УДК 517.946

С. Н. Самборский

Коэрцитивные граничные задачи для переопределенных систем (эллиптические задачи)

1. Пусть E_i, F_i — эрмитовы векторные расслоения над многообразием M с границей Γ и G_i, H_i — векторные расслоения над Γ (все объекты — класса C^∞). $\mathcal{E}(\cdot)$ — пространство гладких сечений соответствующего расслоения. Дифференциальный оператор $A : \mathcal{E}(E_0) \to \mathcal{E}(E_1)$ задается отображением $p(A)$: $J^k(E_0) \to E_1$ из расслоения k-струй $J^k(E_0)$ в E_1 правилом $A = p(A)j^k$, где $j^k:\mathcal{E}(E_0) \to \mathcal{E}(J^k(E_0))$ — отображение, сопоставляющее сечению его k-струю [1]. Оператор A называется достаточно регулярным (соответственно формально интегрируемым), если все множества $R_{k+l} = \operatorname{Ker} p(j^l A)$ при $l \geqslant 0$ — подрасслоения расслоений $J^{k+l}(E_0)$ и отображения $\pi:R_{k+l} \to R_{k+l-1}$, индуцированные проекциями $\pi:J^{k+l}(E_0) \to J^{k+l-1}(E_0)$, сопоставляющими $k+l$-струе сечения его $k+l-1$-струю,—постоянного ранга (соответственно сюръекции) [1].

Определение 1. *Дифференциально-граничным* (д.-г.) *оператором из* $\mathscr{E}(E_0)\times\mathscr{E}(G_0)$ *в* $\mathscr{E}(E_1)\times\mathscr{E}(G_1)$ *назовем отображение вида* $\psi(f, g)=(\psi^{11}f, \psi^{21}f+\psi^{22}g)$, *где* $\psi^{11}:\mathscr{E}(E_0)\to\mathscr{E}(E_1)$ *и* $\psi^{22}:\mathscr{E}(G_0)\to\mathscr{E}(G_1)$ — *дифференциальные, а* $\psi^{21}:\mathscr{E}(E_0)\to\mathscr{E}(G_1)$ — *граничные операторы. Если* $G_0=0$, *то оператор* $f\to(Af, Bf)$ *назовем оператором краевой задачи.*

При фиксированном M пространства вида $\mathscr{E}(E)\times\mathscr{E}(G)$ и д.-г. операторы образуют категорию $\mathfrak{A}(M)$.

Определение 2. *Два оператора граничных задач* $\alpha:\mathscr{E}(E_0)\to\mathscr{E}(E_1)\times\times\mathscr{E}(G_1)$ и $\alpha':\mathscr{E}(F_0)\to\mathscr{E}(F_1)\times\mathscr{E}(H_1)$ *назовем эквивалентными, если коцепно эквивалентны* [2] *комплексы* $0\to\mathscr{E}(E_0)\xrightarrow{\alpha}\mathscr{E}(E_1)\times\mathscr{E}(G_1)$, $0\to\mathscr{E}(F_0)\xrightarrow{\alpha'}\mathscr{E}(F_1)\times\times\mathscr{E}(H_1)$ (*все участвующие в определении эквивалентности отображения из категории* $\mathfrak{A}(M)$).

Определение 3. *Д.-г. оператор* $\Phi:\mathscr{E}(E_0)\times\mathscr{E}(G_0)\to\mathscr{E}(E_1)\times\mathscr{E}(G_1)$ *назовем нормализованным, если* Φ^{11} — *формально интегрируемый инволютивный* [1] *дифференциальный оператор первого порядка с эпиморфным символом* [1] $\sigma(A): T^*M\otimes E_0\to E_1$, *а граничный оператор* Φ^{21} *содержит дифференцирования лишь в направлениях, касательных к границе.*

