УДК 519.21

М. И. Марушин, В. П. Криворуков

Несколько замечаний о центральной предельной теореме теории моментов четного порядка для сумм случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин

Пусть $\{x_k,\ k \geqslant 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $a = Mx_k$, $\sigma^2 = Dx_k < \infty$, $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Пусть $\{\nu_n\}$ — последовательность целочисленных положительных случайных величин с $\alpha_n = M\nu_n$ и $\beta_n^2 = D\nu_n < \infty$. Предположим, что последовательности $\{x_k\}$ и $\{\nu_n\}$ взаимно независимы. Обозначим $\sigma_n^2 = \alpha_n\sigma^2$, $\overline{S}_{\nu_n} = (S_{\nu_n} - MS_{\nu_n})/\sigma_n$, $\Phi_n(x) = P(\overline{S}_{\nu_n} < x)$, $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \times \int\limits_{-\infty}^{x} \exp(-u^2/2)\,du$. Если

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^2/\sigma_n^2 = 0, \tag{1}$$

то из результатов статьи [1] следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x). \tag{2}$$

В связи с этим возникает ряд вопросов. Во-первых, можно ли ослабить ограничение (1)? Во-вторых, при каких обстоятельствах (1) не только достаточное, но и необходимое условие применимости нормального закона к сумме $\overline{S}_{\nu_n}$? В-третьих, когда моменты $\overline{S}_{\nu_n}$ до некоторого порядка асимптотически нормальные?

Ответы на эти вопросы дают теоремы 1—3.

Введем определение.

Определение. *Условимся говорить, что к сумме S_{ν_n} применима центральная предельная теорема теории моментов порядка $l \geqslant 0$, если вместе с (2) соблюдается равенство*

$$\lim_{n\to\infty} M|\overline{S}_{\nu_n}|^l = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x|^l d\Phi(x) = R_l.$$

Теорема 1. *Если $\sigma_n \to \infty$, то к сумме S_{ν_n} применима центральная предельная теорема теории моментов нулевого порядка тогда, когда*

$$(\nu_n - \alpha_n)/\sigma_n \xrightarrow{p} 0. \tag{3}$$

Доказательство. В силу (3) законы распределения вероятностей $L(\overline{S}_{\nu_n})$, $L(\overline{\overline{S}}_{\nu_n})$ сумм $\overline{S}_{\nu_n} = (S_{\nu_n} - MS_{\nu_n})/\sigma_n$, $\overline{\overline{S}}_{\nu_n} = (S_{\nu_n} - a\nu_n)/\sigma_n$ асимптотически эквивалентны при $n\to\infty$, т. е. $L(\overline{S}_{\nu_n}) \sim L(\overline{\overline{S}}_{\nu_n})$. Это позволит перейти к исследованию характеристической функции $g_n(u) = M\exp(iu\overline{\overline{S}}_{\nu_n}) =$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} p_{nm} f^m (u/\sigma_n), \text{ где } p_{nm} = P(\nu_n = m), \; f(u/\sigma_n) = M \exp(iu(x_k - a)/\sigma_n).$$

Разобьем $g_n(u)$ на два слагаемых: $g_n(u) = g_{n1}(u) + g_{n2}(u)$, где

$$g_{n1}(u) = \sum_{|m-\alpha_n| > \tau\sigma_n} p_{nm} f^m (u/\sigma_n), \qquad g_{n2}(u) = \sum_{|m-\alpha_n| \leqslant \tau\sigma_n} p_{nm} f^m (u/\sigma_n), \quad \tau > 0.$$

Легко видеть, что $|g_{n1}(u)| \leqslant P(|\nu_n - \alpha_n| > \tau\sigma_n)$ и, в виду (3),

$$g_{n1}(u) \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

Чтобы исследовать асимптотическое поведение $g_{n2}(u)$ при $n \to \infty$, оценим $f(u/\sigma_n)$. С этой целью воспользуемся равенством

$$f(u/\sigma_n) - 1 + u^2\sigma^2/2\sigma_n^2 = \left(\int\limits_{|x-a| \leqslant \varepsilon_n\sigma_n} + \int\limits_{|x-a| > \varepsilon_n\sigma_n} \right) \times$$

$$\times \{\exp[iu(x-a)/\sigma_n] - 1 - iu(x-a)/\sigma_n + u^2(x-a)^2/2\sigma_n^2\} \, dF(x),$$

