УДК 517.9

В. А. Данканич

Квазипериодические решения систем с запаздыванием

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с квазипериодической правой частью вида

$$dx(t)/dt = f(\omega t, x(t), x(t - \Delta)), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_s)$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$ — s-мерная вектор-функция, определенная в области $\mathcal{T}_m \times D \times D$ ($\mathcal{T}_m$ — m-мерный тор, D — область в R), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ — базис частот.

Предположим, что система (1) имеет достаточно гладкое квазипериодическое решение $x^0(t)$ с базисом частот ω. Тогда на торе $\mathcal{T}_m$ будет существовать функция $u^0(\varphi)$ такая, что $x^0(t) = u^0(\omega t)$, и функция $u^0(\varphi)$ будет классическим решением уравнения

$$\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \partial u(\varphi)/\partial\varphi_\nu = f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta)). \tag{2}$$

В дальнейшем через C^m будем обозначать пространство векторов с комплексными коэффициентами, а через Z^m — множество всех m-мерных векторов с целочисленными коэффициентами.

Пусть

$$u_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} u_N^{(n)} \exp[i(n, \varphi)] = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i > 0} (a_N^{(n)} \cos(n, \varphi) + b_N^{(n)} \sin(n, \varphi)), \tag{3}$$

где $u_N^{(n)} \in C^n$, $u_N^{(-n)} = \overline{u_N^{(n)}}$, $a_N^{(n)} \in R^n$, $b_N^{(n)} \in R^n$. Если упорядочить по определенному закону векторы $n \in Z^m$, то полиному $u_N(\varphi)$ поставим в соответствие вещественный вектор-столбец $\vec{u}_N$, составленный из $2n$-мерных вектор-столбцов $(a_N^{(n)}, b_N^{(n)})$, следующих друг за другом сверху вниз в порядке, определенном законом упорядочения векторов $n \in Z^{(m)}$. Таким образом, полиному $u_N(\varphi)$ всегда можно поставить в соответствие $(2sP(N) + s)$-мерный вектор $\vec{u}_N$, где $P(N) = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i > 0} 1$.

Имеют место соотношения

$$\| u_N(\varphi) \|_0 = \| \vec{u}_N \|, \tag{4}$$

$$\partial u'_N(\varphi)/\partial \vec{u}'_N \cdot \vec{u}_N \equiv u''_N(\varphi), \tag{5}$$

где $\partial u'_N(\varphi)/\partial \vec{u}'_N$ — $(s \times (2sP(N) + s))$-мерная матрица Якоби.

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде полинома $u_N(\varphi)$, коэффициенты которого находятся из системы нелинейных уравнений

$$S_N\left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \partial\varphi_N(\varphi)/\partial\varphi_\nu f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))\right) = 0, \tag{6}$$

которую с учетом сказанного выше можно записать в виде

$$\vec{F}_N(\vec{u}_N) = 0, \tag{7}$$

где $\vec{F}_N$ — $(2sP(N) + s)$-мерный вектор.

Полином (3), удовлетворяющий уравнению (6), будем называть приближением Бубнова—Галеркина порядка N, а уравнение (7) — определяющим уравнением.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 1. *Предположим, что система дифференциальных уравнений* (2) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существует решение* $u^0(\varphi)$ *системы* (2), *принадлежащее области* $D_\delta = \{u : u \in R^s,\ \| u^0(\varphi) - u(\varphi) \| \leqslant \delta\} \subset D,\quad \delta > 0,$ *и* $u^0(\varphi) \in H^r(\mathcal{T}_m)$, $r \geqslant (m/2) + 2$;

2) $f(\varphi, u, v) \in C^2(\mathcal{T}_m \times \overline{D} \times \overline{D})$;

3) *существует положительное число* γ_0 *такое, что для любого вектора* $\eta \in R^s$, $\|\eta\| = 1$, *и любых* $(\varphi, u, v) \in \mathcal{T}_m \times D_\delta \times D_\delta$ *выполняются неравенства*

$$\langle \partial f(\varphi, u, v)\eta/\partial u, \eta\rangle \leqslant -2\gamma_0 \|\eta\|^2, \quad | \partial f(\varphi, u, v)/\partial v |_0 \leqslant \gamma_0. \tag{8}$$

Тогда будут существовать числа $N_0 > 0$, $C_1 > 0$ *такие, что при* $N \geqslant N_0$ *будет выполняться соотношение*

$$u_N^0(\varphi) \in D_{\delta/2} = \{u : \| u^0(\varphi) - u(\varphi) \| \leqslant \delta/2\},$$