Конструкция 1. Пусть A — достаточно регулярный оператор и P — такой дифференциальный оператор, что (A, PA) формально интегрируем. Пусть $A'=j^l(A, PA)$, где l таково, что оператор A' инволютивен [1] и порядок k оператора A' выше поряда оператора B. Пусть оператор первого порядка $D_1:\mathscr{E}(J^{k-1}(E_0))\to\mathscr{E}((C_1^{k-1}(E_0))$ — оператор совместности оператора j^{k-1} [1] и $\overline{A}$, $\overline{B}$ — такие операторы, что $A'=\overline{A}j^{k-1}$ и $B=\overline{B}j^{k-1}$. Рассмотрим оператор $(A'', B''):\mathscr{E}(J^{k-1}(E_0))=\mathscr{E}(E_0'')\to\mathscr{E}(E_1\oplus C_1^{k-1}(E_0))\times\mathscr{E}(G_1)==\mathscr{E}(E_1'')\times\mathscr{E}(G_1)$, определенный правилом $(A'', B'')f=(\overline{A}f, D_1f, \overline{B}f)$, и пусть $A''f=(A_1''f, A_2''f)$, где оператор A_2'' нулевого порядка и символ оператора A_1'' сюръективен. Положим $\tilde{E}_0=\operatorname{Ker}A_2''$ и $\tilde{E}_1=\operatorname{Im}p(A_1'')J^1(\tilde{E}_0)$. Тогда сужения операторов A_1'' и B'' на $\tilde{E}_0$ определяют оператор $(\tilde{A}, \tilde{B}):\mathscr{E}(\tilde{E}_0)\to\mathscr{E}(\tilde{E}_1)\times\times\mathscr{E}(\tilde{G}_1)$, где $\tilde{G}_1=G_1$.

Поскольку переход к первому порядку и сюръективному символу не нарушает формальной интегрируемости, то справедливо следующее предложение.

Предложение 1. *Если оператор* A *достаточно регулярен, то оператор* $(\tilde{A}, \tilde{B})$ *нормализован.*

Сосредоточим внимание на нормализованных д.-г. операторах. Для дифференциального оператора первого порядка A определим дифференциальный оператор A^t (касательную часть оператора A), действующий в сечениях расслоений над Γ, следующим образом. Вложение ζ границы Γ в M определяет отображение расслоений $\zeta':J^1(E_0|_\Gamma)\to J^1(E_0)|_\Gamma$. Пусть p' — такое отображение $J^1(E_0|_\Gamma)\to E_1/p(A)\operatorname{Ker}\zeta'$, что $p'\zeta'=\Pr p(A)$, где $\Pr$ — проекция $E_1\to E_1/p(A)\operatorname{Ker}\zeta'$. Тогда p' определяет дифференциальный оператор A^t такой, что $p(A^t)=p'$. Конструкция 2. Пусть Φ — нормализованный д.-г. оператор, $\Phi^{21}y=\overline{\Phi}^{21}\gamma y=\gamma\overline{\Phi}^{21}y$, где $\overline{\Phi}^{21}$ — дифференциальный оператор и γ — оператор сужения сечений на границу. Пусть Φ_1^{11} и Θ_1' — операторы совместности [1] дифференциальных операторов Φ^{11} и $\Theta:(\overline{f}, g)\to\to(A^t\overline{f}, \overline{\Phi}^{21}\overline{f}+\Phi^{22}g)$.

Тогда оператор Θ_1' будет иметь вид $\Theta_1'(f_1, g_1)=A_1^t(f_1, j^m\Theta_1(f_1, g_1))$, где A_1^t — оператор совместности для A^t. Положим $\Phi_1(f_1, g_1)=(\Phi_1^{\ 1}f_1, \Theta_1(\Pr f_1, g_1))$.

Назовем Φ_1 оператором совместности оператора Φ. Этот оператор нормализован, поэтому, применяя к нему конструкцию 2 и далее поступая аналогично, получаем комплекс

$$\mathscr{E}(E_0)\xrightarrow{(A,B)}\mathscr{E}(E_1)\times\mathscr{E}(G_1)\xrightarrow{\Phi_1}\mathscr{E}(E_2)\times\mathscr{E}(G_2)\xrightarrow{\Phi_2}\ldots\to 0. \tag{1}$$

Условие 1. Нормализованный оператор (A, B) удовлетворяет этому условию, если достаточно регулярен оператор Θ.

