УДК 517.5+517.94

И. Н. Пак

О дифференцируемости сумм рядов, содержащих решения дифференциального уравнения типа Штурма—Лиувилля

1. Введение. В предлагаемой работе рассматриваются ряды вида

$$\sum c_n U_n (x) \text{ и } \sum c_n U_n (x)\, e^{\pm i\beta_n t}, \tag{1}$$

где c_n — числовые коэффициенты, $U_n (x)$ — решение уравнения

$$-d^2U/dx^2 + \{q(x) - \beta_n^2\}\, U = 0, \tag{2}$$

$$\beta_n = n\omega + \alpha + \sum_{m=1}^{s-1} l_m (n\omega + \alpha)^{-m} + O(n^{-s}), \omega > 0, \tag{3}$$

с точки зрения дифференцируемости их сумм в зависимости от свойств (c_n) и $q(x)$. Функция $q(x)$ считается непрерывной и достаточное число раз дифференцируемой в (a, b), который не предполагается обязательно конечным. В частности, $q(x)$ может иметь любую особенность на концах a и b.

Частными случаями уравнения (2) с β_n, определяемым по (3), являются дифференциальное уравнение для $U = (\sin \theta/2)^{\alpha+1/2} (\cos\theta/2)^{\beta+1/2} P_n^{(\alpha,\beta)} (\cos\theta)$, $x = \cos\theta$, $0 < \theta < \pi$, где $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — полином Якоби, при этом $\beta_n = n + (\alpha + \beta + 1)/2$, дифференциальное уравнение для $U = \sqrt{\sin\theta}\, P_{\beta_n}^{\mu} (\cos\theta)$, $x = \cos\theta$, где $P_{\beta_n}^{\mu}(x)$ — сферическая функция индекса β_n, при этом роль β_n в уравнении (2) выполняет $\beta_n + 1/2$, дифференциальное уравнение для $U = \sqrt{x}\, J_\nu (\tau_n x)$ и $U = \sqrt{x}\, Y_\nu (\tau_n x)$, где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго родов, а τ_n — положительные корни $J_\nu(z)$, либо $Y_\nu(z)$, либо уравнения $zJ_\nu'(z) + HJ_\nu(z) = 0$, при этом τ_n представимо в виде (3) с $\omega = \pi$. Класс рядов (1) содержит также ряды по собственным функциям дифференциального уравнения Штурма — Лиувилля

$$-d^2U/dx^2+\{q(x)-\lambda\}U=0 \qquad (4)$$

в случае, когда $\sqrt{\lambda_n}$, где λ_n — собственные значения, представимы в виде (3), а потенциал $q(x)$ удовлетворяет указанным выше условиям.

Ряды (1) встречаются при решении некоторых задач математической физики [1] гл. 6. Эти ряды могут не допускать не только двукратного, но иногда и однократного почленного дифференцирования. Однако с помощью результатов, приводимых в этой работе, во многих случаях можно показать, что обобщенные решения ряда задач математической физики — это дифференцируемые (в обычном смысле) до некоторого порядка функции, за возможным исключением некоторых значений. При этом обычно $U_n(x)$ представляют собою собственные функции уравнения $-d/dx\{p(x)dy/dx\}+l(x)y=\mu r(x)y$, которое приводится к виду (4) с помощью известных [2, с. 12] подстановок.

2. Дифференциальные свойства сумм рядов. Применяя к уравнению (2) метод Лиувилля—Стеклова [3, 4], решение $U_n(x)$ можно представить в виде [5]

$$U_n(x)=U_n(x_0)\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k(x)(2\beta_n)^{-k}\cos[\beta_n(x-x_0)+k\pi/2]+$$
$$+\beta_n^{-1}U_n'(x_0)\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k(x)(2\beta_n)^{-k}\sin[\beta_n(x-x_0)+k\pi/2]+R(x), \qquad (5)$$

при этом $x\in W^{(0)}\equiv S^{(0)}\cap S^{(m-1)}$, где $S^{(k)}\equiv\{x\colon |p_k(x)|\leqslant M\}$, $p_k(x)=\int\limits_{x_0}^{x}|q^{(k)}(t)|\,dt$, M — константа, x_0 — фиксированная точка из (a,b), а $U_n(x_0)$ и $U_n'(x_0)$ — начальные значения, которые считаются произвольными.

Для $x\in W^{(i)}\equiv W^{(0)}\cap D^{(m-2+i)}$, где $q^{(k)}(x)\in C(D^{(k)})$, справедлива оценка

$$d^iR(x)/dx^i=O(n^{i-m}H_n),\quad i=0,1,2,\ldots, \qquad (6)$$

при этом $H_n=2(|U_n(x_0)|+\beta_n^{-1}|U_n'(x_0)|)$.

