УДК 519.21

Г. П. Буцан

Об одном классе стохастических полугрупп

Настоящая статья является непосредственным продолжением работ [1, 2], и поэтому в ней будут использоваться принятые там обозначения и определения.

Теорема. *Между множествами* $\breve{\mathfrak{M}}[0, T]$ *всех* $\breve{M}$*-полугрупп и* $\breve{\mathfrak{A}}[0, T]$ *всех* $\breve{A}$*-полугрупп на отрезке* $[0, T]$, $T \leqslant \infty$, *существует взаимно однозначное отображение* $D: \breve{\mathfrak{M}}[0, T] \leftrightarrow \breve{\mathfrak{A}}[0, T]$, *которое каждую* $\breve{M}$*-полугруппу* X_s^t *переводит в ее инфинитезимальную* $\breve{A}$*-полугруппу* Y_s^t *по формуле*

$$D(X_s^t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) = Y_s^t,$$

при этом обратное отображение D^{-1} *задается по формуле*

$$D^{-1}(Y_s^t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) = X_s^t$$

и переводит $\breve{A}$*-полугруппу* Y_s^t *в ее первообразную* $\breve{M}$*-полугруппу* X_s^t.

Здесь все пределы понимаются в $|\cdot|_4$.

Доказательство. Возьмем произвольную $\breve{A}$-полугруппу Y_s^t из $\breve{\mathfrak{A}}[0, T]$ и докажем, что $D(\bar{D}(Y_s^t)) = Y_s^t \pmod P$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

В самом деле, учитывая оценку (5) работы [2] для произвольной последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ имеем неравенство

$$|Y_s^t(\Delta_n) - Y_s^t|_4^2 = \left| \sum_{k=1}^{m_n} (\bar{D}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) - E - Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) \right|_4^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} |\bar{D}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) - E - Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}|_4^2 \leqslant \exp\varphi(T) \sum_{k=1}^{m_n} [\varphi(t_k^n -) -$$

$$- \varphi(t_{k-1}^n)] [\varphi(t_k^n) - \varphi(t_{k-1}^n +)]. \quad (1)$$

Теперь, как и при доказательстве теоремы в работе [1], зададим некоторое $\varepsilon > 0$ и представим функцию $\varphi(\tau) = |Y_0^\tau|_4^2$ в виде $\varphi(\tau) = \varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau) + \varphi_3(\tau)$, где $\varphi_1(\tau)$ непрерывна на $[0, T]$, а $\varphi_2(\tau)$ и $\varphi_3(\tau)$ ступенчатые, причем сумма всех скачков $\varphi_2(\tau)$ меньше $\varepsilon/4\varphi(T)\exp\varphi(T)$, а $\varphi_3(\tau)$ имеет только конечное число скачков на $[0, T]$ в точках Θ_j, $j = \overline{1, N(\varepsilon)}$. Учитывая теорему работы [2], можно считать, что при любых n все Θ_j принадлежат Δ_n и $\Theta_j = t_{k_j}^n$ для некоторых k_j. Тогда оценка правой части неравенства (1), как и при доказательстве теоремы в работе [1] (см. равенство (6)), сведется при больших n к оценке суммы следующих пяти слагаемых

$$\exp\varphi(T) \sum_{k=1}^{m_n} [\varphi_p(t_k^n -) - \varphi_p(t_{k-1}^n)] [\varphi_q(t_k^n) - \varphi_q(t_{k-1}^n +)];$$

здесь индексы p и q соответственно принимают значения $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 3)$, а $\varphi_0(\tau) \equiv \varphi(\tau)$ по определению. Каждое из первых двух этих слагаемых за счет свойств функций $\varphi_0(\tau)$, $\varphi_1(\tau)$ и $\varphi_2(\tau)$ при больших n может быть сделано меньше $\varepsilon/4$, последние же три, в силу сказанного выше, для больших n будут иметь только $N(\varepsilon)$ слагаемых в своих суммах, причем последнее будет тождественно равно нулю, а третье и четвертое за счет свойств функций $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ и $\varphi_3(\tau)$, как легко видеть, также могут быть сделаны меньше $\varepsilon/4$ с ростом n. Тем самым для любого $\varepsilon > 0$ $|D(\overline{D}(Y_s^t) - Y_s^t|_4^2 < \varepsilon$, и, следовательно, $D(\overline{D}(Y_s^t)) = Y_s^t \pmod P$.