Условие 2. Оператор (A, B) удовлетворяет условию 2, если оператор A достаточно регулярен и удовлетворяет условию 1 нормализованный оператор $(\tilde{A}, \tilde{B})$, получаемый из $(\tilde{A}, \tilde{B})$ конструкцией 1.

Заметим, что проверка условия 2 проводится в конечное число шагов. Условие 2 — условие типа «невырожденности» коэффициентов операторов.

Предложение 2. *Если оператор краевой задачи (A, B) удовлетворяет условию 2, то в конечное число шагов может быть построен комплекс*

$$0 \to \mathscr{E}(E_0) \xrightarrow{(A,B)} \mathscr{E}(E_1) \times \mathscr{E}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} \mathscr{E}(E_2) \times \mathscr{E}(G_2), \tag{2}$$

коцепно эквивалентный комплексу совместности нормализованного оператора $(\tilde{A}, \tilde{B})$ (в частности, операторы (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ эквивалентны). Комплекс (2) обладает следующим свойством: если ψ — такой оператор, что $\psi(A, B) = 0$, то найдется такой д.-г. оператор K, что $\psi = K\Phi_1$.

Доказательство. Укажем явные формулы для построения оператора Φ_1 из (2) в несколько шагов. Проверка коцепной эквивалентности на каждом шаге не сложна и подробно приведена в [3]. Пусть комплекс (1) построен по оператору $(\tilde{A}, \tilde{B})$. Используем обозначения из конструкции 1. Благодаря формальной интегрируемости оператора A'' можно считать (применяя при необходимости изоморфизмы к расслоениям E_i''), что оператор действует в некоторых расщеплениях $E_0'' = \tilde{E}_0 \oplus \tilde{E}_0'$ и $E_1'' = \tilde{E}_1 \oplus J^1(\tilde{E}_0')$, причем компонента оператора A'', действующая из $\tilde{E}_0'$ в $J^1(\tilde{E}_0')$—оператор j^1. Обозначим расслоения $\tilde{E}_i \times C_{i-1}^1$ при $i \geqslant 1$ через E_i''. Определим оператор $\Phi_1'': \mathscr{E}(E_1'') \times \mathscr{E}(G_1'') \to \mathscr{E}(E_2'')\,\mathscr{E}(G_1'')$ правилом

$$\Phi_1'': \mathscr{E}(\tilde{E}_1 \times J^1(E_0')) \times \mathscr{E}(\tilde{G}_1) \ni (f, h, g) \to (\tilde{\Phi}_1(f - AQ_1h,\ g - \tilde{B}Q_1h),$$

$$D_1h) \in \mathscr{E}(\tilde{E}_2) \times \mathscr{E}(G_2) \times \mathscr{E}(C_1^1) = \mathscr{E}(E_2'') \times \mathscr{E}(G_2''), \tag{3}$$

где $D_1: \mathscr{E}(J^1(E_1)) \to \mathscr{E}(C_1^1)$ — оператор из комплекса совместности для оператора j^1 и Q_1 таков, что $Q_1D_1 = j^1\pi - Id$. Имеем комплекс

$$0 \to \mathscr{E}(E_0'') \xrightarrow{\Phi_0''=(A'',B'')} \mathscr{E}(E_1'') \times \mathscr{E}(G_1'') \xrightarrow{\Phi_1''} \mathscr{E}(E_2'') \times \mathscr{E}(G_2''), \tag{4}$$

коцепно эквивалентный комплексу (1). Расслоения E_i'' в комплексе (4) раскладываются в прямые суммы $E_i'' = E_i' \oplus C_i^{k-1}$ при $i \geqslant 1$ и $E_0'' = J^{k-1}(E_0')$ при $i = 0$. Используем эти разложения для определения оператора $\Phi_1': \mathscr{E}(E_1') \times \times \mathscr{E}(G_1') \to \mathscr{E}(E_2') \times \mathscr{E}(G_2')$ правилом

$$\Phi_1'(f, g) = \mu_2\Phi_1''(f, 0, g), \tag{5}$$

где μ_2 — отображение сечений, индуцированное проекцией $E_2' \times C_1^{k-1}(E_0') \to E_2'$. Возникает комплекс

$$0 \to \mathscr{E}(E_0') \xrightarrow{\Phi_0=(A,\tilde{B})} \mathscr{E}(E_1') \times \mathscr{E}(G_1') \xrightarrow{\Phi_1'} \mathscr{E}(E_1') \times \mathscr{E}(G_2'), \tag{6}$$

коцепно эквивалентный комплексу (4).