а вектор $\vec{u}_N^0$, *соответствующий полиному* $u_N^0(\varphi)$, *будет удовлетворять неравенству*

$$\| \vec{F}_N(\vec{u}_N^0) \| \leqslant c_1 N^{-(r-1)}. \tag{9}$$

Доказательство. Используя теорему Соболева о компактности [2], имеем оценку

$$\| u^0(\varphi) - u_N^0(\varphi) \|_0 \leqslant N^{-r} \| u^0(\varphi) \|_r \leqslant \delta/2.$$

С учетом соотношения (4), (9) и соотношения $\| D^\rho f \|_r \leqslant \| f \|_{r+\rho}$ получаем

$$\| \vec{F}(\vec{u}_N^0) \| = \left\| S_N\left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \partial u_N^0(\varphi)/\partial\varphi_\nu - f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))\right) \right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{m} |\omega_\nu| N^{-(r-1)} \| u^0(\varphi) \|_r + 2s | f(\varphi, u, v) | N^{-r} \| u^0(\varphi) \|_r \leqslant C_1 N^{-(r-1)},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим множество

$$D_{\delta_N} = \{\vec{u}_N : \| \vec{u}_N - \vec{u}_N^0 \| \leqslant \delta_N\}, \quad \delta_N = N^{-(m+1)/2}.$$

Пусть $u_N(\varphi)$ — произвольный полином, для которого соответствующий ему вектор $\vec{u}_N \in D_{\delta_N}$. Тогда, учитывая (4) и неравенства

$$|u_{N+1} - u_N|_0 \leqslant \sum_{\|n\| \leqslant N+1} \| u_{N+1}^{(n)} - u_N^{(n)} \| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\| u_{N+1} - u_N \|_0^2} \sqrt{\sum_{\|n\| \leqslant N+1} 1} \leqslant 2^{m/2} (N+1)^{m/2} \| u_{N+1} - u_N \|_0,$$

для всех $N \geqslant N_0$, если выбрать N_0 достаточно большим, получим оценку

$$\| u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi) \| \leqslant | u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi)|_0 \leqslant 2^{m/2} N^{m/2} \| u_N(\varphi) -$$

$$- u_N^0(\varphi) \|_0 \leqslant 2^{m/2} N^{-1/2} < \delta/2. \tag{10}$$

Из (10) находим, что $u_N(\varphi) \in D_\delta$ и вектор-функция $\vec{F}_N(\vec{u}_N)$ определена и дважды непрерывно дифференцируема в D_{δ_N}.

В дальнейшем через $J_N(\vec{u}_N)$ будем обозначать матрицу Якоби левой части уравнения (7), т. е.

$$J_N(\vec{u}_N) = \partial \vec{F}(\vec{u}_N)/\partial \vec{u}_N.$$

Найдем основные свойства матрицы $J_N(\vec{u}_N)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1.

Тогда матрица $J_N(\vec{u}_N^0)$ *невырождена и имеет место оценка* $\| J^{-1}(\vec{u}_N^0) \| \leqslant M$.

Доказательство. Пусть

$$w_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} w_N^{(n)} \exp[i(n, \varphi)] = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i > 0} (c_N^{(n)} \cos(n, \varphi) + a_N^{(n)} \sin(n, \varphi)), \tag{11}$$

$$v_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} v_N^{(n)} \exp[i(n, \varphi)] = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i > 0} (v_{1,N}^{(n)} \cos(n, \varphi) + v_{2,N}^{(n)} \sin(n, \varphi)), \tag{12}$$

и $\vec{w}_N$, $\vec{v}_N$ —соответствующие им $(2sP(N) + s)$-мерные векторы.

Рассмотрим линейную систему

$$J_N(\vec{u}_N)\, \vec{w}_N = \vec{v}_N. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение линейный оператор

$$L(u) = L_1(u) + L_1^\Delta(u), \tag{14}$$

где $L_1(u) = \sum_{\nu=1}^m \omega_\nu \partial/\partial\varphi_\nu - \partial f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))/\partial u$, $L_1^\Delta(u) - \partial f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))/\partial y$ $(y = u(\varphi - \omega\Delta))$, причем $L_1^\Delta(u)\, w(\varphi) = -\partial f(\varphi, u(\varphi), u(\varphi - \omega\Delta))/\partial y\, w(\varphi - \omega\Delta)$. Для выполнения равенства (13) необходимо и достаточно, чтобы при всех $n \geqslant N$ выполнялись условия

$$\partial \left(\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^m \omega_\nu \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} - f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta)) \right) \cos(n, \varphi)\, d\varphi \right) /$$

$$/ \partial \vec{u}_N \vec{w}_N = v_{1,N}^{(n)},$$

$$\partial \left(\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^m \omega_\nu \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \varphi_\nu} - f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta)) \right) \sin(n, \varphi)\, d\varphi \right) /$$