Возьмем произвольную $\check{M}$-полугруппу X_s^t из $\check{\mathfrak{M}}[0, T]$ и покажем, что $\overline{D}(D(X_s^t)) = X_s^t \pmod P$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Для этого рассмотрим равенство

$$|X_s^t - X_s^t(\Delta_n)|_4^2 = \left|\prod_{k=1}^{m_n} X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - \prod_{k=1}^{m_n}(D(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) + E)\right|_4^2 =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{m_n} X_s^{t_{k-1}^n}[X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E - D(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})]\prod_{i=k+1}^{m_n}(D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E)\right|_4^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n}\left|X_s^{t_{k-1}^n}[X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E - D(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})]\prod_{i=k+1}^{m_n}(D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E)\right|_4^2 +$$

$$+ \sum_{k\neq q=1}^{m_n} \operatorname{sp} M\left\{\left[\prod_{i=q+1}^{m_n}(D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E)\right]^*[D^*(X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n}) + E]\times\right.$$

$$\times\left[\prod_{i=k+1}^{q-1}(D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E\right]^*[X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E - D(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})]^*\times$$

$$\times(X_s^{t_{k-1}^n})^* X_s^{t_{k-1}^n}(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}) X_{t_k^n}^{t_{q-1}^n}[X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n} - E - D(X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n})]\times$$

$$\left.\times\left[\prod_{i=q+1}^{m_n}(D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E)\right]\right\}. \tag{2}$$

Легко видеть, что второе слагаемое в правой части этого равенства можно записать в виде

$$\sum_{k\neq q=1}^{m_n} \operatorname{sp} M\left\{MA^*[D(X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n}) + E]B[X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n} - E - D(X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n})]A\right|$$

$$\left|A = \prod_{i=q+1}^{m_n}(D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E),\qquad B = \left[\prod_{i=k+1}^{q-1}(D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E)\right]^*\times\right.$$

$$\left.\times[X_{t_{k-1}^n}^{t_b^n} - E - D(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})]^*(X_s^{t_{k-1}^n})^* X_s^{t_{q-1}^n}\right\}.$$

Но в силу теоремы из работы [1] при $t_{q-1}^n = s_0^q < s_1^q < \ldots < s_{r_q}^q = t_q^n$ и $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant r_q}(s_i^q - s_{i-1}^q)\downarrow 0$ при $r_q \to \infty$ справедливо равенство

$$MA^*[D(X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n}) + E]B[X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n} - E - D(X_{t_{q-1}^n}^{t_q^n})]A =$$

$$= \lim_{r_q\to\infty} MA^*\left[\sum_{i=1}^{r_q} D(X_{s_{i-1}^q}^{s_i^q}) + E\right]B\left[X_{s_0^q}^{s_{r_q}^q} - E - \sum_{i=1}^{r_q}(X_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} - E)\right]A =$$

$$= \lim_{r_q\to\infty} MA^*\left[\sum_{i=1}^{r_q} D(X_{s_{i-1}^q}^{s_i^q}) + E\right] B \left[\sum_{i=1}^{r_q} (X_{s_0^q}^{s_{i-1}^q} - E) \times\right.$$

$$\left.\times (X_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} - E)\right] A = \lim_{r_q\to\infty} \sum_{i=1}^{r_q} MA^*\left[\sum_{i=1}^{r_q} D(X_{s_{i-1}^q}^{s_i^q})\right] B \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{r_q} (X_{s_0^q}^{s_{i-1}^q} - E)(X_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} - E)\right] A = 0,$$

и, стало быть, все второе слагаемое в правой части выражения (2) равно нулю.

Оценивая первое слагаемое, легко видеть, что в силу формул (2), (3) и (7)—(9) работы [1], а также (2) работы [2], оно ограничено величиной

$$\sum_{k=1}^{m_n} |X_s^{t_{k-1}^n}|_5^2 |X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E - D(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})|_4^2 \left|\prod_{i=k+1}^{m_n} (D(X_{t_{i-1}^n}^{t_i^n}) + E)\right|_5^2 \leqslant$$

$$\leqslant (F(T)+1)\, e^{F(T)} \sum_{k=1}^{m_n} [F(t_k^n -) - F(t_{k-1}^n)]\,[F(t_k^n) - F(t_{k-1}^n +)],$$

которая стремится к нулю с ростом n в силу теоремы из работы [2] и свойств функции $F(\tau)$ точно так же, как это было показано выше для правой части выражения (1).

Следствие. $\sigma_s^t = \hat{\sigma}_s^t,\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

Пусть задана некоторая $\check{M}$-полугруппа X_s^t. Рассмотрим более подробно условие непрерывности функции $|X_0^\tau - E|_4^2 = F(\tau)$ в каждой точке $[s, t]$ слева или справа (см. 2.1 в [1]).