Если $[a,b]$ — конечный отрезок, то $W^{(0)}=S^{(m-1)}$ и $W^{(i)}=S^{(m-1)}\cap D^{(m-2+i)}$ при $i\geqslant 1$.

На основе (5) имеем:

$$\sum c_nU_n(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k(x)\sum_n c_nU_n(x_0)(2\beta_n)^{-k}\cos[\beta_n(x-x_0)+k\pi/2]+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\beta_k(x)\sum_n c_n\beta_n^{-1}U_n'(x_0)(2\beta_n)^{-k}\sin[\beta_n(x-x_0)+k\pi/2]+\sum c_nR(x). \qquad (7)$$

Если c_nH_n с ростом n растет не быстрее некоторой степени n, а $q(x)$ — достаточно гладкая функция, то за счет выбора m обеспечивается сходимость и возможность почленного дифференцирования до определенного порядка ряда $\Sigma c_nR(x)$ для тех $x\in W^{(0)}$, в которых существуют непрерывные производные соответствующих порядков от $q^{(m-2)}(x)$, поскольку $q(x)$ не зависит от n. Таким образом, вопрос о дифференцируемости суммы ряда в левой части равенства (7) сводится к аналогичному вопросу для тригонометрических сумм в правой части (7). В связи с этим докажем лемму, которая является модификацией теоремы 4.1 из [6, с. 98]:

Лемма. *Если $a_n=o(1)$ и при некотором $k\geqslant 1$ $\sum n^k|\Delta^{k+1}a_n|<\infty$, то $S(x)\in C^h(j2\pi/\omega,(j+1)2\pi/\omega)$, $j=0,\pm1,\pm2,\ldots$*, где $S(x)=\sum a_ne^{\pm i\beta_nx}$,

β_n *определено по* (3), *знак перед* i *берется любой, но какой-нибудь один из них,* $h = \min(k, s-2)$.

Лемма справедлива и для суммы ряда $\sum (-1)^n c_n e^{\pm i\beta_n x}$, исключая, может быть, точки $x \equiv \pi/\omega \pmod{2\pi/\omega}$.

Доказательство. $e^{\pm i\beta_n x} = e^{\pm ix(n\omega+\alpha)} e^z$, где

$$z = \pm ix \left\{ \sum_{m=1}^{s-1} l_m (n\omega+\alpha)^{-m} + O(n^{-s}) \right\}.$$

При любом натуральном q имеем

$$e^z = 1 + z + z^2/2! + \ldots + z^{q-1}/(q-1)! + r_q, \tag{8}$$

где [7, с.67]

$$r_q(x) = z^q/2\pi i \int_{|\xi|=R} e^{\xi} (\xi - z)^{-1} \xi^{-q} d\xi,$$

а R выбирается так, чтобы в $|\xi| < R$ лежала z. Ясно, что равномерно относительно $|x| < N$, где N — любое число, при $n \to \infty$ имеем

$$d^j r_q(x)/dx^j = O(n^{-q}),\ j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Полагая $q = s$, (8) представим в виде $\sum\limits_{m=0}^{s-1} (n\omega+\alpha)^{-m} P_m(x) + \sigma_s(x) + r_s(x)$, где $P_m(x)$ — многочлен степени m, а $\sigma_s(x)$ — многочлен степени $s-1$, каждый коэффициент которого есть $O(n^{-s})$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$d^j \sigma_s(x)/dx^j = O(n^{-s}) \tag{10}$$

равномерно относительно $|x| \leqslant N$. Итак,

$$e^{\pm i\beta_n x} = e^{\pm ix(n\omega+\alpha)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{s-1} (n\omega+\alpha)^{-m} P_m(x) + \rho_s(x) \right\},$$

где $\rho_s(x) = \sigma_s(x) + r_s(x)$, и в силу (9) и (10)

$$d^j \rho_s(x)/dx^j = O(n^{-s}), \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Таким образом,

$$\sum a_n e^{\pm i\beta_n x} = \sum_{m=0}^{s-1} P_m(x) \sum_n a_n (n\omega+\alpha)^{-m} e^{\pm ix(n\omega+\alpha)} + \sum a_n \rho_s(x)\, e^{\pm ix(n\omega+\alpha)}. \tag{12}$$

Последний ряд в (12) в силу (11) допускает $s-2$ почленных дифференцирований по x, $|x| < N$. Для рядов $\sum a_n (n\omega+\alpha)^{-m} e^{\pm ix(n\omega+\alpha)}$, $m = 0, 1, \ldots, s-1$, коэффициенты $b_n = a_n (n\omega+\alpha)^{-m}$ удовлетворяют условиям вышеупомянутой теоремы 4.1 из [6, с. 98], а потому их суммы имеют k непрерывных производных, за возможным исключением точек $x \equiv 0 \pmod{2\pi/\omega}$, и лемма следует из (12).

