3)\,(1-\gamma)}{2\,(1-p)\,(1-\gamma)}\right]+1. \tag{14}$$

Введя обозначения $Aw=\chi w_{\tau\tau}+bw_{\tau}/(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}$, $Bw=-(a^{lj}w_{x_l})_{x_j}+b^l w_{x_l}+ + cw/\tau(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}$, уравнение (8) можно переписать следующим образом: $\mathscr{L}w = Aw+Bw=f(q\tau)^{\beta/(1-\gamma)}$.

Докажем сначала теорему 1 в предположении, что $t/\varphi(t)\to+\infty$ при $t\to 0$ или, что то же самое, $\tau/\nu(\tau)\to+\infty$ при $\tau\to 0$. Введем в рассмотрение вспомогательные функции

$$\beta_i(x,\tau)=-\int\limits_{R_0}^{\tau}\left[\int\limits_0^y\left(\frac{B\beta_{i-1}(x,t)}{\chi(t)}\exp\int\limits_y^t\frac{b(x,\eta)}{\nu(\eta)}\,d\eta\right)dt\right]dy,\ \ R_0>0,$$

$$i=1,2,\ldots,N_1', \tag{15}$$

$$\beta_i(x,\tau)=-\int\limits_0^{\tau}\left[\int\limits_0^y\left(\frac{B\beta_{i-1}(x,t)}{\chi(t)}\exp\int\limits_y^t\frac{b(x,\eta)}{\nu(\eta)}d\eta\right)dt\right]dy,$$

$$i=N_1'+1,\ N_1'+2,\ldots,N_1, \tag{16}$$

где числа N_1' и N_1 определяются соответственно равенствами (13) и (14) и $B\beta_0=-f(q\tau)^{\beta/(1-\gamma)}+B\psi+\mathscr{L}(\tau\psi_1)$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что если выполнены условия теоремы 1, то функции β_i, $i=1, 2,\ldots,N_1$, — решения рекуррентной системы дифференциальных уравнений

$$A\beta_i=\chi(\tau)\frac{\partial^2\beta_i}{\partial\tau^2}+\frac{b}{(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}\frac{\partial\beta_i}{\partial\tau}=-B\beta_{i-1}. \tag{17}$$

Введем функцию $v=w-\psi-\tau\psi_1-\sum\limits_{i=1}^{N_1}\beta_i$ и подставим ее в уравнение (8), тогда $\mathscr{L}v=\mathscr{L}w-\mathscr{L}\psi-\mathscr{L}(\tau\psi_1)-\sum\limits_{i=1}^{N_1}\mathscr{L}\beta_i=f(q\tau)^{\beta/(1-\gamma)}-B\psi-\mathscr{L}(\tau\psi_1)- -\sum\limits_{i=1}^{N_1}\mathscr{L}\beta_i=-\sum\limits_{i=1}^{N_1}(A\beta_i+B\beta_{i-1})-B\beta_{N_1}=-B\beta_{N_1}$. Учитывая свойства функций β_i, $i=1,2,\ldots,N_1$, видим, что задача Коши (8), (9) перейдет в задачу Коши относительно функции v для уравнения

$$\mathscr{L}v=\chi(\tau)v_{\tau\tau}-(a^{lj}v_{x_l})_{x_j}+b^l v_{x_l}+\frac{b}{(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}v_\tau+\frac{c}{\tau(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}v=-B\beta_{N_1} \tag{18}$$

с однородными начальными данными

$$v|_{\tau=0}=0,\quad v_\tau|_{\tau=0}=0, \tag{19}$$

при этом $\overline{B}=\sum\limits_{i=1}^{N_1}\beta_i$.

