УДК 517.928.4

В. П. Скрипник

Нелинейные системы с малой матрицей при производной

В работе рассматривается семейство нелинейных систем с матрицей при производной, стремящейся в L^2 к нулю. На правые части систем также наложено условие сходимости в L^2. В отличие от работ [1—7], а также других работ, посвященных дифференциальным уравнениям с малым параметром при производной, здесь изучается сходимость решений систем с малой матрицей при производной в L^2. На порядок стремления к нулю характеристических корней малой матрицы не накладывается никаких ограничений. В классическом случае, как видно из [3, 4], ограничения необходимы.

Обозначения. E — множество значений параметров ε, которое принадлежит топологическому пространству, удовлетворяющему первой аксиоме отделимости. Предполагается, что $\varepsilon \in E$, $\varepsilon_0 \in \overline{E}$, $\varepsilon_0 \notin E$. $\max \lambda \times [S(A)] = \max\{\lambda_i\}$, $\min \lambda [S(A)] = \min\{\lambda_i\}$, где λ_i — характеристические корни симметрической матрицы $S(A) = (A + {}^*)/2$; $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в евклидовом пространстве; $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $\frac{\partial}{\partial u} f(u)$ — матрица Якоби вектор-функции $f(u)$; $([a, b], Q_1)$ — множество абсолютно непрерывных на отрезке $[a, b]$ вектор-функций со значениями на множестве Q_1; $\{[a, b], M, Q_2\}$ — множество вектор-функций, удовлетворяющих условию Липшица на отрезке $[a, b]$ с константой M, значения которых принадлежат множеству Q_2.

Определение. Пусть семейство вектор-функций $\{F(t, x, \varepsilon)\}$ и вектор-функция $\widehat{F}(t, x)$ определены на $[a, b] \times Q$, где $Q \in R^m$. Предположим, что для любой вектор-функции $\varphi \in P$, где P — некоторое множество вектор-функций, определенных на $[a, b]$ и со значениями на Q, справедливо соотношение $F(t, \varphi(t), \varepsilon)$, $\widehat{F}(t, \varphi(t)) \in L^2[a, b]$. Будем говорить, что семейство $\{F(t, x, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ сходится в $L^2[a, b]$ к вектор-функции $\widehat{F}(t, x)$ равномерно на P, если для любого $\delta > 0$ существует такая окрестность $U(\varepsilon_0)$, что при $\varepsilon \in U(\varepsilon_0) \cap E$ и $\varphi \in P$ выполняется неравенство $\int\limits_a^b \| F(\tau, \varphi(\tau), \varepsilon) - \widehat{F}(\tau, \varphi(\tau)) \|^2 d\tau < \delta$.

Рассмотрим семейство систем

$$A(t, \varepsilon) u' = f_1(t, u, v, \varepsilon), \quad v' = f_2(t, u, v, \varepsilon), \tag{1}$$

где $A(t, \varepsilon)$ — матрицы порядка $l \times l$, $u, f_1 \in R^l$, $v, f_2 \in R^m$.

Совокупность следующих условий для систем (1) обозначим ω. Матрицы $A(t, \varepsilon)$ — симметрические, невырождены, абсолютно непрерывны, а их производные ограничены на $[a, b]$. Семейство $\{A(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ сходится к нулю. Вектор-функции $f_2(t, u, v, \varepsilon)$ определены на $[a, b] \times Q_1 \times Q_2$, где $Q_1 = \{u : \|u\| \leqslant H_1 < \infty\}$, $Q_2 = \{v : \|v\| \leqslant H_2 < \infty\}$, причем при фиксированных u и v измеримы по t, а при фиксированных t непрерывны по u и v, $\|f_2(t, u, v, \varepsilon)\| \leqslant M < \infty$. Вектор-функции $f_1(t, u, v, \varepsilon)$ определены и ограничены на $[a, b] \times Q_1 \times Q_2$, причем при фиксированных u и v измеримы по t, а при фиксированных t непрерывны по u и v. Семейство $\{f_1(t, u, v, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ сходится равномерно на $([a, b], Q_1) \times$

$\times \{[a, b], M, Q_2\}$ к вектор-функции $\hat{f}_1(t, u, v)$, которая в области $[a, b] \times Q_1 \times Q_2$ имеет непрерывные частные производные по t, u и v. Матрица $\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t, u, v)$ невырождена, существует непрерывный корень $u = \varphi \times \times (t, v)$ уравнения $\hat{f}_1(t, u, v) = 0$.