Дифференциальный оператор A' согласно конструкции 1 имеет вид $j^l(A, PA)$. Положим

$$\Phi_1(f, g) = \Phi_1(j^lf,\ j^lPf,\ g), \tag{7}$$

где $(f, g) \in \mathscr{E}(E_1) \times \mathscr{E}(G_1)$.

Определение 4. *Комплекс (2), получаемый из комплекса совместности (1) для нормализованного оператора $(\tilde{A}, \tilde{B})$ с помощью формул (3), (5), (7), назовем комплексом совместности оператора краевой задачи (A, B).*

2. Обозначим через C компоненту Φ_1^{22} операторов Φ_1 из комплекса (2). Пусть $\eta \in T_x^* \Gamma$. Для каждого из операторов A, B, C через $A^0(x, \eta)$ обозначим обыкновенный дифференциальный оператор на полуоси, через $B^0(x, \eta)$ — граничный оператор на полуоси и через $C^0(x, \eta)$ — матрицу, получаемые локально в координатах $(x_1, \ldots, x_n)$, для которых граница Γ описывается уравнением $x_n = 0$, фиксацией коэффициентов в точке x, заменой — $i\partial/\partial x_j$ на η_j и отбрасыванием членов младшего порядка. При этом «старший порядок» определяется: для оператора A его порядком; для оператора $B = (B_1, \ldots, B_r) : \mathcal{E}(E_0) \to \mathcal{E}(\oplus G_1^j)$ старшим порядком β_1^j каждого из операторов B_j; для оператора C мультииндексом $\beta_1 = \{\beta_1^j\}$ и заранее заданным мультииндексом $\beta_2 = \{\beta_1^j\}$ (по Дуглису—Ниренбергу).

Обозначим через $H^s(E)$ гильбертово пространство Соболева сечений эрмитова расслоения E над многообразием с мерой M. Если $E = \oplus E^j$ и $T = \{t^j\}$ — мультииндекс, то положим $H^T(E) = \oplus H^{t^j}(E^j)$. Обозначим через $\mathfrak{M}_+$ множество функций на полуоси, стремящихся к нулю на бесконечности.

Предположим, что в комплексе соболевских пространств

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{(A,B)} H^{s-1}(E_1) \times H^{s-1/2}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} H^{s-2}(E_2) \times H^{s-\beta_2}(G_2), \quad (8)$$

нидуцированном комплексом (1), все отображения ограничены.

Теорема 1. *Пусть $(A, B) : \mathcal{E}(E_0) \to \mathcal{E}(E_1) \times \mathcal{E}(G_1)$ — нормализованный оператор граничной задачи, удовлетворяющий условию 1, и B — оператор нулевого порядка. Пусть д-г. оператор $\Phi_1 : \mathcal{E}(E_1) \times \mathcal{E}(G_1) \to \mathcal{E}(E_2) \times \mathcal{E}(G_2)$ — оператор совместности для оператора (A, B) и имеется разложение $G_2 = \oplus G_2^j$ расслоения G_2 и мультииндекс β_2; $\dim \operatorname{Ker} A^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+$ не зависит от $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, и в случае $\dim M = 2$ оператор A собственно эллиптичен. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *при каждых $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, точен комплекс*

$$0 \to \operatorname{Ker} A^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+ \xrightarrow{B_0(x,\eta)} G_1 \xrightarrow{C^0(x,\eta)} G_2 \quad (9)$$

и оператор A эллиптичен;

2) *когомологии комплекса* (8) *конечномерны.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2).