Из равенств (15), (16) и структуры оператора B для функции β_{N_1} следует соотношение

$$B\beta_{N_1}=O(\tau^{(N_1-N_1')(1-p)-\gamma/(1-\gamma)-p}). \tag{20}$$

3. Л е м м а. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши. Будем задавать начальные данные не при $\tau=0$, а при $\tau=\varepsilon>0$. Обозначим через v_ε решение уравнения

$$\mathscr{L}v_\varepsilon=-B\beta_{N_1} \tag{21}$$

с начальными данными

$$v_\varepsilon|_{\tau=\varepsilon}=0,\quad \left.\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial\tau}\right|_{\tau=\varepsilon}=0, \tag{22}$$

через $S(\tau_1)$ — сечение области G гиперплоскостью $\tau=\tau_1=\mathrm{const}$ и через $G_{\tau_1\tau_2}$ — часть G, заключенную между плоскостями $\tau=\tau_1$ и $\tau=\tau_2$.

Лемма. *Если выполнены условия теоремы 1, то существует $H>\varepsilon$, не зависящее от ε, такое, что при $\varepsilon\leqslant h\leqslant H$ выполняются неравенства*

$$\int\limits_{G_{\varepsilon h}} \frac{c^2}{\tau^2\nu^2(\tau)} v_\varepsilon^2 dG \leqslant Ch^{2(N_1-N_1')(1-p)-3(p_1+\gamma/(1-\gamma))-4p+4},$$

$$\int\limits_{G_{\varepsilon h}} (D_\tau D_x^{k'} v_\varepsilon)^2 \frac{dG}{\nu^2(\tau)} \leqslant Ch^{2(N_1-N_1')(1-p)-(k+2)(p_1+\gamma/(1-\gamma))-2p+k+1}, \tag{23}$$

$$\int\limits_{G_{\varepsilon h}} \left[D_x^{k'}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_l}\right)\right]^2 \frac{dG}{\chi^2(\tau)} \leqslant Ch^{2(N_1-N_1')(1-p)-k(p_1+\gamma/(1-\gamma))-p_1-\alpha/(1-\gamma)-2p+k+1}$$

$$k=1+|k'|=1,2,\ldots,n+3,$$

$$\int\limits_{G\varepsilon h} (D_\tau^2 D_x^{k'} v_\varepsilon)^2 dG \leqslant Ch^{2(N_1-N_1')(1-p)-(k+1)(p_1+\gamma/(1-\gamma))-\alpha/(1-\gamma)-2p+k}$$

$$k=2+|k'|=2,3,\ldots,n+3,$$

C — постоянная, зависящая от коэффициентов и свободного члена уравнения (18).

Доказательство. Известно, что при выполнении условий теоремы 1 существует единственное решение задачи (21), (22). В дальнейшем, где это не вызовет недоразумений, будем опускать индекс ε. Умножим правую и левую части равенства (21) на $2\,\partial v/\partial\tau$ и проинтегрируем по $G_{\varepsilon t}$. Тогда после несложных преобразований получим

$$\int\limits_{S(t)} \left[a^{lj}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\chi\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\right] dS \leqslant \int\limits_{G_{\varepsilon t}} \left[\frac{\partial a^{lj}}{\partial \tau}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\chi'\left.\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -2\frac{\partial v}{\partial \tau}\left(b^l\frac{\partial v}{\partial x_l}+\frac{b}{(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}\frac{\partial v}{\partial \tau}+\frac{c}{\tau(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}v+B\beta_{N_1}\right)\right] dG. \tag{24}$$

При выводе неравенства (24) была использована однородность начальных данных для функции v_ε. Оценим некоторые слагаемые правой части неравенства (24):

$$\left|-2\frac{\partial v}{\partial \tau}b^l\frac{\partial v}{\partial x_l}\right| \leqslant \Delta_1(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}\left(b^l\frac{\partial v}{\partial x_l}\right)^2+\frac{1}{\Delta_1(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2,$$

$$\left|-2\frac{\partial v}{\partial \tau}\frac{c}{\tau(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}v\right| \leqslant \delta_2\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\frac{1}{(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}+\frac{c^2}{\delta_2\tau^2(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}v^2.$$

Учитывая условия теоремы 1 относительно коэффициента c, легко получить оценку

$$\int\limits_{G_{\varepsilon t}} \frac{c^2}{\tau^2(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}} v^2 dG \leqslant M_0 t^{2-2p}\int\limits_{G_{\varepsilon t}}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\frac{dG}{(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}.$$