Вторая часть леммы следует из (12) с учетом равенства

$$\sum (-1)^n a_n e^{\pm ix(n\omega+\alpha)} = e^{\pm i\alpha x} \sum a_n e^{\pm in(\omega x+\pi)}.$$

С помощью приведенной леммы на основе (7) с учетом замечания относительно дифференцируемости суммы ряда $\sum c_n R(x)$ доказываются следующие теоремы. При этом $U(x)$, $\tilde{U}(x)$, $U(x, t)$ и $\tilde{U}(x, t)$ означают суммы рядов соответственно $\sum c_n U_n(x)$, $\sum (-1)^n c_n U_n(x)$, $\sum c_n U_n(x)\, e^{\pm i\beta_n t}$, $\sum (-1)^n c_n U_n(x)\, e^{\pm i\beta_n t}$.

Теорема 1. *Если* $c_n U_n(x_0) \to 0$, $c_n \beta_n^{-1} U_n'(x_0) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и при некотором* $k \geqslant 1$ $\sum n^k |\Delta^{k+1}(c_n U_n(x_0))| < \infty$ *и* $\sum n^k |\Delta^{k+1}(c_n \beta_n^{-1} U_n'(x_0))| <$

$<\infty$, *то* $U(x)$, $\widetilde{U}(x)\in C^h$ при $x\in W^{(h)}$, *за возможным исключением значений* $x\equiv x_0 \pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $U(x)$ *и* $x\equiv x_0+\pi/\omega \pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $\widetilde{U}(x)$; *при этом* $h=\min(k, m-2, s-2)$.

Отметим, что частный случай теоремы 1 (случай линейной зависимости β_n от n) рассмотрен в [5, с. 171].

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 при том же* h

$$\partial^{r+j}U/\partial x^r\partial t^j, \quad \partial^{r+j}\widetilde{U}/\partial x^r\partial t^j \in C\,(x\in W^{(r)},\ t\in(-\infty, +\infty)),$$
$$r, j=0, 1, \ldots, h, \quad r+j\leqslant h,$$

исключая, может быть, значения $x\pm t\equiv x_0 \pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $U(x, t)$ и $x\pm t\equiv x_0+\pi/\omega \pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $\widetilde{U}(x, t)$.

Если начальные значения $U_n(x_0)$ и $\beta_n^{-1}U_n'(x_0)$ представимы в виде

$$\cos(\beta_n x_0)\sum_{i=0}^{m-1} p_i\beta_n^{\delta-i}+\sin(\beta_n x_0)\sum_{i=0}^{m-1} q_i\beta_n^{\delta-i}+O(n^{\delta-m}), \tag{13}$$

где δ — некоторое число, p_i и q_i не зависят от n, то

$$\sum c_nU_n(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_k(x)\sum_n c_n\beta_n^{\delta-k}\,{\cos \atop \sin}\,(\beta_n x+k\pi/2)+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\tau_k(x)\sum_n c_n\beta_n^{\delta-k}\,{\cos \atop \sin}\,[\beta_n(x-2x_0)+k\pi/2]+\sum c_n\sigma_n(x).$$

При этом $d^j\sigma(x)/dx^j=O(n^{\delta+j-m})$, $j=0, 1, \ldots,$ для $x\in W^{(j)}$. Тогда теоремы 1 и 2 с учетом представления

$$\beta_n^\delta=(n\omega+\alpha)^\delta\left\{1+\sum_{m=1}^{s-1}\delta_m(n\omega+\alpha)^{-m-1}+O(n^{-s-1})\right\}$$

формулируются следующим образом.

Теорема 1'. *Если* $c_n(n\omega+\alpha)^\delta\to 0$, $n\to\infty$, *и при некотором* $k\geqslant 1$ $\sum n^k|\Delta^{k+1}[c_n(n\omega+\alpha)^\delta]|<\infty$, *то* $U(x)$, $\widetilde{U}(x)\in C^h$ *при* $x\in W^{(h)}$, где $h=\min(k, m-2, s-2)$, *за возможным исключением точек* $x\equiv 0$ *и* $x\equiv 2x_0 \pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $U(x)$ *и* $x\equiv\pi/\omega$ *и* $x\equiv\pi/\omega+2x_0 \pmod{2\pi/\omega}$ в *случае* $\widetilde{U}(x)$.

Теорема 2'. *В условиях теоремы 1' при том же* h *и* $r, j=0, 1, \ldots, h$, $r+j\leqslant h$, *имеем*

$$\partial^{r+j}U/\partial x^r\partial t^j, \quad \partial^{r+j}\widetilde{U}/\partial x^r\partial t^j\in C \quad (x\in W^{(r)}, \quad t\in(-\infty, +\infty)),$$

за возможным исключением значений $x\pm t\equiv 0$ *и* $x\pm t\equiv 2x_0 \pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $U(x, t)$ *и* $x\pm t\equiv\pi/\omega$ и $x\pm t\equiv\pi/\omega+2x_0 \pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $\widetilde{U}(x, t)$.