Теорема 1. *Пусть:* 1) *для семейства систем* (1) *выполняются условия* ω; 2) $\max \lambda [S(A'(t, \varepsilon) + 2\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t, u, v))] \leqslant -\mu$, $\mu > 0$; 3) *существует такое семейство решений* $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ *систем* (1), *определенное на* $[a, b]$, *что* $u(t, \varepsilon) \in Q_1$, $v(t, \varepsilon) \in Q_2$. *Тогда из семейства* $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ *можно извлечь последовательность, которая сходится в* $L^2[a, b]$.

Доказательство. Почти всюду на $[a, b]$ имеют место равенства

$$v'(t, \varepsilon) = f_2(t, u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), \varepsilon).$$

В силу теоремы Арцела существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящаяся к ε_0, что последовательность $\{v(t, \varepsilon_n)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Обозначим $\hat{v}(t) = \lim_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} v(t, \varepsilon_n)$, $\hat{u}(t) = \varphi(t, \hat{v}(t))$. Так как $\hat{v}(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то $\hat{u}(t)$ также непрерывна на этом отрезке. Легко видеть, что $\hat{v}(t)$ на $[a, b]$ удовлетворяет условию Липшица с константой M, а потому абсолютно непрерывна. В силу теоремы о производной неявной функции почти всюду на $[a, b]$ вектор-функция $\hat{u}(t)$ дифференцируема. При этом имеет место равенство $\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial u}\hat{u}'(t) + \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial v}\hat{v}'(t) = 0$. Поэтому $\hat{u}'(t) = -\left[\frac{\partial f_1}{\partial u}\right]^{-1}\left(\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial t} + \frac{\partial \hat{f}_1}{\partial v}\hat{v}'(t)\right)$. В силу непрерывности матрицы $\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1 \times \times (t, u, v)$ существует такое $\delta > 0$, что на $[a, b] \times Q_1 \times Q_2$ $\left|\det \frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t, u, v)\right| \geqslant \delta$. Поэтому производная $\hat{u}'(t)$ ограничена на $[a, b]$, а вектор-функция $\hat{u}(t)$ абсолютно непрерывна.

В дальнейшем нам понадобится следующее представление:

$$\hat{f}_1(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n)) = \hat{f}_1(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n)) - \hat{f}_1(t, \hat{u}(t), \hat{v}(t)) =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{d\sigma}\hat{f}_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) + (1 - \sigma)\hat{u}(t), \sigma v(t, \varepsilon_n) + (1 - \sigma) v(t))\, d\sigma =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) + (1 - \sigma)\hat{u}(t), \sigma v(t, \varepsilon_n) + (1 - \sigma)\hat{v}(t))(u(t, \varepsilon_n) -$$

$$- \hat{u}(t))\, d\sigma + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial v}\hat{f}_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) + (1 - \sigma)\hat{u}(t), \sigma v(t, \varepsilon_n) +$$

$$+ (1 - \sigma)\hat{v}(t))(v(t, \varepsilon_n) - \hat{v}(t))\, d\sigma.$$

Почти всюду на $[a, b]$ имеют место равенства

$$A(t, \varepsilon_n) u'(t, \varepsilon_n) = f_1(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n), \varepsilon_n). \tag{2}$$

Обозначим $w(t, \varepsilon_n) = u(t, \varepsilon_n) - u(t)$, $h(t, \varepsilon_n) = \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial v} f_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) +\right.$

$$+ (1-\sigma)\, u(t),\ \sigma v(t, \varepsilon_n) + (1-\sigma)\, \hat{v}(t))\, d\sigma \Bigg) (v(t, \varepsilon_n) - \hat{v}(t)) + f_1(t,\ u(t,\ \varepsilon_n),$$

$v(t, \varepsilon_n),\ \varepsilon_n) - \hat{f}_1(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n)) - A(t, \varepsilon_n)\, \varphi'(t,\ \hat{v}(t))$.