Постоянная M_0 зависит от c и p. Принимая во внимание выведенные выше оценки и оценивая $-2\int\limits_{G_{\varepsilon t}}\frac{\partial v}{\partial v}B\beta_{N_1}dG$, получим

$$\int\limits_{S(t)} \left[a^{lj}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\chi\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\right] dS \leqslant \int\limits_{G_{\varepsilon t}} \left[\frac{\partial a^{lj}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\Delta_1(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}\left(b^l\frac{\partial v}{\partial x_l}\right)^2+\right.$$

$$+\chi\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2 \frac{-2b+1/\Delta_1+\delta_2+\delta_3+M_0 t^{2-2p}/\delta_2+\chi'(\tau)(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}{\chi(\tau)(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}}\Bigg] dG+$$

$$+\frac{1}{\delta_3}\int\limits_{G_{\varepsilon t}} (B\beta_{N_1})^2 (q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)} dG. \tag{25}$$

Принимая условия теоремы 1 относительно функции b и подбирая достаточно малые δ_2, δ_3 и t таким образом, чтобы

$$-2b+1/\Delta_1+\delta_2+\delta_3+M_0 t^{2-2p}/\delta_2+\chi'(\tau)(q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)}\leqslant 0, \tag{26}$$

с учетом условия (6) из неравенства (25) получим

$$\int\limits_{S(t)}\left[a^{lj}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\chi(\tau)\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\right] dS\leqslant A_1\int\limits_{G_{\varepsilon t}}\left[a^{lj}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\chi(\tau)\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\right]\frac{dG}{\tau}+$$

$$+\frac{1}{\delta_3}\int\limits_{G_{\varepsilon t}} (B\beta_{N_1})^2 (q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)} dG. \tag{27}$$

Вводя обозначения

$$y_\varepsilon(t)=\int\limits_{G_{\varepsilon t}}\left[a^{lj}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\chi(\tau)\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\right]\frac{dG}{\tau},$$

из неравенства (27) будем иметь

$$t y_\varepsilon'(t)-A_1 y_\varepsilon(t)\leqslant\frac{1}{\delta_3}\int\limits_{G_{\varepsilon t}} (B\beta_{N_1})^2 (q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)} dG,$$

или

$$[y_\varepsilon(t)\, t^{-A_1}]_t'\leqslant\frac{t^{-A_1-1}}{\delta_3}\int\limits_{G_{\varepsilon t}} (B\beta_{N_1})^2 (q\tau)^{\gamma/(1-\gamma)} dG. \tag{28}$$

Интегрируя неравенство (28) от ε до h_1, где h_1 удовлетворяет неравенству (26), и учитывая, что $y_\varepsilon(\varepsilon)=0$, получим

$$y_\varepsilon(h_1)\leqslant C h^{2(N_1-N_1')(1-p)-\gamma/(1-\gamma)-2p+1}, \tag{29}$$

где C — постоянная, зависящая от коэффициентов и свободного члена уравнения (18). Из неравенств (28), (29) вытекают следующие оценки:

$$\int\limits_{G_{\varepsilon h_1}}\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}\right)^2\frac{dG}{\nu^2(\tau)}\leqslant C h_1^{2(N_1-N_1')(1-p)-3(p_1+\gamma/(1-\gamma))-2p+2},\quad \int\limits_{G_{\varepsilon h_1}} a^{lj}\frac{\partial v}{\partial x_l}\frac{\partial v}{\partial x_j} dG\leqslant$$

$$\leqslant C h_1^{2(N_1-N_1')(1-p)-\gamma/(1-\gamma)-2p+2},\quad \int\limits_{G_{\varepsilon h_1}}\frac{c^2}{\tau^2\nu^2(\tau)} v^2 dG\leqslant C h_1^{2(N_1-N_1')(1-p)-3(p_1+\gamma/(1-\gamma))-4p+4}.$$