Замечание. На основе равенства

$$\beta_n^\delta=(n\omega)^\delta\left\{1+\sum_{m=1}^{s-1}\eta_m n^{-m}+O(n^{-s})\right\}$$

легко убедиться в том, что условия $c_n(n\omega+\alpha)^\delta=o(1)$, $\sum n^k|\Delta^{k+1}\times\times[c_n(n\omega+\alpha)^\delta]|<\infty$ и $c_nn^\delta=o(1)$, $\sum n^k|\Delta^{k+1}(c_nn^\delta)|<\infty$ эквивалентны. Поэтому условия теорем 1' и 2' могут быть заменены последними.

Рассмотрим приложения полученных результатов.

3. Ряды по бесселевым функциям. Функции $U_n(x)=\sqrt{x}J_\nu(\beta_n x)$ и $U_n(x)=\sqrt{x}Y_\nu(\beta_n x)$, где $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и

второго родов, удовлетворяют уравнению типа (2):

$$-d^2U/dx^2+\{x^{-2}(\nu^2-1/4)-\beta_n^2\}U=0$$

При этом для любого $x_0>0$ $U_n(x_0)$ и $\beta_n^{-1}U_n'(x_0)$ представимы в виде (13) с $\delta=-1/2$:

$$\cos(\beta_n x_0)\sum_{i=0}^{m-1}p_i(\nu,x_0)\beta_n^{-1/2-i}+\sin(\beta_n x_0)\sum_{i=0}^{m-1}q_i(\nu,x_0)\beta_n^{-1/2-i}+O(\beta_n^{-1/2-m}),$$

где m — любое натуральное число. Оно следует из асимптотической формулы для функций Бесселя [8, с. 2 2].

Функция $q(x)=x^{-2}(\nu^2-1/4)$, следовательно, $W^{(i)}=[\varepsilon,+\infty)$, где $\varepsilon>0$, при любых m и i. Полагая $x_0=\pi/\omega$, из теорем 1′ и 2′ получаем теорему.

Теорема 3. *Если* $c_n n^{-1/2}=o(1)$ *и при некотором* $k\geqslant1$ $\Sigma n^k|\Delta^{k+1}\times\times(c_n n^{-1/2})|<\infty$, *то суммы рядов*

$$\Sigma c_n J_\nu(\beta_n x),\qquad \Sigma c_n Y_\nu(\beta_n x),\tag{14}$$

$$\Sigma(-1)^n c_n J_\nu(\beta_n x),\qquad \Sigma(-1)^n c_n Y_\nu(\beta_n x)\tag{15}$$

имеют $h=\min(k,s-2)$ (*так как* m — *любое*) *производных при* $x>0$, *за возможным исключением точек* $x\equiv0\pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* (14) *и* $x\equiv\equiv\pi/\omega\pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* (15).

Пример. Суммы рядов $\Sigma n^\gamma J_\nu(\tau_n x)$, $\Sigma n^\gamma Y_\nu(\tau_n x)$, $\Sigma(-1)^n n^\gamma J_\nu(\tau_n x)$ и $\Sigma(-1)^n n^\gamma Y_\nu(\tau_n x)$, где $\gamma<1/2$, а τ_n — положительные корни любого из уравнений $J_\nu(z)=0$, $Y_\nu(z)=0$ или $zJ_\nu'(z)+HJ_\nu(z)=0$, расположенные в порядке возрастания, по теореме 3 принадлежат $C^\infty(0,+\infty)$, за исключением $x\equiv0\pmod 2$ в случае первых двух рядов и $x\equiv1\pmod 2$ для сумм оставшихся рядов. Числа τ_n представимы в виде (3) с $\omega=\pi$ [8, с. 558]; для корней уравнения $zJ_\nu'(z)+HJ_\nu(z)=0$ оно получается методом Стокса [8, с. 554], а именно: при любом p имеем

$$\tau_n=n\pi+\nu\pi/2+\pi/4+\sum_{m=1}^{p}d_m(n\pi+\nu\pi/2+\pi/4)^{-2m+1}+O(n^{-2p-1}).$$

Замечание. Так как [8, с. 88] $H_\nu^{(1,2)}(z)=J_\nu(z)\pm iY_\nu(z)$, где $H_\nu^{(1,2)}(z)$ — функции Ханкеля, то теорема 3 верна и для сумм рядов по функциям Ханкеля.