$$/ \partial \vec{u}_N \vec{w}_N = v_{2,N}^{(n)},$$

которые можно переписать в виде

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \vec{u}_N} \vec{w}_N - \partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta)) \right) / $$

$$\partial u \partial u_N(\varphi)/\partial \vec{u}_N \vec{w}_N - \partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))/\partial y \partial u_N(\varphi - \omega\Delta)/$$

$$/\partial \vec{u}_N \vec{w}_N) \cos(n, \varphi)\, d\varphi = v_{1,N}^{(n)},$$

$$\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\nu=1}^{m} \omega_\nu \frac{\partial}{\partial \varphi_\nu} \frac{\partial u_N(\varphi)}{\partial \vec{u}_N} \vec{w}_N - \partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))/\partial u \partial u_N(\varphi)/ \right.$$

$$/\partial \vec{u}_N \vec{w}_N - \partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))/\partial y \partial u_N(\varphi - \omega\Delta)/$$

$$\left. /\partial \vec{u}_N \vec{w}_N \right) \sin(n, \varphi)\, d\varphi = v_{2,N}^{(n)}. \tag{15}$$

Учитывая соотношения (6) и вид оператора $L(u)$, равенства (15), равенство (13) можно записать в виде

$$S_N(L(u_N^0(\varphi))\, w_N(\varphi)) = v_N(\varphi). \tag{16}$$

Рассмотрим уравнение

$$J_N(\vec{u}_N)\, \vec{w}_N = 0, \tag{17}$$

которое, на основании (16), можно записать в виде

$$S_N(L(u_N^0(\varphi)), w_N(\varphi)) = 0. \tag{18}$$

С учетом условий 3 леммы 1 из (18) получаем неравенство

$$0 = (L(u_N^0(\varphi))\, w_N(\varphi), w_N(\varphi))_0 \geqslant$$

$$\geqslant (2\gamma_0 - |\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))/\partial y|_0) \| w_N(\varphi) \|^2, \tag{19}$$

из которого следует, что уравнение (17) при $\vec{u}_N = \vec{u}_N^0$ имеет только тривиальное решение, а следовательно, матрица $J_N(\vec{u}_N^0)$ невырождена.

Неоднородная система (13) при $\vec{u}_N = \vec{u}_N^0$ всегда будет иметь единственное решение.

Далее, из соотношения (16) получаем неравенство

$$(v_N(\varphi), w_N(\varphi))_0 = (L(u_N^0(\varphi))\, w_N(\varphi), w_N(\varphi))_0 \geqslant$$

$$\geqslant (2\gamma_0 - |\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))/\partial y|_0)^{-1} \| w_N(\varphi) \|^2. \tag{20}$$

Отсюда находим оценку

$$\| w_N(\varphi) \|_0 \leqslant (2\gamma_0 - |\partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))/\partial y|_0)^{-1} \| v_N(\varphi) \|_0. \tag{21}$$

Но система (16) эквивалентна системе (13). Поэтому из оценки (21) следует оценка

$$\| J_N^{-1}(\vec{u}_N^0)\, \vec{v}_N \| \leqslant M \| \vec{v}_\Lambda \|, \tag{22}$$

что и требовалось доказать.

Для разности $J_N(\vec{u}_N) - J_N(\vec{u}_N^0)$ имеет место лемма.

Лемма 3. *Предположим, что правая часть системы дифференциальных уравнений* (1) *удовлетворяет условиям леммы* 1. *Тогда для* *произвольного вектора* $\vec{u}_N \in D_{\delta_N}$ *и* $0 < \varkappa < 1$ *будет иметь место оценка*

$$\| J_N(\vec{u}_N) - J_N(\vec{u}_N^0) \| \leqslant \varkappa/M. \tag{23}$$

Доказательство. Возьмем произвольный полином

$$w_N(\varphi) = \sum_{\|n\| \leqslant N} w_N^{(n)} \exp[i(n, \varphi)] = \sum_{\|n\| \leqslant N, n_i > 0} (c_N^{(n)} \cos(n, \varphi) + d_N^{(n)} \sin(n, \varphi))$$