Замечание 1. В силу оценки (3) из работы [1] справедливы неравенства

$$|X_\Theta^{\Theta+} - E|_4^2 \leqslant F(\Theta+) - F(\Theta),\quad |X_{\Theta-}^{\Theta} - E|_4^2 \leqslant F(\Theta) - F(\Theta-),$$

а в силу соотношений (2) из работы [1], (2.11) из [3], (1) и (8) справедливы также неравенства

$$F(\Theta+) - F(\Theta) = |X_0^{\Theta+} - E|_4^2 - |X_0^{\Theta} - E|_4^2 = |X_0^{\Theta+} - X_0^{\Theta}|_4^2 \leqslant$$

$$\leqslant |X_0^{\Theta}|_5^2 |X_\Theta^{\Theta+} - E|_4^2 \leqslant (F(T)+1)\,|X_\Theta^{\Theta+} - E|_4^2,$$

и точно так же $F(\Theta) - F(\Theta-) \leqslant (F(T)+1)\,|X_{\Theta-}^{\Theta} - E|_4^2$.

Из этих неравенств вытекает, что непрерывность функции $F(\tau)$ в точке Θ слева или справа эквивалентна равенству нулю $|X_{\Theta-}^{\Theta} - E|_4$ или $|X_\Theta^{\Theta+} - E|_4$ соответственно.

Замечание 2. Пусть задана произвольная последовательность разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t]$ и фиксированная точка $\Theta \in (s, t)$. Рассмотрим новую последовательность разбиений $\{\Delta_n \cup \Theta\}$. Легко видеть (см. [1]), что при $t_{k-1}^n \leqslant \Theta \leqslant t_k^n$ справедливо равенство $|Y_s^t(\Delta_n) - Y_s^t(\Delta_n \cup \Theta)|_4^2 =$

$= |X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E - (X_\Theta^{t_k^n} - E) - (X_{t_{k-1}^n}^{\Theta} - E)|_4^2 = |(X_{t_{k-1}^n}^{\Theta} - E)(X_\Theta^{t_k^n} - E)|_4^2$ и, если $\lim_{n\to\infty} Y_s^t(\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} Y_s^t(\Delta_n \cup \Theta)$ в норме $|\cdot|_4$, то в силу свойств $\check{M}$-полугруппы справедливо соотношение

$$0 = |(X_{\Theta-}^{\Theta} - E)(X_\Theta^{\Theta+} - E)|_4^2 = \mathrm{sp}\, M (X_\Theta^{\Theta+} - E)^* (X_{\Theta-}^{\Theta} - E)^* \times$$

$$\times (X_{\Theta-}^{\Theta} - E)(X_\Theta^{\Theta+} - E) = \mathrm{sp}\, M (X_\Theta^{\Theta+} - E)^* [M (X_{\Theta-}^{\Theta} - E)^* \times$$

$$\times (X_{\Theta-}^{\Theta} - E)] (X_\Theta^{\Theta+} - E) = M\mathrm{sp}\, (X_\Theta^{\Theta+} - E)^* [M (X_{\Theta-}^{\Theta} - E)^* \times$$

$$\times (X_{\Theta-}^{\Theta} - E) | (X_{\Theta}^{\Theta+} - E) = M\mathrm{sp}\,(X_{\Theta}^{\Theta+} - E)(X_{\Theta}^{\Theta+} - E)^* M (X_{\Theta-}^{\Theta} - E)^* \times$$

$$\times (X_{\Theta-}^{\Theta} - E) = \mathrm{sp}\, M (X_{\Theta}^{\Theta+} - E)(X_{\Theta}^{\Theta+} - E)^* M (X_{\Theta-}^{\Theta} - E)^* (X_{\Theta-}^{\Theta} - E),$$

где последнее равенство вытекает из соотношения (2.3) в [4].

Следовательно, если $\lim\limits_{n\to\infty} Y_s^t(\Delta_n) = \lim\limits_{n\to\infty} Y_s^t(\Delta_n \cup \Theta)$, то симметричные неотрицательные ядерные операторы $M(X_{\Theta}^{\Theta+} - E)(X_{\Theta}^{\Theta+} - E)^* = MX_{\Theta}^{\Theta+} \times (X_{\Theta}^{\Theta+})^* - E$ и $M(X_{\Theta-}^{\Theta} - E)^*(X_{\Theta-}^{\Theta} - E) = M(X_{\Theta-}^{\Theta})^* X_{\Theta-}^{\Theta} - E$ ортогональны и действуют в ортогональных подпространствах из H, но, вообще говоря, они нулю могут тождественно не равняться, т. е. $|X_{\Theta}^{\Theta+} - E|_4$ и $|X_{\Theta-}^{\Theta} - E|_4$ могут быть в общем случае отличны от нуля, и в силу замечания 1 условие непрерывности в каждой точке $[s, t]$ слева или справа функции $F(\tau)$ не является необходимым для единственности предела у $Y_s^t(\Delta_n)$ независимо от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$.