Теорема 4. *Полагая*

$$U(x,t)=\Sigma c_n J_\nu(\beta_n x)e^{\pm i\beta_n t}\ \text{и}\ \tilde U(x,t)=\Sigma(-1)^n c_n J_\nu(\beta_n x)e^{\pm i\beta_n t},$$

при условиях теоремы 3 *и том же* h *имеем*

$$\partial^{r+j}U/\partial x^r\partial t^j,\quad \partial^{r+j}\tilde U/\partial x^r\partial t^j\in C\quad (x\in(0+\infty),\ t\in(-\infty,+\infty)),$$

где $r,j=0,1,2,\ldots,h$, $r+j\leqslant h$, *за исключением, может быть, значений* $x\pm t\equiv0\pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $U(x,t)$ *и* $x\pm t\equiv\pi/\omega\pmod{2\pi/\omega}$ *в случае* $\tilde U(x,t)$.

Эта теорема остается в силе, если вместо $J_\nu(\beta_n x)$ взять $Y_\nu(\beta_n x)$ или же $H_\nu^{(1,2)}(\beta_n x)$.

Пример. Решение краевой задачи (задача № 692 [1, с. 116])

$$U_{tt}=a^2(U_{rr}+r^{-1}U_r)+p_0/\rho,$$

$$U(r_0,t)=0,\quad 0<t<+\infty,\quad U(r,0)=U_t(r,0)=0,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,\tag{16}$$

дается рядом [1, с. 534]

$$U(r,t)=p_0/\rho a^2\left\{(r_0^2-r^2)/4-r_0^2\sum_1^\infty c_nJ_0(\tau_nr/r_0)\left(e^{ia\tau_nt/r_0}+e^{-ia\tau_nt/r_0}\right)\right\},$$

где $c_n=r_n^{-3}J_1^{-1}(\tau_n)$ и τ_n — корни уравнения $J_0(z)=0$. Можно показать, что

$$c_n=(-1)^{n-1}(\pi/2)^{1/2}(n\pi-\pi/4)^{-5/2}\left\{1+\sum_{m=1}^{p-1}\eta_m(n\pi-\pi/4)^{-2m}+O(n^{-2p})\right\},$$

где p — любое число. По теореме 4 $U(r,t)$ бесконечно дифференцируема по r и t, за возможным исключением значений

$$r/r_0\pm at/r_0\equiv1\pmod 2,\quad 0\leqslant r\leqslant r_0,\quad t>0. \tag{17}$$

Можно показать, что при значениях (17) U_{rr}, U_{tt} и U_{rt} обращаются в ∞. Краевой задачей (16) описываются колебания мембраны. Исключенные значения (17) образуют на поверхности мембраны подвижную окружность $r=r(t)$, движущуюся со скоростью a от края мембраны к ее центру. При $t=r_0/a$ она превращается в точку, сливаясь с центром мембраны, затем движется в обратном направлении и достигает края мембраны при $t==2r_0/a$, и т. д. Этот эффект — следствие нарушения согласования уравнения и начальных условий на границе мембраны.

4. Ряды по сферическим функциям. Дифференциальное уравнение

$$(1-z^2)\,d^2y/dz^2-2zdy/dz+[\nu(\nu+1)-\mu^2/(1-z^2)]\,y=0$$

для сферических функций $y=P_\nu^\mu(z)$ с помощью подстановки $U(\cos\theta)==\sqrt{\sin\theta}P_\nu^\mu(\cos\theta)$, $x=\cos\theta$, $0<\theta<\pi$, приводится к виду (2)

$$-d^2U/d\theta^2+\{q(\theta)-(\nu+1/2)^2\}\,U=0,$$

где $q(\theta)=(4\mu^2-1)(2\sin\theta)^{-1}$. При $\nu=\beta_n$ и $\theta=\pi/2$ $U(\cos\theta)$ и $(\beta_n+1/2)^{-1}dU(\cos\theta)/d\theta$ представимы в виде (13) с $\delta=\mu-1/2$ и при любом m. Следовательно, из теоремы 1′ вытекает теорема.

Теорема 5. *Если* $c_nn^{\mu-1/2}\to0$ *и при некотором* $k\geqslant1$ $\Sigma n^k|\Delta^{k+1}\times\times(c_nn^{\mu-1/2})|<\infty$, *то суммы рядов* $\Sigma c_nP_{\beta_n}^\mu(\cos\theta)$ и $\Sigma(-1)^nc_nP_{\beta_n}^\mu(\cos\theta)$ *имеют* $h=\min(k,s-2)$ *непрерывных производных по* $\theta\in(0,\pi)$, *за возможным исключением значений* $\theta\equiv0$ *и* $\theta\equiv\pi\pmod{2\pi/\omega}$ *в случае первого ряда и* $\theta\equiv\pi/\omega$ *и* $\theta\equiv\pi/\omega+\pi\pmod{2\pi/\omega}$ *в случае второго ряда, если они попадают в* $(0,\pi)$.

В частности, при $\beta_n\equiv n$ и $\mu=m$ мы имеем ряды по присоединенным функциям Лежандра. Для сумм этих рядов теорема 5 справедлива при $\theta\in\in(0,\pi)$ без исключения каких-либо точек, так как $\omega=1$.