где $F(x) = P(x_k < x)$, а положительная последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такова, что $\varepsilon_n\sigma_n \to \infty$. Так как

$$|\exp(iu(x-a)/\sigma_n) - 1 - iu(x-a)/1!\,\sigma_n - \ldots - (1/l!)[iu(x-a)/\sigma_n]^l| \leqslant$$

$$\leqslant (|u(x-a)|^{l+1})/(l+1)!\,\sigma_n^{l+1}, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

то

$$|f(u/\sigma_n) - 1 + u^2\sigma^2/2\sigma_n^2| \leqslant \varepsilon_n |u|^3 \sigma^2/6\sigma_n^2 + (u^2/\sigma_n^2) \int\limits_{|x-a| > \varepsilon_n\sigma_n} (x-a)^2 dF(x).$$

Отсюда следует, что

$$f(u/\sigma_n) = 1 - u^2\sigma^2/2\sigma_n^2 + r_n(\varepsilon_n), \tag{5}$$

где

$$r_n(\varepsilon_n) = \theta_{n1}(u^2/2\sigma_n^2) \left[\varepsilon_n |u| \sigma^2 + \int\limits_{|x-a| > \varepsilon_n\sigma_n} (x-a)^2 \, dF(x) \right], \quad |\theta_{n1}| \leqslant 1.$$

Поэтому, рассматривая произвольный, но фиксированный интервал изменения u, можно выбрать n настолько большим, чтобы

$$|f(u/\sigma_n) - 1| < 1/2. \tag{6}$$

Таким образом, в этом интервале характеристическая функция $f(u/\sigma_n)$ отлична от нуля и, следовательно, $\ln f(u/\sigma_n)$ определен. Разложим $\ln f(u/\sigma_n)$ в ряд по степеням разности $f(u/\sigma_n) - 1$: $\ln f(u/\sigma_n) = \sum_{l=1}^{\infty} [(-1)^{l-1} (f(u/\sigma_n) - 1)^l]/l$. Отсюда находим, что

$$|\ln f(u/\sigma_n) - f(u/\sigma_n) + 1| \leqslant |f(u/\sigma_n) - 1|^2.$$

Поэтому

$$\ln f(u/\sigma_n) = f(u/\sigma_n) - 1 + \eta_{n1} |f(u/\sigma_n) - 1|^2 = F(u/\sigma_n), \quad |\eta_{n1}| \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\ln f^m(u/\sigma_n) = m[f(u/\sigma_n) - 1] + \eta_{n1} m |f(u/\sigma_n) - 1|^2,$$

или, что то же самое,

$$f^m(u/\sigma_n) = \exp[(m - \alpha_n) F(u/\sigma_n)] \, v(u/\sigma_n),$$

где

$$v(u/\sigma_n) = \exp[\alpha_n F(u/\sigma_n)].$$

Это равенство позволит записать $g_{n2}(u)$ в виде

$$g_{n2}(u) = \exp[\alpha_n F(u/\sigma_n)] \, H(u/\sigma_n), \tag{7}$$

где

$$H(u/\sigma_n) = \sum_{|m-\alpha_n|\leqslant\tau\sigma_n} p_{nm} \exp[(m-\alpha_n) F(u/\sigma_n)].$$

Разложим $H(u/\sigma_n)$ в степенной ряд:

$$H(u/\sigma_n) = \sum_{|m-\alpha_n|\leqslant\tau\sigma_n} p_{nm} + \sum_{|m-\alpha_n|\leqslant\tau\sigma_n} p_{nm} \sum_{t=1}^{\infty} [(m-\alpha_n)^t F^t(u/\sigma_n)]/t!.$$

Отсюда следует, что

$$|H(u/\sigma_n) - 1| \leqslant \sum_{|m-\alpha_n|>\tau\sigma_n} p_{nm} + \sum_{|m-\alpha_n|\leqslant\tau\sigma_n} p_{nm} \sum_{t=1}^{\infty} [|m-\alpha_n|^t |F(u/\sigma_n)|^t]/t!. \quad (8)$$

