УДК 518.322

Я. Д. Мамедов, Х. Дернер

О двух приближенных методах решения линейных краевых задач

1. Операторное уравнение. Пусть X — некоторое банахово пространство. Через X_l обозначим пространство абстрактных функций $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant l$, со значениями из X с одной из норм пространства функций; так, например,

$$\| x(t) \|_{X_l} = \max_{0 \leqslant t \leqslant l} \| x(t) \|_X, \qquad \| x(t) \|_{X_l} = \left(\int_0^l \| x(t) \|_X^2 dt \right)^{1/2}.$$

Через F обозначим линейный «функционал типа Фредгольма», т. е. линейный оператор, действующий из X_l в X, а через V — линейный «оператор типа Вольтерра», т. е. линейный оператор, действующий из X_t, $0 \leqslant t \leqslant l$, в X_l.

Рассмотрим линейное операторное уравнение «типа Фредгольма—Вольтерра»

$$x = h + AFx + Vx, \tag{1}$$

где $A(t)$, $0 \leqslant t \leqslant l$, — семейство линейных операторов, действующих из X в X_l, а абстрактная функция $h(t) \in X_l$.

Ниже всюду будем предполагать, что уравнение (1) однозначно разрешимо.

1. Вводя обозначение $\Phi(A, x, y) \equiv (A - A_1)Fx + (A_1F + V)y$, уравнение (1) можно записать в виде $x = h + \Phi(A_1, x, x)$. Здесь $A_1 = A_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant l$, — семейство линейных операторов, действующих из X в X_l. Следуя [1], заменяя последнее уравнение приближенным $x_n = h + \Phi(A_1, x_n, x_{n-1})$, получаем уравнение

$$x_n = h + (A - A_1) F x_n + (A_1 F + V) x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

по которому строится последовательность $\{x_n\}$ приближенных решений уравнения (1). Здесь $x_0(t) \in X_l$ — произвольная функция.

Предполагая существование оператора $[I - F(A - A_1)]^{-1}$, из (2) получим

$$x_n = \{(A - A_1)[I - F(A - A_1)]^{-1}F + I\}[h + (A_1F + V)x_{n-1}].$$

Обозначая

$$B_1 = (A - A_1)[I - F(A - A_1)]^{-1}F + I, \quad B_2 = A_1F + V,$$

последнее можно записать в виде $x_n = B_1h + B_1B_2x_{n-1}$ или же $x_n = \sum_{i=0}^{n-1} (B_1B_2)^i B_i h + (B_1B_2)^n x_0$.

Выбирая $x_0 = B_1h$, получаем

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} (B_1B_2)^i B_1 h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Функцию $x_n(t)$, определенную формулой (3), будем принимать за приближенное решение уравнения (1).

Предполагая, что для некоторого целого $\lambda \geqslant 1$ $\|(B_1B_2)^\lambda\| \leqslant \alpha < 1$, и применяя обобщенный принцип сжатых отображений (см., напр., [2]), оценку погрешности определим формулой

$$\| x - x_n \|_{X_l} \leqslant \alpha^{n/\lambda} \| x - x_0 \|_{X_l}, \quad n \geqslant \lambda. \tag{4}$$

Заметим, что если положить $A_1(t) \equiv A(t)$, то (2) совпадает с методом простой итерации для уравнения (1) и скорость сходимости определится формулой (4) при выполнении условий

$$\| (AF + V)^\lambda \|_{X_l} \leqslant \alpha < 1, \quad \lambda \geqslant 1.$$

Если $A_1(t) \equiv 0$, то итерация (2) совпадает с итерацией $x_n = h + AFx_n + Vx_{n-1}$ и скорость сходимости определяется формулой (4) при выполнении условий

$$\| \{[I + A(I - FA)^{-1}F] V\}^\lambda \|_{X_l} \leqslant \alpha < 1, \quad \lambda \geqslant 1.$$

Подбирая $A_1(t)$ различными способами, можно получить различные итерационные процессы.

2. Изложим второй способ для приближенного решения уравнения (1).

Известно, что для достаточно больших n уравнение

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} V^i h + \left(\sum_{i=0}^{n-1} V^i A \right) Fx + V^n x$$

эквивалентно уравнению (1) (см., напр., [3, 4]). Обозначая

$$h_n = \sum_{i=0}^{n-1} V^i h, \qquad A_n = \sum_{i=0}^{n-1} V^i A,$$

последнее уравнение можно записать в виде

$$x = h_n + A_n F x + V^n x. \tag{5}$$

Так как V — оператор Вольтерра, для достаточно больших n норма $\| V^n x \|_{X_l}$ будет достаточно малой. Отбрасывая в (5) $V^n x$, получаем приближенное уравнение

$$x_n = h_n + A_n F x_n, \tag{6}$$

решение которого будем принимать за приближенное решение уравнения (1).