Замечание 3. В работах [5, 6] рассмотрены мультипликативные стохастические полугруппы, принимающие значения во множестве R, которое автор называет гильбертовым кольцом. В отличие от определения гильбертова кольца, принятого в [7], автор работ [5, 6] предполагает, что R содержит единицу E, и, кроме того, существенно использует условие $|E| = 1$ (см., напр., (4) в [5], где $|\cdot|$ обозначает норму в R, порождаемую скалярным произведением). Однако, как следует из теоремы 9 в [7], множество R с указанными выше свойствами будет пустым, и, следовательно, результаты работ [5, 6] в том виде, в котором они сформулированы, лишены смысла. Но из работ [1, 2] и настоящей заметки вытекает, что если вместо R рассматривать $G_3(H)$, то сформулированные в [5, 6] результаты останутся справедливыми и в более широких предположениях относительно функции $F(\tau) = |X_0^{\tau} - E|_4^2$.

Учитывая же теорему 9 в [7], легко видеть, что случай $G_2(H)$ существенно не обобщаем в сторону понятия гильбертова кольца, приведенного в [7]. Доказательства соответствующих утверждений в [1, 2] и настоящей заметке по сравнению с работой [5] значительно проще и не используют понятия стохастического интеграла по мартингалу, так как получены на основании прямых оценок (8) и (9) в [1] и (4)—(6) в [2] для стохастических полугрупп. Кроме того, в [1, 2] доказана единственность пределов

$$D(X_s^t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E) \text{ и } D^{-1}(Y_s^t) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E)$$

независимо от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ отрезка $[s, t] \in [0, T]$, отсутствующая в [5, 6]. В работе [8], содержащей те же ошибки, что и работы [5, 6], предложено доказательство единственности указанных пределов для различных последовательностей разбиений $\{\Delta_n\}$ при более общих предположениях непрерывности на полугруппы, чем в [1]. Именно: вместо условий 1.2 или 2.2 работы [1] там требовалось доказать выполнение в каждой точке τ из $[s, t]$ условий

$$(X_{\tau-}^{\tau} - E)(X_{\tau}^{\tau+} - E) = 0 \text{ или } Y_{\tau-}^{\tau} Y_{\tau}^{\tau+} = 0 \pmod P, \tag{3}$$

которые также и необходимы. И хотя в работе [8] указанные ошибки были исправлены, все же следует отметить, что введенное автором «мультипликативное произведение» $X_s^t \otimes U_s^t = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{m_n} (X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + U_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} - E)$ стохастических полугрупп X_s^t и U_s^t не является обобщением рассмотренного в [3] смешанного произведения $X_s^t \boxtimes U_s^t = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{m_n} X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} U_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}$, но только—новой записью величины

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m_n}\left(D\left(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right)+D\left(U_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right)+E\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{n=1}^{m_n}\left(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+D\left(U_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right)\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{m_n}\left(D\left(X_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right)+U_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right),$$

равно как и само новое название представляется неестественным, так как обозначает (учитывая английское происхождение слова мультипликативный) умножаемое произведение.

Таким образом, из работ [1—4] и [5, 6, 8] вытекает, что мультипликативные и аддитивные стохастические полугруппы можно разбить на классы, у которых функции $F(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ либо непрерывны, либо непрерывны во всех точках справа (слева), либо непрерывны в каждой точке справа или слева (в зависимости от точки), либо удовлетворяют условию (3). Эти классы расположены в строго возрастающем порядке по включению и внутри каждого из них отображение D является гомеоморфизмом в норме $|\cdot|_6$.

Задача исследования условий существования $X_s^t \boxed{\times} U_s^t$ для зависимых полугрупп X_s^t и U_s^t по-прежнему остается актуальной.

1. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 2, с. 221—224.
2. *Буцан Г. П.* О первообразных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 4, с. 485—489.
3. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы.— К.: Наук. думка, 1977.— 213 с.
4. *Буцан Г. П.* Стохастические полугруппы: Автореф. дис. ...д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1977.— 28 с.
5. *Чани А. С.* Стохастические полугруппы с независимыми приращениями.— В кн.: Теория случайных процессов. К.: Наук. думка, 1981, № 9, с. 109—115.
6. *Чани А. С.* Групповая структура множества стохастических мультипликативных полугрупп.— В кн.: Теория случайных процессов. К.: Наук. думка, 1981, № 9, с. 117—124.
7. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М.: Наука, 1968.— 664 с.
8. *Чани А. С.* Стохастические полугруппы с независимыми приращениями.: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Донецк, 1981.— 16 с.

Ин-т матем. АН УССР

Поступила в редакцию 27.01.82 г.