В виду (5) $|f(u/\sigma_n) - 1| \leqslant (u^2\sigma^2/2\sigma_n^2)(2+\varepsilon_n|u|)$. Поэтому, учитывая (6), при достаточно большом n имеем

$$|F(u/\sigma_n)| \leqslant (u^2\sigma^2/\sigma_n^2)(2+\varepsilon_n|u|). \quad (9)$$

Применяя (9) к оценке правой части неравенства (8), находим

$$|H(u/\sigma_n) - 1| \leqslant \sum_{|m-\alpha_n|>\tau\sigma_n} p_{nm} + (\tau u^2\sigma^2/\sigma_n)(2+\varepsilon_n|u|) \times$$

$$\times \exp[\tau u^2\sigma^2(2+\varepsilon_n|u|)/\sigma_n] = H_{n1}.$$

Отсюда имеем

$$H(u/\sigma_n) = 1 + \eta_{n2} H_{n1}, \quad |\eta_{n2}| \leqslant 1. \quad (10)$$

В силу (7)

$$\alpha_n F(u/\sigma_n) = -u^2/2 + \alpha_n r_n(\varepsilon_n) + \eta_{n1}\alpha_n |-u^2\sigma^2/2\sigma_n^2 + r_n(\varepsilon_n)|^2.$$

Так как

$$|-u^2\sigma^2/2\sigma_n^2 + r_n(\varepsilon_n)| \leqslant 2(u^4\sigma^4/4\sigma_n^4 + |r_n(\varepsilon_n)|^2), \quad |r_n(\varepsilon_n)| \leqslant (u^2\sigma^2/2\sigma_n^2)\gamma_n(u),$$

где

$$\gamma_n(u) = \varepsilon_n|u| + (1/\sigma^2) \int_{|x-a|>\varepsilon_n\sigma_n} (x-a)^2 dF(x),$$

то

$$|\alpha_n F_n(u/\sigma_n) + u^2/2| \leqslant (u^2/2)\gamma_n(u) + (u^4\sigma^2/2\sigma_n^2)(1+\gamma_n^2(u)) = \omega_n(u).$$

Следовательно,

$$\alpha_n F_n(u/\sigma_n) = -u^2/2 + \theta_{n2}\omega_n(u), \qquad |\theta_{n2}| \leqslant 1. \quad (11)$$

В соответствии с (7), (10), (11) представим $g_{n2}(u)$ в виде

$$g_{n2}(u) = (1 + \eta_{n2} H_{n1}) \exp(-u^2/2) + \theta_{n2}\omega_n(u).$$

Так как в условиях теоремы $H_{n1}(u) \to 0$, $\omega_n(u) \to 0$, $n \to \infty$, то $g_{n2}(u) \to \exp(-u^2/2)$, а отсюда на основании (4) следует, что предельным законом $L(\overline{\overline{S}}_{\nu_n})$ является нормальный закон.

Теорема 1 доказана.

Пусть m — натуральное число, $l = 2m$, $E_n^{(l)} = [M(\nu_n - \alpha_n)^l]/\sigma_n^l$.

Теорема 2. *Если* $Mx_k = a \neq 0$, $Mx_k^l < \infty$, $\sigma_n \to \infty$, *то к сумме* S_{ν_n} *применима центральная предельная теорема теории моментов порядка* l *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n\to\infty} E_n^{(l)} = 0. \quad (12)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть

$$x_k = x_k - a, \qquad H_n^{(2m)} = M\overline{S}_{\nu_n}^{2m}.$$

Нетрудно показать, что

$$H_n^{(2m)} = \sum_{t=0}^{2m} (a/\sigma_n)^t C_{2m}^t M\,[\bar{\bar{S}}_{\nu_n}^{2m-t} (\nu_n - \alpha_n)^t]. \tag{13}$$

Распишем поподробнее правую часть (13), принимая во внимание, что

$$M\,[\bar{\bar{S}}_{\nu_n}^{2m-t} (\nu_n - \alpha_n)^t] = \sum_{h=1}^{\infty} p_{nh} (h - \alpha_n)^t M \bar{\bar{S}}_h^{2m-t}, \tag{14}$$

где

$$M\bar{\bar{S}}_h^{2m-t} = (1/\sigma_n^{2m-t}) \sum_{l=1}^{[(2m-t)/2]} \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_l=2m-t \\ r_i>1,\ i=1,\ldots,l}} \times$$

$$\times [(2m-t)!/r_1! \ldots r_l!] \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant h} \prod_{s=1}^{l} M\bar{x}_{i_s}^{r_s}.$$

