УДК 519.4

В. С. Трохименко

К теории рестриктивных алгебр Менгера

В современной алгебре в последнее время большое внимание уделяется изучению суперпозиций многоместных функций, что объясняется их приложениями в математике, кибернетике, программировании и других отраслях науки [1, 2]. При этом появляется необходимость аксиоматизации некоторых конкретных классов алгебр многоместных функций. Наряду с операцией суперпозиции в алгебрах функций довольно часто рассматриваются также другие естественно определяемые операции, которые позволяют удобным образом выражать различные зависимости между функциями [3]. Одной из таких операций есть операция рестриктивного умножения функций, т. е. операция ограничения одной функции на области определения другой, впервые рассмотренная В. В. Вагнером для одноместных функций

[4]. Совместное изучение этой операции с операцией суперпозиции, а также операцией теоретико-множественного пересечения в случае многоместных функций проводилось в работах [5, 6], в которых рестриктивные алгебры Менгера и рестриктивные P-алгебры многоместных функций были охарактеризованы конечными системами элементарных аксиом. При рассмотрении же множеств реверсивных многоместных функций, т. е. функций взаимно однозначных по каждой переменной в отдельности, ранее удалось охарактеризовать только рестриктивные P-алгебры [6]. Характеристика рестриктивных алгебр Менгера реверсивных n-местных функций при $n \geqslant 2$ до сих пор найдена не была и приводится в настоящей статье.

1. *Алгеброй Менгера ранга* n называется упорядоченная пара $(G; o)$, где G — множество, а o — $(n+1)$-арная операция на G, удовлетворяющая тождеству *сверхассоциативности*

$$x[y_1 \dots y_n][z_1 \dots z_n] = x[y_1[z_1 \dots z_n] \dots y_n[z_1 \dots z_n]] \tag{1}$$

(здесь $x[y_1 \dots y_n]$ обозначает элемент $o(x, y_1, \dots, y_n)$ множества G). Легко видеть, что алгебра Менгера ранга 1 суть полугруппа. *Рестриктивной алгеброй Менгера* будем называть алгебру с двумя операциями $(G, o, \rhd)$, где $(G; o)$ — алгебра Менгера, $(G; \rhd)$ — идемпотентная полугруппа, удовлетворяющую тождествам

$$x[y_1 \rhd z_1 \dots y_n \rhd z_n] = y_1 \rhd \dots \rhd y_n \rhd x[z_1 \dots z_n], \tag{2}$$

$$(x \rhd y)[z_1 \dots z_n] = x[z_1 \dots z_n] \rhd y[z_1 \dots z_n], \tag{3}$$

$$x \rhd y \rhd z = y \rhd x \rhd z. \tag{4}$$

Нетрудно показать, что из условий (2), (4) вытекает тождество

$$x[\overline{w}|_i\, y \rhd z] = y \rhd x[\overline{w}|_i\, z] \tag{5}$$

для каждого $i = 1, \dots, n$, где $x[\overline{w}|_i\, y] = x[w_1 \dots w_{i-1} y w_{i+1} \dots w_n]$. Рестриктивная алгебра Менгера $(G; o, \rhd)$ ранга $n \geqslant 2$ называется *специальной*, если для любых $i = 1, \dots, n$; $u, x, y \in G$; $\overline{w} \in G^n$ справедлива импликация

$$u[\overline{w}|_i\, x] = u[\overline{w}|_i\, y] \to u[\overline{w}|_i\, x] \rhd x = u[\overline{w}|_i\, y] \rhd y. \tag{6}$$

Для $n = 1$ соответствующее определение, которое отличается от нашего, можно найти в [7].

На рестриктивной алгебре Менгера $(G; \sigma, \rhd)$ рассмотрим бинарные отношения $\alpha_d = \{(x, y) \mid x \rhd y = x\}$, $\alpha_s = \{(x, y) \mid y \rhd x = x\}$, которые, как известно [4], являются соответственно частичным отношением порядка и отношением квазипорядка, удовлетворяющие свойствам $\alpha_d \subset \alpha_s$ и $x \rhd y \leqslant y$, $x \rhd y \sqsubset x$, $x \rhd y \sqsubset y$ для любых $x, y \in G$, где $x \leqslant y$ обозначает $(x, y) \in \alpha_d$, а $x \sqsubset y$ — $(x, y) \in \alpha_s$.