Замечание. Для сумм рядов $\Sigma c_n\theta_{nm}(x)$ и $\Sigma(-1)^nc_n\theta_{nm}(x)$, где $\theta_{nm}=[((2n+1)/2)\,\Gamma(n-m+1)/\Gamma(n+m+1)]^{1/2}P_n^m(x)$ — ортонормированы на $[-1,1]$, теорема 5 справедлива в условиях $c_n=o(1)$ и $\Sigma n^k|\Delta^{k+1}c_n|<<\infty$, так как

$$[((2n+1)/\ )\,\Gamma(n-m+1)/\Gamma(n+m+1)]^{1/2}=n^{-m+1/2}\left\{1+\sum_{i=1}^{r-1}e_in^{-i}+O(n^{-r})\right\},$$

где r — любое число, и без исключения каких-либо точек из $(-1,1)$, так как $\omega=1$.

5. Ряды, содержащие собственные функции оператора Штурма — Лиувилля. Получим общую асимптотику для собственных значений краевой задачи Штурма—Лиувилля

$$-y''+q(x)\,y=\lambda y, \tag{18}$$

$$y(a)\cos\alpha+y'(a)\sin\alpha=0, \tag{19}$$

$$y(b)\cos\beta+y'(b)\sin\beta=0 \tag{20}$$

в предположении, что $q^{m-2}(x) \in C[a, b]$, $m \geqslant 2$, $q^{m-1}(x)$ ограничена и интегрируема на конечном $[a, b]$. При этом, не умаляя общности, можем считать $a = 0$ и $b = \pi$ [2, с. 12]. Полагая в (5) $x_0 = 0$, $U_n(0) = \sin\alpha$, $U_n'(0) = -\cos\alpha$ и $\beta_n = s$, получим решение уравнения (18), удовлетворяющее условию (19):

$$y = \sin\alpha \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(x)(2s)^{-k}\cos(sx + k\pi/2) - s^{-1}\cos\alpha \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k(x)\cdot(2s)^{-k} \times$$

$$\times \sin(sx + k\pi/2) + R(x). \tag{21}$$

Остаточный член $R(x)$ можно представить в виде

$$R(x) = M(x)\cos(sx) + N(x)\sin(sx), \tag{22}$$

где $M(x)$, $N(x) = O(s^{-m})\sin\alpha + O(s^{-m-1})\cos\alpha$ равномерно на $[0, \pi]$.

Выражение (21) с учетом (22) можно записать в виде

$$y = A(x)\cos(sx) + B(x)\sin(sx), \tag{23}$$

где

$$A(x) = \sin\alpha + (2s)^{-2}\{-\alpha_2(x)\sin\alpha - 2\beta_1(x)\cos\alpha\} + (2s)^{-4}\{\alpha_4(x)\sin\alpha +$$

$$+ 2\beta_3(x)\cos\alpha\} + \ldots + (-1)^{[(m+1)/2]-1}(2s)^{-2[(m+1)/2]+2}\{\alpha_{2[(m+1)/2]-2}(x)\sin\alpha +$$

$$+ 2\beta_{2[(m+1)/2]-3}(x)\cos\alpha\} + (-1)^{[(m+1)/2]}[1 + (-1)^m](2s)^{-m}\beta_{m-1}(x)\cos\alpha +$$

$$+ O(s^{-m})\sin\alpha + O(s^{-m-1})\cos\alpha, \tag{24}$$

$$B(x) = (2s)^{-1}\{-\alpha_1(x)\sin\alpha - 2\cos\alpha\} + (2s)^{-3}\{\alpha_3(x)\sin\alpha + 2\beta_2(x)\cos\alpha\} + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{[m/2]}(2s)^{-2[m/2]+1}\{\alpha_{2[m/2]-1}(x)\sin\alpha + 2\beta_{2[m/2]-2}(x)\cos\alpha\} +$$

$$+ (-1)^{[(m+1)/2]}[1 - (-1)^m](2s)^{-m}\beta_{m-1}(x)\cos\alpha + O(s^{-m})\sin\alpha +$$

$$+ O(s^{-m-1})\cos\alpha. \tag{25}$$

Если потребовать больше, а именно $q^{m-1}(x)$ ограничена и кусочно-монотонна на $[a, b]$, то справедливо (23), однако в (24) и (25) m следует заменить на $m + 1$.

Для y', где y — решение (21), имеем

$$y' = s\{B_1(x)\cos(sx) + A_1(x)\sin(sx)\}, \tag{26}$$

где $A_1(x)$ имеет вид $A(x)$, а $B_1(x)$ — вид $B(x)$, при этом $q^{m-1}(x)$ ограничена и интегрируема; если же она кусочно-монотонна, то в выражениях $A_1(x)$ и $B_1(x)$ следует m заменить на $m + 1$.