Так как

$$\prod_{s=1}^{l} M\bar{x}_{i_s}^{r_s} = \prod_{s=1}^{l} b_{r_s},$$

где $b_{r_s} = M(x_k - a)^{r_s}$, то

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_l \leqslant h} \prod_{s=1}^{l} b_{r_s} = C_h^l \prod_{u=1}^{l} b_{r_u},$$

$C_h^l = 0$, когда $h < l$. Поэтому

$$M\bar{\bar{S}}_h^{2m-t} = (1/\sigma_n^{2m-t}) \sum_{l=1}^{[(2m-t)/2]} \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_l=2m-t \\ r_i>0,\ i=1,\ldots,l}} \times$$

$$\times [(2m-t)!/r_1! \ldots r_l] \, C_h^l \prod_{u=1}^{l} b_{r_u}.$$

Представим C_h^l в виде

$$C_h^l = (1/l!) \prod_{j=0}^{l-1} [(h - \alpha_n) + (\alpha_n - j)] = \sum_{s=0}^{l} A_{nl}^{(s)} (h - \alpha_n)^{l-s},$$

где

$$A_{nl}^{(s)} = (1/l!) \sum_{0 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant l-1} \prod_{r=1}^{s} (\alpha_n - i_r), \quad A_{nl}^{(0)} = 1/l!.$$

Тогда моменты суммы $\bar{\bar{S}}_h$ порядка $2m - t$ будут определяться так:

$$M\bar{\bar{S}}_h^{2m-t} = \sum_{l=1}^{[(2m-t)/2]} \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_l=2m-t \\ r_i>1,\ i=1,\ldots,l}} [(2m-t)!/r_1! \ldots r_l!] \times$$

$$\times \prod_{u=1}^{l} b_{r_u} \sum_{s=0}^{l} A_{nl}^{(s)} (h - \alpha_n)^{l-s}. \tag{15}$$

В виду (13) — (15)

$$H_n^{(2m)} = M\bar{\bar{S}}_{\nu_n}^{2m} + T_n^{(2m)} + a^{(2m)} E_n^{(2m)}, \tag{16}$$

где

$$T_n^{(2m)} = \sum_{t=1}^{2m-2} a^t C_{2m}^t \sum_{l=1}^{[(2m-t)/2]} \sum_{\substack{r_1+\ldots+r_l=2m-t \\ r_i>1, i=1,\ldots,l}} \times$$

$$\times (2m-t)!/r_1! \ldots r_l! \prod_{u=1}^{l} b_{r_u} \sum_{s=0}^{l} \varphi_n(t, s, l)\, E_n^{(t+l-s)},$$

при этом $\varphi_n(t, s, l) = A_{nl}^{(s)} \sigma_n^{t+l-s-2m}$. Полагая $\alpha_n > m - 1$ (это не ограничивает общности доказательства теоремы), легко оценить $A_{nl}^{(s)}$: $|A_{nl}^{(s)}| \leqslant (C_l^s/l!)\alpha_n^s$. Следовательно, $|\varphi_n(t, l, s)| \leqslant (C_l^s/l!\sigma^{2s})\sigma_n^{t+l+s-2m}$. Так как $1 \leqslant l \leqslant 2m - t/2$, $0 \leqslant s \leqslant l$, то $0 < t + l - s \leqslant 2m - 1$, $2m - t - l - s \geqslant l - s$. Вследствие этого при достаточно большом n имеем

$$|\varphi_n(t, l, s)| \leqslant (C_l^s/l!\sigma^{2s})\sigma_n^{s-l}, \tag{17}$$

$$|E_n^{(t+l-s)}| \leqslant [E_n^{(2m)}]^{(t+l-s)/2m}. \tag{18}$$

В силу (17), (18) и условий теоремы

$$\varphi_n(t, l, s) E_n^{(t+l-s)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

каковы бы ни были t, l, s, $t + l - s > 0$. Это доказывает, что

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(m)} = 0. \tag{19}$$

Изучим асимптотическое поведение $M\overline{\overline{S}}_{\nu_n}^{2m}$ при $n \to \infty$. Полагая $t = 0$, из равенства (15) находим, что

$$M\overline{\overline{S}}_{\nu_n}^{2m} = Q_{nm}^{(1)} + Q_{nm}^{(2)} + Q_{nm}^{(3)}, \tag{20}$$