Определение 5 [4]. *Дифференциальный оператор $A : \mathcal{E}(E_0) \to \mathcal{E}(E_1)$ называется оператором с постоянным дефектом, если $\dim \operatorname{Ker} \sigma_\xi(x, A)$ не зависит от $x \in M$, $\xi \in T_x^*M$, $\xi \neq 0$, где $\sigma_\xi(x, A) : E_0|_x \to E_1|_x$ — символ оператора A в точке x на ковекторе ξ.*

Утверждение 1. *Касательная часть A^t оператора A имеет постоянный дефект.*

Доказательство. Из эллиптичности оператора A и точности комплекса (9) вытекает, что число $m = \dim \operatorname{Ker} A^0(x, \eta)$ не зависит от $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$. Запишем оператор A в форме

$$Ay = (\partial y/\partial x_n + L_y, \ My), \quad (10)$$

где операторы L и M не содержат $\partial/\partial x_n$ и при $x_n = 0$ оператор M совпадает с оператором A^t (здесь $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальная система координат, в которой $\Gamma = \{x \mid x_n = 0\}$ [5]). Пусть $\eta \in T_x^*\Gamma$. Можно считать, что координаты $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ таковы, что $\eta = (\eta_1, 0, \ldots, 0)$. Выберем разложение $Y = Y^+(\eta) \oplus Y^-(\eta)$ так, чтобы отображение $\sigma_\eta(x, A)$ имело вид $(y^+, y^-) \to (\eta_1 y^+, 0)$. Тогда система $A^0(x, \eta) y = 0$ превратится в систему $dy/dt + \sigma_\xi(x, L) y = 0$, $\eta_1 y^+ = 0$, эквивалентную при $\eta \neq 0$ системе $dy^-/dt + L'_\eta y^- = 0$ с некоторой матрицей L'_η. Поскольку число решений последней системы не зависит от η, то и число $\dim Y^+(\eta) = \dim Y - m$ также не зависит от $\eta \neq 0$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. *При каждых $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, точен комплекс*

$$H^s(R_+, E_0|_x) \xrightarrow{A^0(x,\eta)} H^{s-1}(R_+, E_1|_x) \xrightarrow{(\Phi_1^{11})^0(x,\eta)} H^{s-2}(R_+, E_2|_x) \qquad (11)$$

пространств функций на полуоси со значениями в слоях над x расслоений E_i и обыкновенных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Доказательство. Воспользуемся локальной формой (10) оператора A. При переходе к оператору $A^0(x, \eta)$ получаем $A^0(x, \eta) = (dy/dt + L_\eta y, M_\eta y)$. Пусть $F_\eta = \operatorname{Ker} M_\eta \subseteq Y$. Из утверждения 1 следует, что $\dim F_\eta$ не зависит от η при $\eta \neq 0$. Из коммутационных соотношений Гийемина [1] вытекает, что оператор $d/dt + L_\eta$ переводит $\mathcal{E}(F_\eta)$ в $\mathcal{E}(F_\eta)$. Тогда точность комплекса (11) эквивалентна изоморфности отображения

$$d/dt + L_\eta : H^s(R_+, F_\eta) \to H^{s-1}(R_+, F_\eta)$$

и легко следует из эллиптичности A с помощью преобразований Фурье ввиду того, что комплекс

$$0 \to E_0|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x,A)} E_1|_x \xrightarrow{\sigma_\xi(x,\Phi_1^{11})} E_2|_x \qquad (12)$$

точен при $\xi \neq 0$ [1]. Утверждение доказано.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 & 0 & & 0 & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & H^s(R_+, E_0|_x)/\operatorname{Ker} A^0(x,\eta) \cap \mathfrak{M}_+ & \xrightarrow{A^0(x,\eta)} & H^{s-1}(R_+, E_1|_x) & \to \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & H^s(R_+, E_0|_x) & \xrightarrow{(A^0(x,\eta), B^0(x,\eta))} & H^{s-1}(R_+, E_1|_x) \times G_1 & \to \dots \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
0 \to & \operatorname{Ker} A^0(x,\eta) \cap \mathfrak{M}_+ & \xrightarrow{B^0(x,\eta)} & G_1 & \xrightarrow{C^0(x,\eta)} \cdots, \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 & 0 & & 0 &
\end{array} \qquad (13)$$