Потребуем, чтобы решение (23) удовлетворяло и второму краевому условию (20). Это, учитывая (26), приводит к соотношению $\operatorname{tg}(s\pi) = -[A(\pi) \times \cos\beta + sB_1(\pi)\sin\beta]/[B(\pi)\cos\beta + sA_1(\pi)\sin\beta]$. Отсюда следует существование бесконечного множества собственных значений $\lambda_n = s_n^2$, при этом 1) если $\operatorname{ctg}\alpha = -\eta \neq \infty$ $(\sin\alpha \neq 0)$ и $\operatorname{ctg}\beta = H \neq \infty$ $(\sin\beta \neq 0)$, либо $\eta = H = \infty$, то

$$s_n = n + c_1/n + c_2/n^3 + \ldots + c_{[m/2]}/n^{2[m/2]-1} + O(n^{-m}), \tag{27}$$

$$s_n = n + c_1/n + c_2/n^3 + \ldots + c_{[(m+1)/2]}/n^{2[(m+1)/2]-1} + O(n^{-m-1}) \tag{28}$$

в зависимости от того, ограничена $q^{(m-1)}(x)$ на $[0, \pi]$ или же ограничена и кусочно-монотонна; 2) если $\eta = \infty$ и $H \neq \infty$ либо $\eta \neq \infty$ и $H = \infty$, то

$$s_n = n + 1/2 + e_1 (n + 1/2)^{-1} + e_2 (n + 1/2)^{-3} + \ldots$$
$$\ldots + e_{[m/2]} (n + 1/2)^{-2[m/2]+1} + O(n^{-m}), \tag{29}$$

$$s_n = n + 1/2 + e_1 (n + 1/2)^{-1} + \ldots$$
$$\ldots + e_{[(m+1)/2]} (n + 1/\ )^{-2[(m+1)/2]+1} + O(n^{-m-1}) \tag{30}$$

соответственно.

Эти формулы в общем случае краевых условий (19) и (20), где a и b произвольны, получаются умножением правых частей (27)—(30) на $\pi/(b-a)$.

Отметим, что частные случаи формул (27)—(30), когда $m = 2$ и $q(x) \in C^2[a, b]$ известны [2, с. 22].

Подставив в (23) s_n вместо s согласно (27)—(30), нетрудно получить асимптотику собственных функций.

Нормирующий множитель для собственных функций имеет вид $(\sin\alpha)^{-1} \sqrt{2/\pi}\{1 + a_1 n^{-2} + a_2 n^{-4} + \ldots + O(n^{-m})\}$ или $\sqrt{2/\pi} n\{1 + b_1 n^{-1} + b_2 n^{-2} + \ldots + O(n^{-m})\}$ в зависимости от условия $\eta \neq \infty$ или $\eta = \infty$.

Рассмотрим дифференциальные свойства сумм рядов. Поскольку собственные значения задачи (18)—(20) имеют вид β_n (см. (3)), то ряды по собственным функциям краевой задачи Штурма—Лиувилля являются частными случаями рядов (1). Теоремы 1 и 2 применительно к этим рядам формулируются так.

Теорема 6. *Пусть $q^{(m-2)}(x)$ непрерывна, а $q^{(m-1)}(x)$ ограничена и интегрируема на $[a, b]$, $c_n = o(1)$ и при некотором $k \geqslant 1$ $\Sigma n^k|\Delta^{k+1} c_n| < \infty$. Тогда если $\eta \neq \infty$, то суммы $\Sigma c_n \Phi_n(x)$ и $\Sigma(-1)^n c_n \Phi_n(x)$, где $\Phi_n(x)$ — собственные функции краевой задачи (18) — (20), имеют $h = \min(k, m-2)$ непрерывных производных при $x \in D^{(m-2+h)}$, за возможным исключением значений $x = a$ (в случае первого ряда) и $x = b$ (в случае второго ряда). Если $q^{(m-1)}(x)$ кусочно-монотонна на $[a, b]$, то $h = \min(k, m-1)$. Если же $\eta = \infty$, то $h = \min(k, m-1)$ либо $h = \min(k, m)$ в соответствии с указанными свойствами $q^{(m-1)}(x)$.*

Теорема 7. *Полагая*

$$U(x, t) = \Sigma c_n \Phi_n(x) e^{\pm i s_n t} \quad \text{и} \quad \tilde{U}(x, t) = \Sigma(-1)^n c_n \Phi_n(x) e^{\pm i s_n t},$$

где $\lambda_n = s_n^2$ — собственные значения, а $\Phi_n(x)$ — собственные функции задачи (18) — (20), в условиях теоремы 6 при тех же h имеем

$$\partial^{r+j} U/\partial x^r \partial t^j,\ \partial^{r+j} \tilde{U}/\partial x^r \partial t^j \in C(x \in D^{(m-2+r)},\ t \in (-\infty, +\infty)),$$

где $r, j = 0, 1, 2, \ldots, h$, $r + j \leqslant h$, за возможным исключением значений $x \pm t \equiv a \pmod{2(b-a)}$ в случае U и $x \pm t \equiv b \pmod{2(b-a)}$ в случае $\tilde{U}$.