где

$$Q_{nm}^{(1)} = ((2m)!\sigma^{2m}/2^m)\varphi_n(0, m, m),$$

$$Q_{nm}^{(2)} = ((2m)!\sigma^{2m}/2^m)\sum_{s=0}^{m-1}\varphi_n(0, m, s) E_n^{(m-s)},$$

$$Q_{nm}^{(3)} = \sum_{l=1}^{m-1}\sum_{\substack{r_1+\ldots+r_l=2m \\ r_i>0,\ i=1,\ldots,l}}[(2m)!/r_1!\ldots r_l!]\prod_{u=1}^{l} b_{r_u}\sum_{s=0}\varphi_n(0, l, s) E_n^{(l-s)}.$$

Исследуем поведение $Q_{nm}^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, при $n \to \infty$. С этой целью $\varphi_n(0, m, m)$ запишем в виде

$$\varphi_n(0, m, m) = (1/m!\sigma_n^{2m})\prod_{j=0}^{m-1}(\alpha_n - j) = (1/m!\sigma_n^{2m})(\alpha_n^m + \psi_{nm}),$$

где

$$\psi_{nm} = \sum_{u=1}^{m}(-1)^u B_m^{(u)}\alpha_n^{m-u},$$

при этом

$$B_m^{(u)} = \sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_u\leqslant m-1}\prod_{r=1}^{u} j_r.$$

Так как $\alpha_n^{m-u} \leqslant \alpha_n^{m-1}$, $B_m^{(u)} \leqslant (C_m^2)^u/u!$, то $|\psi_{nm}| \leqslant \alpha_n^{m-1}\exp(C_m^2)$. Поэтому

$$|Q_{nm}^{(1)} - R_{2m}| \leqslant R_{2m}\sigma^2\exp(C_m^2)/\sigma_n. \tag{21}$$

Для оценки $Q_{nm}^{(2)}$, $Q_{nm}^{(3)}$ воспользуемся неравенствами (17) и (18) для $l > s$:

$$|\varphi_n(0, l, s)| \leqslant (C_l^s/l!\sigma^{2s})\sigma_n^{s-l}, \qquad |E_n^{(l-s)}| \leqslant [E_n^{(2m)}]^{(l-s)/2m}.$$

Если $l = s$, то, учитывая пределы суммирования по индексам l, s, имеем

$$|\varphi_n(0, l, s)| \leqslant (1/l!\sigma^{2l})\sigma_n^{2l-2m} \leqslant 1/l!\sigma^{2l}\sigma_n^2.$$

Отсюда следует, что каковы бы ни были l, s, имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(0, l, s) E_n^{(l-s)} = 0,$$

а из этого следует, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_{nm}^{(2)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_{nm}^{(3)} = 0. \tag{22}$$

Применяя (21), (22) к оценке слагаемых правой части (20), получаем равенство

$$\lim_{n\to\infty} M\overline{\overline{S}}_{\nu_n}^{2m} = R_{2m}, \tag{23}$$

из которого с учетом (12), (16), (19) следует асимптотическая нормальность моментов суммы $\overline{S}_{\nu_n}$ порядка $2m$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} M\overline{S}_{\nu_n}^{2m} = R_{2m}.$$

Кроме того, в условиях теоремы 2 остается в силе утверждение теоремы 1, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \Phi(x).$$

Необходимость. Пусть к сумме S_{ν_n} применима центральная предельная теорема теории моментов порядка $l = 2m$. Тогда на основании известной теоремы о сходимости моментов [2] для всех натуральных чисел $r < l$

$$\lim_{n\to\infty} M|\overline{S}_{\nu_n}|^r = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r d\Phi(x), \qquad \lim_{n\to\infty} M\overline{S}_{\nu_n}^r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r d\Phi(x).$$

Если $r = 2$, то из равенства $M\overline{S}_{\nu_n}^2 = 1 + a^2(\beta_n^2/\sigma_n^2)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E_n^{(2)} = 0. \tag{24}$$

Пусть $r = 3$. Нетрудно показать, что $M\overline{S}_{\nu_n}^3 = \beta_3/\sigma^2\sigma_n + (3a\sigma^2/\sigma_n) E_n^{(2)} + a^3E_n^{(3)}$, $\beta_3 = M(x_i - a)^3$. Учитывая (24) и то, что $\lim\limits_{n\to\infty} M\overline{S}_{\nu_n}^3 = 0$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} E_n^{(3)} = 0$.