Из предположения существования оператора $[I - AF - V]^{-1}$ для достаточно больших n следует существование оператора $[I - A_n F]^{-1}$, стремящегося к оператору $[I - AF - V]^{-1}(I - V)$ (см., напр., [3]), и решение уравнения (6) определяется формулой $x_n = (I - A_n F)^{-1} h_n$.

Из решения уравнения $x - x_n = V^n x + A_n F (x - x_n)$ получаем оценку погрешности

$$\| x - x_n \|_{X_l} \leqslant \| (I - A_n F)^{-1} \|_{X_l} \| V^n x \|_{X_l}$$

или же, учитывая, что $[I - A_n F]^{-1} = (I - AF - V)^{-1}(I - V) + \varepsilon_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, — оценку

$$\| x - x_n \|_{X_l} \leqslant \| (I - AF - V)^{-1}(I - V) + \varepsilon_n \|_{X_l} \| V^n x \|_{X_l}.$$

Исследуем возможность улучшения погрешности. Пусть

$$F_n x = V^n x \,|_{t=l}$$

и $\psi(t)$, $0 \leqslant t \leqslant l$, — семейство линейных операторов, действующих из X в X_l и удовлетворяющих условию

$$\| V^n x - \psi(t) F_n x \|_{X_l} = \| V^n x \|_{X_l} - \varepsilon_n, \quad 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \| V^n x \|_{X_l}.$$

Тогда из (5), отбрасывая выражение $W_n(t, x) = V^n x - \psi(t) F_n x$, в качестве приближенного уравнения получим

$$x_n^* = h_n + A_n F x_n^* + \psi F_n x_n^*. \tag{7}$$

Так как для достаточно больших n существует оператор $(I - A_n F)^{-1}$, то также существует $(I - A_n F - \psi F_n)^{-1}$ и решение уравнения (7) определяется формулой $x_n^* = (I - A_n F - \psi F_n)^{-1} h_n$ или же $x_n^* = (I + A_n Q_1 + \psi Q_2) h_n$, где

$$A_n Q_1 + \psi Q_2 = (A_n F + \psi F_n)(I - A_n F_n - \psi F_n)^{-1} =$$
$$= (I - A_n F - \psi F_n)^{-1}(A_n F + \psi F_n).$$

Оценка погрешности определяется формулой

$$\| x - x_n^* \|_{X_l} \leqslant \| (I - AF - V)^{-1}(I - V) + \bar{\varepsilon}_n \|_{X_l} (\| V^n x \|_{X_l} - \varepsilon_n), \tag{8}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{\varepsilon}_n = 0$.

Учитывая формулу (8) можно ожидать, что приближение x_n^* лучше приближения x_n, определенного формулой (7).

3. Приведем некоторые частные случаи уравнения (1).

1). Пусть $X = R'$, и за $A(t)$ возьмем скалярную функцию, определенную в $[0, l]$. Если положить $Fx \equiv \int\limits_0^l K(s)\, x(s)\, ds$ или $Fx \equiv \sum\limits_{i=1}^m \int\limits_{l_{i-1}}^{l_i} K_i(s) x \times$ $\times (s)\, ds$, $\quad 0 = l_0 \leqslant l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_m = l$, и $Vx \equiv \int\limits_0^t K(t, s)\, x(s)\, ds$ или $Vx \equiv$

$\equiv \int\limits_0^l \sum\limits_{i=1}^{m} K_i(t, s)\, x(s - \tau_i(s))\, ds,\ 0 \leqslant \tau_i \leqslant s \leqslant l$, то частными случаями уравнения (1) будут, например, уравнения

$$x(t) = h(t) + A(t) \int\limits_0^l K(s)\, x(s)\, ds + \int\limits_0^t K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

$$x(t) = h(t) + A(t) \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{l_{i-1}}^{l_i} K_i(s)\, x(s)\, ds + \int\limits_0^t K(t, s)\, x(s)\, ds,$$

$$x(t) = h(t) + A(t) \int\limits_0^l K(s)\, x(s)\, ds + \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{m} K_i(t, s)\, x(s - \tau_i(s))\, ds.$$

2) Пусть $X = E^m$, где E^m — m-мерное евклидово пространство, и

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,m}}, \qquad Fx \equiv \left(\int\limits_0^l \sum_{j=1}^{m} K_{ij}(s)\, x_j(s)\, ds \right)_{i=\overline{1,m}},$$

$$Vx \equiv \left(\int\limits_0^t \sum_{j=0}^{m} \overline{K}_{ij}(t, s)\, x_j(s)\, ds \right)_{i=\overline{1,m}}.$$