Дифференцируя равенство (21) по x_i и проводя преобразования, аналогичные предыдущим, используя при этом из работы [3] неравенство

$$(a^{lj}_{x_p} v_{x_l} v_{x_j})^2\leqslant M_1 a^{lj} v_{x_l x_i} v_{x_j x_i},$$

где M_1 зависит лишь от вторых производных функций a^{lj}, получим

$$\int\limits_{G_{\varepsilon h_2}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial \tau\partial x_i}\right)^2\frac{dG}{\nu^2(\tau)}\leqslant C h_2^{2(N_1-N_1')(1-p)-4(p_1+\gamma/(1-\gamma))-2p+3},\quad \int\limits_{G_{\varepsilon h_2}}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2\frac{dG}{\nu^2(\tau)}\leqslant$$

$$\leqslant C h_2^{2(N_1-N_1')(1-p)-4(p_1+\gamma/(1-\gamma))-2p+5},\quad h_2\leqslant h_1,\qquad i=1,2,\ldots,n$$

Аналогично оцениваются производные более высокого порядка вида $D_x^{k'}v$, $D_\tau D_x^{k'}v$.

Производные вида $D_\tau^2 D_x^{k'}v$ оцениваются так же, как и в работах [8, 10]. Таким образом, лемма доказана.

4. Завершение доказательства теорем. Доказательство существования и единственности решения задачи (18), (19) проводится аналогично тому, как это сделано в работе [8]. Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено в предположении, что $t/\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to 0$.

Аналогично доказывается теорема 1 в предположении, что $t/\varphi(t) \to M \neq 0$ при $t \to 0$.

Доказательство второй и третьей теорем проводится по схеме доказательства теоремы 1.

5. Дополнения.

Замечание 1. Если при $\gamma + \beta = 1$ выполняются условия теоремы 2, то существует единственное ограниченное решение u, удовлетворяющее уравнению (1) и начальному условию $u(x, 0) = \psi_1(x)/\beta$.

Замечание 2. Вместо начальных условий (3)—(5) для уравнения (1) можно задать

$$[\varphi_1(x, t)\, u - \overline{B}]\,|_{t=0} = \psi(x), \quad \left\{\varphi_2(t)\, \frac{\partial}{\partial t}\, [\varphi_1(x, t)\, u - \overline{B}]\right\}\bigg|_{t=0} = \psi_1(x), \qquad (30)$$

$$[\varphi_1(x, t)\, u]\,|_{t=0} = \psi(x), \quad \left\{\varphi_2(t)\, \frac{\partial}{\partial t}\, [\varphi_1(x, t)\, u]\right\}\bigg|_{t=0} = \psi_1(x), \qquad (31)$$

$$[\varphi_1(x, t)\, u]\,|_{t=0} = \psi(x), \quad \left\{\varphi_2(t)\, \frac{\partial}{\partial t}\, [\varphi_1(x, t)\, u]\right\}\bigg|_{t=0} = 0, \qquad (32)$$

где $\varphi_2(t)$ — возрастающая функция, $\varphi_2(0) = 0$, при малых t она не высшего порядка, чем функция t^γ, $\gamma \in [0,1)$; функция $\varphi_1(x, t)$ может обращаться в нуль при $t = 0$, причем скорость обращения ее в нуль зависит от $x \in S_0$; считаем, что при малых t она не высшего порядка, чем функция t^β, $\beta \geqslant 0$; функции φ_1, φ_2 удовлетворяют определенным требованиям гладкости. Тогда можно рассмотреть задачи (1), (30) — (1), (32).