в которой столбцы — вложения и проекции. Крайние строки этой диаграммы точны при $\eta \neq 0$ ввиду предположений теоремы и утверждения 2). Поэтому точна и средняя строка. Из точности средней строки и точности комплекса (11) при $\varepsilon \neq 0$ вытекает, что лапласианы $(A, B)^*(A, B)$ и $(A, B) \times \times (A, B)^* + \Phi_1^* \Phi_1$ комплекса (9) удовлетворяют уловиям теоремы 1.4 из [6] и их ядра конечномерны (звездочка обозначает сопряженный оператор). Следовательно, конечномерны и когомологии комплекса (8).

Импликация 2)⇒1). Из конечномерности $\operatorname{Ker}(A, B)$ вытекает эллиптичность оператора A [7] и, ввиду предположения теоремы о постоянстве $\dim \operatorname{Ker} A^0(x, \eta)$ и утверждения 2, получаем точность верхней строки диаграммы (13). Поскольку из утверждения 2) теоремы, пользуясь лапласианами комплекса (8), получаем точность средней строки [6], то точна и нижняя строка диаграммы (13). Теорема доказана.

Предположим, что в комплексе соболевских пространств

$$0 \to H^s(E_0) \xrightarrow{(A, B)} H^{s-k}(E_1) \times H^{s-\beta_1}(G_1) \xrightarrow{\Phi_1} H^{s-k'}(E_2) \times H^{s-\beta_2}(G_2), \quad (14)$$

индуцированном комплексом (2), все отображения ограничены, $k = \operatorname{ord} A$.

Теорема 2. *Пусть (A, B) — оператор граничной задачи, удовлетворяющий условию 2, оператор A формально интегрируем; разложения $G_1 = \oplus G_1^j$ и $G_2 = \oplus G_2^j$ и мультииндексы β_1 и β_2 таковы, что выполняется условие коэрцитивности: при $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$, точен комплекс*

$$0 \to \operatorname{Ker} A^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+ \xrightarrow{B^0(x,\eta)} G_1|_x \xrightarrow{C^0(x,\eta)} G_2|_x.$$

Тогда, если оператор A эллиптичен и $\dim \operatorname{Ker} A^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+$ *не зависит от* $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^* \Gamma$, $\eta \neq 0$, *то когомологии комплекса* (14) *конечномерны.*

Доказательство. Заменим оператор граничной задачи (A, B) эквивалентным ему (в смысле определения 2) нормализованным оператором $(\tilde{A}, \tilde{B})$ с оператором $\tilde{B}$ нулевого порядка (согласно конструкции 1). Произведем «подправку» граничных условий так, чтобы для $(\tilde{A}, \tilde{B})$ выполнялись условия утверждения 1) из теоремы 1, а затем, используя эквивалентность операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ и коцепные эквивалентности из предложения 2, получим утверждение теоремы. Сначала опишем упомянутую подправку в локальных координатах. Пусть $J^{k-1}(E_0) = M \times Y \times X^* \otimes Y \times \ldots \ldots \times S^{k-1} X^* \otimes Y$ и в M имеются координаты $(x_1, \ldots, x_n)$, причем $\Gamma = \{x \mid x_n = 0\}$. Обозначая элементы из $J^{k-1}(E_0)$ через $(y, u^1, u^2, \ldots, u^{k-1})$, где $u^i \in S^i X^* \otimes Y$, запишем отображение $\tilde{B} : J^{k-1}(E_0) \to \tilde{G}_1$ в расщеплении $G_1 = \oplus G_1^j$ в виде $(y, u^1, \ldots, u^{k-1}) \to (b_0(x, y), b_1(x, y, u^1), \ldots, b_{k-1}(x, y, u^1, \ldots \ldots, u^{k-1})$, где отображения $(x, u^i) \to b_i(x, 0, \ldots, 0, u^i) \in G_1^i|_x$ сюръективны. Запишем дифференциальный оператор $(x, y, u^1, \ldots, u^{k-1}) \to (b_0(x, y), D'b_0(x, y), \ldots, D'^{k-1} b_0(x, y), b_1(x, y, u^1), \ldots, D'^{k-2} b_1(x, y, u^1), \ldots, b_{k-2}(x, y, \ldots \ldots, u^{k-2}), D'b_{k-2}(x, y, \ldots, u^{k-2}), b_{k-1}(x, y, \ldots, u^{k-1})$, где $D' = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_{n-1})$. В этом операторе сделаем замены $Dy = u^1$, $Du^1 = u^2, \ldots, Du^{k-2} = u^{k-1}$, после чего он превратится в оператор нулевого порядка из $\mathscr{E}(J^{k-1} \times (E_0))$ в $\mathscr{E}(\oplus_j J^{k-1-1}(G_1^j))$, который обозначим $\tilde{B}'$.