Теоремы 6 и 7 остаются в силе, если $\Phi_n(x)$ ортонормированы на $[a, b]$, однако $h = \min(k, m-2)$ или $h = \min(k, m-1)$ при всех η.

Замечание. На основе (23) с учетом (24) и (25) заключаем, что теоремы 6 и 7 при $\eta = \infty$ справедливы и в том случае, когда $c_n n^{-1} = o(1)$ и $\Sigma n^k |\Delta^{k+1}(c_n n^{-1})| < \infty$, однако $h = \min(k, m-2)$ или $h = \min(k, m-1)$ соответственно.

Пример. Решение краевой задачи (задача № 109 [1, с. 33])

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\ U_x(0, t) = 0,\ U_x(l, t) + HU(l, t) = 0,\ t > 0,$$
$$U(x, 0) = F_0 (ES)^{-1} x,\ U_t(x, 0) = 0,\ 0 < x < l,$$

дается рядом [1, с. 2 1]

$$U(x, t) = F_0 (ES)^{-1} \sum_1^\infty c_n \Phi_n(x) (e^{i s_n a t} + e^{-i s_n a t}),$$

где $\Phi_n(x) = \cos(s_n x)$ — собственные функции, s_n^2 — собственные значения краевой задачи $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$, $\Phi'(0) = 0$, $\Phi'(l) + H\Phi(l) = 0$, $0 < x < l$, $c_n = \{(-1)^n (1 + Hl) s_n^{-2} (1 + H^2 s_n^{-2})^{-1/2} - s_n^{-2}\} [l + H/(s_n^2 + H^2)]^{-1} = (-1)^n c_n' - c_n''$, если $H \leqslant 0$; при $H > 0$ $c_n = (-1)^{n-1} c_n' - c_n''$ (в ответе [1, с. 221] пропущен знак $(-1)^n$ при c_n'). В соответствии с таким представлением c_n имеем $U(x, t) = \tilde{U}^{(1)}(x, t) - U^{(2)}(x, t)$.

Числа s_n, как показано выше, имеют вид (27), каждый член которого надо умножить на π/l, при этом m — любое, так как $q(x) \equiv 0 \in C^\infty [0, l]$ С учетом этого $c_n = (c_n', c_n'')$ представимы в виде $c_n = d_1 n^{-2} + d_2 n^{-4} + \ldots$ $\ldots + O(n^{-p})$, где p — любое число. Следовательно, (c_n) удовлетворяет условиям $c_n = o(1)$ и $\Sigma n^k |\Delta^{k+1} c_n| < \infty$ при любом k. По теореме 7 $\partial^{r+j} u / \partial x^r \partial t^j \in C(x \in (0, l), t > 0)$ при любых r, $j = 0, 1, \ldots$, за исключением значений $x \pm at \equiv 0 \pmod l$ или

$$at = kl \pm x,\ k = 0, 1, 2, \ldots, 0 < x < l,\ t > 0. \tag{31}$$

Можно показать, что при значениях (31) с четными k $U_x^{(2)}$ и $U_t^{(2)}$ терпят конечные разрывы, а при нечетных k конечные разрывы терпят $\tilde{U}_x^{(1)}$ и $\tilde{U}_t^{(1)}$; величина скачка равна $-F_0/ES$ для $U_x^{(2)}$ и $-F_0(1 + Hl)/ES$ для $\tilde{U}_x^{(1)}$ (скачки $U_t^{(2)}$ и $\tilde{U}_t^{(1)}$ отличаются множителем a). Это является следствием несогласованности начально-краевых условий на концах $x = 0$ и $x = l$. Если $1 + Hl = 0$, то при $x = l$ указанные условия согласованы.

1. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. И.* Сборник задач по математической физике.— М. : Изд-во техн.-теор. лит., 1956.— 683 с.
2. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию.— М. : Наука, 1970.— 671 с.
3. *Стеклов В.А.* Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их приложении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям.— Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1956.— 138 с.
4. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.— М : Наука, 1979.— 415 с.
5. *Пак И. Н.* О рядах по функциям-решениям одного класса линейных дифференциальных уравнений.— В кн.: Дифференц. уравнения. Сб. трудов мат. каф. пединститутов РСФСР. Рязань, 1975, вып. 5, с. 165—176.
6. *Пак И. Н.* О суммах тригонометрических рядов.— Успехи мат. наук, 1980, 35, вып. 2, с. 91—144.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. Б.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1978.— 736 с.
8. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1.— М. : Изд-во иностр. лит., 1949.—799 с.

Ленинград. электротехн. ин-т связи

Поступила в редакцию 20.07.82