Тогда уравнение (1) превратится в систему уравнений

$$x_i(t) = h_i(t) + \int\limits_0^l \sum_{j,k=1}^{m} a_{ij}(t)\, K_{jk}(s)\, x_k(s)\, ds + \int\limits_0^t \sum_{j=0}^{m} \overline{K}_{ij}(t, s)\, x_j(s)\, ds, \quad i = \overline{1, m}.$$

3) Пусть $X = L_2[a, b]$ и

$$Au \equiv \int\limits_a^b a(t, s, \sigma)\, u(\sigma)\, d\sigma, \quad Fu \equiv \int\limits_0^l K(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau, \quad Vu \equiv \int\limits_0^l K(t, s, \tau)\, u(\tau)\, d\tau.$$

Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$x(t, s) = h(t, s) + \int\limits_a^b \int\limits_0^l a(t, s, \sigma)\, K(\sigma, \tau)\, x(\sigma, \tau)\, d\tau d\sigma + \int\limits_0^t K(t, s, \sigma)\, x(\sigma, s)\, ds.$$

2. Решение краевой задачи. Изложенные выше схемы применим к приближенному решению задачи

$$x''(t) = q(t)\, x(t) + g(t), \qquad x(0) = x_0, \quad x(l) = x_l. \tag{9}$$

Предполагается, что задача (9) однозначно разрешима. Очевидно, что (9) эквивалентна интегральному уравнению

$$x = h + tFx + Vx, \tag{10}$$

где

$$h(t) = x_0 + \frac{t}{l}(x_l - x_0) - t \int\limits_0^l \frac{l - s}{l}\, g(s)\, ds + \int\limits_0^t (t - s)\, g(s)\, ds,$$

$$Fx \equiv \int\limits_0^l \frac{s - l}{l}\, q(s)\, x(s)\, ds, \qquad Vx \equiv \int\limits_0^t (t - s)\, q(s)\, x(s)\, ds.$$

1. Для приближенного решения уравнения (10) сначала применим первый метод. Пусть $\psi(t)$ — произвольная функция, определенная на $[0, l]$ и принадлежащая тому же классу функций, что и $x(t)$. Предположим, что $F(t - \psi) \neq 1$. Для уравнения (10) последовательные приближения по-

строим равенствами

$$x_n = h + (t - \psi) F x_n + (V + \psi F) x_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$x_0 = h + \frac{t-\psi}{1 - F(t-\psi)} Fh. \tag{11}$$

Тогда решение уравнения (11) получим в виде

$$x_n = B_1 h + B_1 B_2 x_{n-1},$$

где

$$B_1 = I + \frac{t-\psi}{1 - F(t-\psi)} F, \qquad B_2 = V + \psi F.$$

Следовательно,

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} (B_1 B_2)^i B_1 h. \tag{12}$$

Функцию $x_n(t)$, определенную формулой (12), будем принимать за приближенное решение задачи (9).

Если предполагать, что для некоторых $\lambda \geqslant 1$ выполнено условие

$$\|(B_1 B_2)^\lambda\| \leqslant \alpha < 1, \tag{13}$$

то $\|x - x_n\| \leqslant \alpha^{n/\lambda} \|x - x_0\|$, $\lambda \geqslant 1$.

Допустим, что $\psi(t) = t$, тогда последовательные приближения (11) совпадут с приближениями обычного метода последовательных приближений. В этом случае условие (13) совпадает с условием $\|(V + tF)^\lambda\| \leqslant \alpha < 1$. Это условие выполняется, если, например, $\|q\|_C < 1/l^2$, $\lambda = 1$, $\|q\|_C < 2/l^2$, $\lambda = 2$.

Если положить $\psi(t) \equiv 0$, то последовательные приближения (11) совпадут с приближениями $x_n = h + tFx_n + Vx_{n-1}$. В этом случае условие (13) совпадает с условием $\left\|\left[\left(I + \frac{t}{1 - F_t} F\right) V\right]^\lambda\right\| \leqslant \alpha < 1$, которое выполнено, если, например, $\|q\|_C < 1{,}675/l^2$, $\lambda = 1$, $\|q\|_C < 3{,}06/l^2$, $\lambda = 2$.

2. Применим второй метод к приближенному решению задачи (9). Так как задача (9) эквивалентна интегральному уравнению (10), для достаточно больших n она эквивалентна итерированному уравнению

$$x = h_n + \varphi_n F x + V^n x, \tag{14}$$

где

$$h_n = \sum_{i=0}^{n-1} V^i h, \quad \varphi(t) = t, \quad \varphi_n = \sum_{i=0}^{n-1} V^i \varphi, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$V^n x \equiv \int_0^t K_n(t, s)\, x(s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$K_1(t, s) = (t - s)\, q(s), \quad K_n(t, s) = \int_s^t K_1(t, \tau) K_{n-1}(\tau, s)\, d\tau, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Легко проверить, что

$$\int_0^t |K_n(t, s)|\, ds \leqslant \frac{[l^2 \|q\|_C]^n}{(2n)!},$$

или

$$\|K_n(t, s)\|_{L_2} \leqslant \left(\frac{6\left[\left(\frac{l^7}{45}\right)^{1/2} \|q^2\|_{L_2}\right]^n}{7(7n-2)^{1/2} n!}\right)^{1/2}.$$

Так что, для достаточно больших n норма $\|V^n x\|$ будет достаточно мала.