Замечание 3. Пусть для задачи (1), (31) выполняется теорема, аналогичная теореме 2. Тогда, если $\varphi_1(x, 0) = 0$ и существует конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_2(\partial\varphi_1/\partial t)$ при всех $x \in S_0$, то существует единственное ограниченное решение u, удовлетворяющее уравнению (1), начальному условию $u(x, 0) = \psi$ в S_0; если же $\varphi_1(x, 0) = 0$ и существует конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_2(\partial\varphi_1/\partial t)$ только при некоторых $x \in S_0$, то существует единственное ограниченное решение u, удовлетворяющее уравнению (1), начальному условию $u(x, 0) = \psi$ в S_0 и начальному условию $\{\varphi_2 \partial[\varphi_1 u]/\partial t\}|_{t=0} = \psi_1$ в $\overline{S_0 - S_2}$, где S_2 — множество точек области S_0, в которых $\varphi_1(x, 0) = 0$.

Замечание 4. Если $\overline{\chi}(t) = \varphi(t)\, t^{-2\gamma} = \mathrm{const}$ в теоремах 2, 3, то условие (7) заменяется условием $\Delta_2' q^{-2} t^{2-2\gamma} (b^l \eta_l)^2 \leqslant A_2' a^{lj} \eta_l \eta_j - q^{-1} t (\partial a^{lj}/\partial t)\, \eta_l \eta_j$, где Δ_2' и A_2' — некоторые положительные константы.

1. *Барановский Ф. Т.* Задача Коши для уравнения типа Эйлера — Пуассона — Дарбу и вырождающегося гиперболического уравнения.— Изв. вузов. Математика, 1960, № 6, с. 11—23.
2. *Карапетян К. И.* О задаче Коши для уравнения гиперболического типа, вырождающегося на начальной плоскости.— Докл. АН СССР, 1956, **106**, № 6, с. 963—966.
3. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой.— М. : ВИНИТИ, 1971.— 252 с.— (Итоги науки. Сер. Математика. Математический анализ. 1969/ВИНИТИ).
4. *Ягджян К. А.* Задача Коши для некоторых классов слабо гиперболических уравнений с неограниченными коэффициентами.— Учен. зап. Ерев. ун-та. Естествен. науки, 1975, № 3, с. 3—9.

5. *Терсенов С. А.* О сингулярной задаче Коши.— Докл. АН СССР, 1971, **196**, № 5, с. 1032—1035.
6. *Нерсесян А. Б.* Задача Коши для симметрической гиперболической системы, вырождающейся на начальной гиперплоскости.— Докл. АН СССР, 1971, **196**, № 2, с. 289—292.
7. *Оганесян Г. Р.* Задача Коши с весом для слабо гиперболических псевдодифференциальных уравнений с данными на гиперплоскости вырождения.— Учен. зап. Ерев. ун-та. Естествен. науки, 1975, № 1, с. 10—16.
8. *Барановский Ф. Т.* О задаче Коши для сильно вырождающегося гиперболического уравнения.— Сиб. мат. журн., 1963, **4**, № 5, с. 1000—1011.
9. *Барановский Ф. Т.* Задача Коши для гиперболического уравнения с вырождающейся главной частью.— Докл. АН СССР, 1977, **235**, № 1, с. 11—14.
10. *Барановский Ф. Т.* О задаче Коши для гиперболического вырождающегося на начальной плоскости уравнения с видоизмененными начальными данными.— Сиб. мат. журн., 1977, **18**, № 4, с. 926—933.
11. *Барановский Ф. Т.* Некоторые задачи с классическими и видоизмененными условиями для вырождающихся гиперболических уравнений.— Успехи мат. наук 1980, **35**, № 4 (214), с. 160.
12. *Бицадзе А. В.* К теории одного класса уравнений смешанного типа.— В кн.: Некоторые проблемы математики и механики. Л. : Наука, 1970, с. 112—119.
13. *Бицадзе А. В.* К теории уравнений смешанного типа, порядок которых вырождается вдоль линии изменения типа.— В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М. : Наука, 1972, с. 47—52.
14. *Бицадзе А. В., Нахушев А. М.* К теории вырождающихся гиперболических уравнений в многомерных областях.— Докл. АН СССР, 1972, **204**, № 6, с. 1289—1291.
15. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.— М. : Наука, 1981.— 448 с.

Киев. политехн. ин-т

Поступила в редакцию 20.07.81
после переработки — 14.04.83