Итак, предположим, что при всех $r = 2, 3, \ldots, 2m-1$

$$\lim_{n\to\infty} E_n^{(r)} = 0. \tag{25}$$

Докажем, что (25) справедливо при $r = 2m$. С этой целью воспользуемся результатами, полученными при доказательстве предельного равенства (23). Условия (25) и $\sigma_n \to \infty$ достаточны, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} T_n^{(m)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} M\overline{\overline{S}}_n^{2m} = R_{2m}.$$

Вследствие этого из равенства (16) получаем, что (25) выполняется при $r = 2m$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Если* $Mx_k = 0$, $Mx_k^{2m} < \infty$, $\sigma_n \to \infty$, *то к сумме* S_{ν_n} *применима центральная предельная теорема теории моментов порядка* $2m$ *тогда, когда*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (M|\nu_n - M_{\nu_n}|^m)/\sigma_n^m = Q_m < \infty.$$

Доказательство теоремы (3) не представляет труда.

Для иллюстрации теорем приведем пример.

Пусть S_{ν_n} — сумма одинаково распределенных случайных величин x с $Mx_k^{2m} < \infty$ (m — натуральное число) и $\sigma^2 = Dx_k$, где $\{\nu_n\}$ — последова тельность целочисленных положительных величин, подчиненных следую щему закону распределения вероятностей:

$$p_{nk} = P(\nu_n = k) = (1/\beta_n \sqrt{2\pi}) \exp(-(k - [\alpha_n])^2/2\beta_n^2),$$

$$k = 0, 1, \ldots, [\alpha_n] - 1, \quad [\alpha_n] + 1, \ldots, 2[\alpha_n],$$

$$p_{n,[\alpha_n]} = P(\nu_n = [\alpha_n]) = 1 - \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq [\alpha_n]}}^{2[\alpha_n]} p_{nk},$$

где $[\alpha_n]$ — цельная часть числа α_n. Предположим, что $\alpha_n \to \infty$, $\beta_n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n^2/\alpha_n = 0. \tag{26}$$

Нетрудно проверить, что

$$M\nu_n = [\alpha_n]. \tag{27}$$

Обозначим

$$F_{nt}(x) = (|x|^t/\beta_n \sqrt{2\pi}) \exp(-x^2/2\beta_n^2), \qquad J_n^t = \int_{-[\alpha_n]}^{[\alpha_n]} F_{nt}(x)\,dx, \quad t \geqslant 2.$$

Так как интеграл $J_n^{(t)}$ представляет собой площадь криволинейной трапе ции, ограниченной кривой $F_{nt}(x)$, осью Ox и ординатами в точках $x_1 = -[\alpha_n]$, $x_2 = [\alpha_n]$, то его приближенно можно представить в виде сум мы площадей прямоугольников с основанием единицы и высотами $F_{nt}(k$ $k = -[\alpha_n], -[\alpha_n]+1, \ldots, [\alpha_n]$. Это позволит оценить $J_n^{(t)}$ в виде нераве ства $|H_n^{(t)} - J_n^{(t)}| \leqslant 4F_{nt}(\beta_n \sqrt{t})$, где

$$H_n^{(t)} = \sum_{k=0}^{2[\alpha_n]} |k - [\alpha_n]|^t p_{nk}.$$

Отсюда следует, что

$$H_n^{(t)} \sim R_t \beta_n^t. \tag{28}$$

В силу (26) — (28) $\lim\limits_{n\to\infty} H_n^{(t)}/\sigma_n^t = 0$, где $\sigma_n^2 = \alpha_n\sigma^2$. Согласно теоремам 1, 2 из этого следует, что к сумме S_{ν_n} применима центральная предельна теорема теории моментов порядка $2m$.

1. *Robbins H*. The asymptotic distribution of the sum a random number of random variables Bull. Amer. Math. Sos., 1948, 54, p. 1151—1161.
2. *Лоэв М*. Теория вероятностей.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 719 с.

Киев. ин-т
инж. гражд. авиации

Поступила в редакцию
30.12.8