Пусть выполняется условие коэрцитивности. При переходе к нормализованному оператору $(\tilde{A}, \tilde{B})$ меняется главная часть операторов A и B. Нетрудно показать, что при этом пространство $\operatorname{Ker} A^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+$ остается изоморфным пространству $\operatorname{Ker} \tilde{A}^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+$. Благодаря описанной подправке граничного оператора $\tilde{B}$ при которой оказывающиеся нулевыми на $\operatorname{Ker} \tilde{A}^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+$ отображения $b_0, \ldots, b_{k-2}$ были подняты до ненулевых, становится точным комплекс

$$0 \to \operatorname{Ker} \tilde{A}^0(x, \eta) \cap \mathfrak{M}_+ \xrightarrow{\tilde{B}'^0(x,\eta)} \bigoplus_{j=0}^{k-1} J^{k-j-1}(G_1^j)|_x \xrightarrow{\tilde{C}^0(x,\eta)} \tilde{G}_2|_x, \tag{15}$$

где $\tilde{C}$ — дифференциальный оператор в расслоениях над Γ, выражающий дифференциальные условия совместности $\tilde{C}g' = 0$ для разрешимости системы $\tilde{A}y = 0$, $\tilde{B}'y = g'$. Оператор $\tilde{C}$, ввиду конструкции оператора $\tilde{B}'$, легко получается из оператора C добавлением условий совместности, возникающих при переходе от $\tilde{B}$ к $\tilde{B}'$ и выражающихся через операторы совместности для операторов j^{k-j-1} [1]. Из явного вида этих операторов и условия коэрцитивности следует точность комплекса (15) при $x \in \Gamma$, $\eta \in T_x^*\Gamma$, $\eta \neq 0$. Пользуясь теоремой 1, получаем конечномерность когомологий комплекса соболевских пространств для оператора $(\tilde{A}, \tilde{B})$, а затем из эквивалентности операторов (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$ и явных выражений (3), (5), (7) для операторов совместности получаем комплекс (14) с конечномерными когомологиями. Теорема доказана.

1. *Спенсер Д.* Переопределенные системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных.— Математика, 1970, 14, № 2, с. 66—90.
2. *Маклейн С.* Гомология.— М. : Мир, 1966.— 544 с.
3. *Самборский С. Н.* Краевые задачи для переопределенных систем уравнений с частными производными.— Киев, 1981.— 44 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики ; 81.48)
4. *Солонников В. А.* О краевых задачах для систем с постоянным дефектом.— Тр. семинара С. Л. Соболева Ин-та мат. Сиб. отд-ния АН СССР. Новосибирск, 1976, № 2, с. 109—128.

5. *Самборский С. Н.* О постановках задач для переопределенных систем уравнений с частными производными.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 1, с. 18—21.
6. *Schulze B.-W.* Adjungierte elliptisher Randwert—Probleme und Anwendungen auf über— und unterbestimmte Systeme.— Math. Nachr., 1979, **89**, S. 225—245.
7. *Солонников В. А.* О переопределенных эллиптических краевых задачах.— Докл. АН СССР, 1971, **199**, № 2, с. 279—281.

Киев. политехн. ин-т

Поступила в редакцию 16.11.82