Отбрасывая в (14) функцию $W_n(t, x) = V^n x - \psi(t) F_n x$, где

$$F_n x = V^n x\,|_{t=l},$$

а $\psi(t)$ — произвольная функция, получим приближенное уравнение

$$x_n(t) = h_n(t) + \int_0^l [\varphi_n(t)(s-l)\,q(s) + \psi(t)\dot{K}_n(l, s)]\,x_n(s)\,ds, \qquad (15)$$

являющееся интегральным уравнением Фредгольма с вырожденным ядром. Предполагая, что

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 - F\varphi_n & -F\psi \\ -F_n\varphi & 1 - F_n\psi \end{vmatrix} \neq 0,$$

единственное решение уравнения (15) определяем формулой

$$x_n(t) = h_n(t) + C_{1n}\varphi_n(t) + C_{2n}\psi(t),$$

где

$$C_{1n} = \frac{1}{D_n}[Fh_n(1 - F_n\psi) + F\psi F_n h_n],$$

$$C_{2n} = \frac{1}{D_n}[F_n h_n(1 - F\varphi_n) + Fh_n F_n\varphi_n].$$

Эта функция является приближенным решением задачи (9). Предполагая, что $\psi(0) = 0, \psi(l) = 1$, получим, что $x_n(t)$ удовлетворяет краевым условиям: $x_n(0) = x_0$, $x_n(l) = x_l$.

Оценим погрешность метода. Пусть

$$\psi_1(t) = \varphi_n(t)(1 - F_n\psi) + \psi(t) F_n\varphi_n,$$
$$\psi_2(t) = \varphi_n(t) F\psi + \psi(t)(1 - F\varphi_n).$$

Тогда, если $q(t) \in C[0, l]$, то

$$\|x - x_n\| \leqslant \|W_n\|_C \left\{1 + \frac{1}{|D_n|}\left[\|q\|_C \frac{l}{2}\|\psi_1\|_C + \frac{(l^2\|q\|_C)^n}{(2n)!}\|\psi_2\|_C\right\}\right..$$

В частном случае, если положить $\psi(t) \equiv 0$, то

$$\|x - x_n\|_C \leqslant \|x\|_C \frac{(l^2\|q\|_C)^n}{(2n)!}\left[1 + \|\varphi_n\|_C \frac{l^2\|q\|_C}{2|1 - F\varphi_n|}\right].$$

Если $q^2(t) \in L_2[0, l]$, то

$$\|x - x_n\|_{L_2} \leqslant \|W_n\|_{L_2}\left\{1 + \frac{1}{|D_n|}\left[l\left(\|\psi_1^2\|_{L_2}\frac{\|q^2\|_{L_2}}{\sqrt{5}}\right)^{1/2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|K_n(l, s)\|_{L_2} l^{1/4}\|\psi_2^2\|_{L_2}^{1/2}\right]\right\}.$$

В случае $\psi(t) \equiv 0$ имеем

$$\|x - x_n\|_{L_2} \leqslant \|x\|_{L_2}\|K_n\|_{L_2}\left[1 + l^{3/2}\|\psi_n\|_{L_2}(\sqrt{3}\,|1 - F\varphi_n|)^{-1}\left(2 + \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}}\right)\right].$$

1. *Мамедов Я. Д., Аширов С.* Нелинейные уравнения Вольтерра.— Ашхабад : Ылым, 1977.— 176 с.
2. *Мамедов Я. Д., Аширов С.* Методы последовательных приближений для операторных уравнений.— Ашхабад : Изд-во ТГУ, 1980.— 118 с.
3. *Красносельский М. А. и др.* Приближенное решение операторных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 455 с.

4. *Дидык В. Ю.* О приближенном решении одного класса интегральных уравнений.— Укр. мат. журн., 1969, 21, № 4, с. 530—534.
5. *Mamedov J. D., Derner H.* Eine Näherungsmethode zur Lösung linearer Zweipunkt.— Randwertaufgaben dewöhnlicher Differential qleichungen.— ZAMM, 1982, 62, S. 130—133.

Азербайджан. гос. ун-т

Поступила в редакцию 24.05.82,
после переработки 6.02.83