и составим соответствующий ему вектор $\vec{w}_N$. Из определения матриц $J_N(\vec{u}_N)$ и $J_N(\vec{u}_N^0)$ получим оценку

$$\| (J_N(\vec{u}_N) - J_N(\vec{u}_N^0)) \vec{w}_N \| = \| S_N (L(u_N(\varphi) - L(u_N^0(\varphi))) w_N(\varphi) \|_0 \leqslant$$
$$\leqslant | \partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))/\partial u - \partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))/\partial u |_0 \| w_N(\varphi) \|_0 +$$
$$+ | \partial f(\varphi, u_N(\varphi), u_N(\varphi - \omega\Delta))/\partial y - \partial f(\varphi, u_N^0(\varphi), u_N^0(\varphi - \omega\Delta))/\partial y |_0 \times$$
$$\times \| w_N(\varphi - \omega\Delta) \|_0 \leqslant c_2 | f(\varphi, u, y) |_2 | u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi) |_0 \| \vec{w}_N \|, \tag{24}$$

из которой находим неравенство

$$\| J_N(\vec{u}_N) - J_N(\vec{u}_N^0) \| \leqslant c_2 | f(\varphi, u, y) |_2 | u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi) |_0. \tag{25}$$

С учетом выбора области D_δ из неравенства (25) при всех достаточно больших N_0 и $N \geqslant N_0$ получаем

$$\| J_N(\vec{u}_N) - J_N(\vec{u}_N^0) \| \leqslant c_3 N^{m/2} \| u_N(\varphi) - u_N^0(\varphi) \|_0 \leqslant c_4 N^{-1/2} \leqslant \varkappa/M. \tag{26}$$

Используя доказанные выше леммы и теорему II из [1], докажем существование приближений Бубнова—Галеркина для системы дифференциальных уравнений (1) и сходимость этих приближений к точному квазипериодическому решению.

Имеет место такая теорема.

Теорема. *Предположим, что система дифференциальных уравнений* (1) *удовлетворяет условиям* 1)—3) *леммы* 1.

Тогда будет существовать достаточно большое число N_0 *такое, что при* $N \geqslant N_0$ *уравнение* (2) *будет иметь единственное периодическое по* φ *решение* $u^*(\varphi)$, *для которого выполняется неравенство*

$$| u^0(\varphi) - u^*(\varphi) |_0 \leqslant c_5 N^{-r+m/2+1}.$$

Доказательство. Пусть $u^0(\varphi)$ — известное периодическое решение уравнения (2), $u_N^0(\varphi) = S_N(u^0(\varphi))$ и $\vec{u}_N^0$ — соответствующий ему вектор. Тогда согласно лемме 1 в области $D_{\delta/2} = \{u(\varphi) : \| u(\varphi) - u^0(\varphi) \| \leqslant \delta/2\} \subset D$ будет выполняться неравенство $\| \vec{F}_N(\vec{u}_N^0) \| \leqslant c_1 N^{-(r-1)}$, т. е. условие 5) теоремы II из [1] для $N \geqslant N_0$, где N_0 достаточно велико, если положить $l = l_N = c_1 N^{-(r-1)}$.

Выделим множество

$$\Omega_{\delta_N} = \{\vec{u}_N : \| \vec{u}_N - \vec{u}_N^0 \| \leqslant \delta_N\}, \quad \delta_N = N^{-m+1/2}.$$

Тогда согласно лемме 2 можно выбрать N_0 таким достаточно большим, что при $N \geqslant N_0$ для $\vec{F}(\vec{u}_N)$ будут выполняться условия 3) теоремы II из [1]. Из леммы 3 следует, что всегда можно выбрать N_0 настолько большим, чтобы выполнялись условия 4) теоремы II. Выбирая N_0 из неравенства $Mc_1 N_0^{-(r-1)}/(1 - \varkappa) \leqslant N_0^{-m+1/2}$, можно удовлетворить условию 1) теоремы II. Следовательно, при любом $N \geqslant N_0$ существует единственное решение уравнения (2) $u_N^*(\varphi)$, для которого имеет место оценка

$$\| u_N^0(\varphi) - u_N^*(\varphi) \|_0 \leqslant Mc_1 N^{-(r-1)}/(1-x). \tag{27}$$

Учитывая неравенство (10), оценку (27) можно записать в виде

$$| u_N^0(\varphi) - u_N^*(\varphi) |_0 \leqslant 2^{m/2} N^{m/2} \| u_N^0(\varphi) - u_N^*(\varphi) \| \leqslant c_5 N^{-r+m/2+1},$$

что и требовалось доказать.

1. *Урабе М.* Метод Галеркина для нелинейных периодических систем.— Механика, 1966, 97, № 3, с. 3—34.
2. *Берс Л. и др.* Уравнения с частными производными.— М. : Мир, 1966.— 351 с.
3. *Мозер Ю.* Быстро сходящийся метод итераций.— Успехи мат. наук, 1968, 32, вып. 4, с. 174—238.
4. *Парасюк И. О.* Построение и исследование квазипериодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук.— К., 1978.— 146 с.

Ужгород. гос. ун-т

Поступила в редакцию
26.10.82