2. Пусть A — множество. Множество всех частичных отображений множества A^n в A обозначим через $\mathscr{F}(A^n, A)$, элементы которого будем называть n-местными функциями. На $\mathscr{F}(A^n, A)$ рассмотрим $(n+1)$-арную операцию суперпозиции O и бинарную операцию *рестриктивного умножения* $\rhd$, определяемые условиями:

$$(\overline{a}, c) \in \varphi[\psi_1 \dots \psi_n] \leftrightarrow (\exists \overline{b})[(\overline{a}, b_1) \in \psi_1 \wedge \dots \wedge (\overline{a}, b_n) \in \psi_n \wedge (\overline{b}, c) \in \varphi],$$

$$(\overline{a}, b) \in \varphi \rhd \psi \leftrightarrow \overline{a} \in \mathrm{pr}_1\, \varphi \wedge (\overline{a}, b) \in \psi,$$

где $\varphi, \psi, \psi_1, \dots, \psi_n \in \mathscr{F}(A^n, A)$, $\overline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in A^n$, $\overline{a} \in A^n$, $b, c \in A$, $\varphi[\psi_1 \dots \psi_n] = O(\varphi, \psi_1, \dots, \psi_n)$ и $\mathrm{pr}_1\, \varphi$ — область определения функции φ.

Если Φ — замкнутое относительно этих операций подмножество множества $\mathscr{F}(A^n, A)$, то, как следует из [5], система $(\Phi; O, \rhd)$ — рестриктивная алгебра Менгера. Более того, там же показано, что всякая абстрактная рестриктивная алгебра Менгера ранга n изоморфна некоторой рестриктивной алгебре Менгера n-местных функций.

n-Местная функция $f \in \mathscr{F}(A^n, A)$ называется реверсивной, если для любых $i = 1, \ldots, n$, $\bar{a} \in A^n$, $b_1, b_2 \in A$ выполняется условие

$$f(\bar{a}|_i b_1) = f(\bar{a}|_i b_2) \to b_1 = b_2.$$

Нетрудно показать, что всякая рестриктивная алгебра Менгера реверсивных многоместных функций специальна. В связи с этим возникает вопрос, будет ли абстрактная специальная рестриктивная алгебра Менгера изоморфно представима при помощи реверсивных многоместных функций. Ответ на этот вопрос приводится ниже.

3. Пусть $(G; o, \triangleright)$ — специальная рестриктивная алгебра Менгера ранга $n \geqslant 2$. Для каждого элемента $g \in G$ определим на ней семейство бинарных отношений $(\varepsilon_g^m)_{m=0,1,2,\ldots}$, определяемых следующим образом:

а) $(g_1, g_2) \in \varepsilon_g^0 \leftrightarrow g_1 \triangleright g_2 = g_2 \triangleright g_1 \wedge g \sqsubset g_1 \wedge g \sqsubset g_2$;

б) $(g_1, g_2) \in \varepsilon_g^m$, если и только если $g \sqsubset g_1 = u[\bar{w}|_q c]$, $g \sqsubset g_2 = u[\bar{w}|_q d]$, $(s[\bar{v}|_r c], z) \in \varepsilon_g^{m-1}$, $(z, s[\bar{v}|_r d]) \in \varepsilon_g^{m-1}$ для некоторых $q, r \in \{1, \ldots, n\}$; $\bar{w}, \bar{v} \in G^n$; $c, d, z \in G$; $u \in G \cup \{e_q\}$; $s \in G \cup \{e_r\}$, где по определению полагаем $e_i[\bar{x}|_i y] = y$, $e_i \notin G$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $\bar{x} \in G^n$, $y \in G$.

Предложение 1. *Для каждого $m = 0, 1, 2, \ldots$ отношение ε_g^m частично рефлексивно (т. е. для всякого g_1 такого, что $g \sqsubset g_1$ выполняется $(g_1, g_1) \in \varepsilon_g^m$), симметрично и $\varepsilon_g^m \subset \varepsilon_g^{m+1}$.*

Частичная рефлексивность отношений ε_g^m доказывается методом математической индукции, после чего остальные два условия вытекают непосредственно из определения этих отношений.

Предложение 2. *Для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$ и всех $g, g_1, g_2 \in G$ отношение ε_g^m удовлетворяет условию*

$$(g_1, g_2) \in \varepsilon_g^m \to g \triangleright g_1 = g \triangleright g_2. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $(g_1, g_2) \in \varepsilon_g^\circ$, т. е. $g_1 \triangleright g_2 = g_2 \triangleright g_1$ и $g \sqsubset g_1$, $g \sqsubset g_2$. По определению отношения α_s имеем $g_1 \triangleright g = g$ и $g_2 \triangleright g = g$. Следовательно, из $g \triangleright g_1 \triangleright g_2 = g \triangleright g_2 \triangleright g_1$ по (4) получаем $g_1 \triangleright g \triangleright g_2 = g_2 \triangleright g \triangleright g_1$, т. е. $g \triangleright g_2 = g \triangleright g_1$. Итак, при $m = 0$ условие (7) справедливо. Допустим, что оно выполняется при $m = k$, и покажем, что (7) имеет место для $m = k + 1$. Пусть $(g_1, g_2) \in \varepsilon_g^{k+1}$, т. е. $g \sqsubset g_1 = u[\bar{w}|_q c]$, $g \sqsubset g_2 = u[\bar{w}|_q d]$, $(s[\bar{v}|_r c], z) \in \varepsilon_g^k$, $(z, s[\bar{v}|_r d]) \in \varepsilon_g^k$ для некоторых $q, r, u, s, c, d, z, \bar{w}, \bar{v}$. Согласно допущению из последних двух условий получаем $g \triangleright s[\bar{v}|_r c] = g \triangleright z$ и $g \triangleright z = g \triangleright s[\bar{v}|_r d]$, поэтому $g \triangleright s[\bar{v}|_r c] = g \triangleright s[\bar{v}|_r d]$. Учитывая (5), будем иметь $s[\bar{v}|_r g \triangleright c] = s[\bar{v}|_r g \triangleright d]$. Следовательно, по (6) получим $s[\bar{v}|_r g \triangleright c] \triangleright g \triangleright c = s[\bar{v}|_r g \triangleright d] \triangleright g \triangleright d$. Используя идемпотентность операции $\triangleright$ и условия (4), (5), из последнего равенства выводим

$$s[\bar{v}|_r c] \triangleright g \triangleright c = s[\bar{v}|_r d] \triangleright g \triangleright d. \tag{8}$$

Так как $(s[\bar{v}|_r c], z), (z, s[\bar{v}|_r d]) \in \varepsilon_g^k$, то согласно определению отношения ε_g^k $g \sqsubset s[\bar{v}|_r c]$ и $g \sqsubset s[\bar{v}|_r d]$, т. е. $s[\bar{v}|_r c] \triangleright g = g$ и $s[\bar{v}|_r d] \triangleright g = g$. Поэтому из (8) следует $g \triangleright c = g \triangleright d$. Отсюда имеем $u[\bar{w}|_q g \triangleright c] = u[\bar{w}|_q g \triangleright d]$, т. е. $g \triangleright u[\bar{w}|_q c] = g \triangleright u[\bar{w}|_q d]$, что означает $g \triangleright g_1 = g \triangleright g_2$. Итак, (7) справедливо для $m = k+1$. Значит, по методу математической индукции оно выполняется для любого m. Предложение доказано.

Следствие. *Для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$; $i = 1, \ldots, n$; $g, g_1, g_2, x \in G$; $\bar{y} \in G^n$ выполняются условия:*

$$(g_1, g_2) \in \varepsilon_{g_1}^m \to g_1 \leqslant g_2, \tag{9}$$

$$(g_1, g_2) \in \varepsilon_g^m \wedge g \sqsubset x[\bar{y}|_i g_2] \to g \sqsubset x[\bar{y}|_i g_1]. \tag{10}$$

1. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных.— К. : «Вища школа», 1976.— 589 с.
2. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести.— М. : Изд-во литер. по строит., 1968.— 415 с.
3. *Чан ким Ты.* Асимптотические решения уравнений в частных производных высшего порядка.— Укр. мат. журн., 34, № 2, 1982, с. 255—259.
4. *Nguyen Van Dao.* Nonlinear oscillation of high order system. National center for scientific research of Việt-Nam.— Hà-Nội 1979.

Ханой. политехн. ин-т

Поступила в редакцию 22.06.82 г.