Легко видеть, что последовательность $\{h(t,\ \varepsilon_n)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к нулю.

В силу (2) почти всюду на $[a, b]$ имеют место равенства

$$A(t, \varepsilon_n)\, w'(t, \varepsilon_n) = \Bigg(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} \hat{f}_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) + (1-\sigma)\, \hat{u}(t),\ \sigma v(t, \varepsilon_n) +$$

$$+ (1-\sigma)\, \hat{v}(t))\, d\sigma \Bigg) w(t, \varepsilon_n) + h(t, \varepsilon_n). \tag{3}$$

Умножив правую и левую части (3) скалярно на $w(t,\ \varepsilon_n)$ и осуществив некоторые преобразования, получим:

$$(A(t, \varepsilon_n)\, w(t, \varepsilon_n),\ w(t, \varepsilon_n))' = \Bigg(\Bigg(\int_0^1 \Bigg(A'(t, \varepsilon_n) + 2\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) +$$

$$+ (1-\sigma)\, \hat{u}(t), \sigma v(t, \varepsilon_n) + (1-\sigma)\, \hat{v}(t)\Bigg) d\sigma\Bigg) w(t, \varepsilon_n),\ w(t, \varepsilon_n)\Bigg) +$$

$$+ 2\, (h(t, \varepsilon_n),\ w(t, \varepsilon_n)). \tag{4}$$

Из последовательности $\{A(t,\ \varepsilon_n)\}$ можно извлечь подпоследовательность, которая почти всюду на $[a,\ b]$ сходится к нулю. В целях простоты подпоследовательность запишем в виде $\{A(t, \varepsilon_n)\}$. Пусть $c,\ d \in [a, b]$, $c < d$, такие, что $\lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} A(c, \varepsilon_n) = \lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} A(d, \varepsilon_n) = 0$. Интегрируя (4) по отрезку $[c, d]$ и учитывая неравенства

$$\Bigg(\Bigg(\int_0^1 \Bigg(A'(t, \varepsilon_n) + 2\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) + (1-\sigma)\, \hat{u}(t),\ \sigma v(t, \varepsilon_n) +$$

$$+ (1-\sigma)\, \hat{v}(t))\Bigg) d\sigma\Bigg) w(t, \varepsilon_n),\ w(t, \varepsilon_n)\Bigg) = \int_0^1 \Bigg(S\Bigg(A'(t, \varepsilon) + 2\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t, \sigma u(t, \varepsilon_n) +$$

$$+ (1-\sigma)\, \hat{u}(t),\ \sigma v(t, \varepsilon_n) + (1-\sigma)\, \hat{v}(t))\Bigg) w(t, \varepsilon_n),\ w(t, \varepsilon_n)\Bigg) d\sigma \leqslant -\mu \| w(t, \varepsilon_n)\|,$$

$$\int_c^d (h(\tau, \varepsilon_n),\ w(\tau, \varepsilon_n))\, d\tau \leqslant \Bigg(\int_c^d \| h(\tau, \varepsilon_n)\|^2 d\tau\Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int_c^d \| w(\tau, \varepsilon_n)\|^2 d\tau\Bigg)^{\frac{1}{2}},$$

получаем неравенства

$$\mu \int_c^d \| w(\tau, \varepsilon_n)\|^2 d\tau \leqslant (A(c, \varepsilon_n) w(c, \varepsilon_n),\ w(c, \varepsilon_n)) - (A(d, \varepsilon_n) w(d, \varepsilon_n),\ w(d, \varepsilon_n)) +$$

$$+ 2\Bigg(\int_c^d \| h(\tau, \varepsilon_n)\|^2 d\tau\Bigg)^{\frac{1}{2}} \Bigg(\int_c^d \| w(\tau, \varepsilon_n)\|^2 d\tau\Bigg)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Так как последовательность $\{w(t, \varepsilon_n)\}$ ограничена в $L^2[a, b]$, то из (5) следует, что $\lim\limits_{\varepsilon_n \to \varepsilon_0} \int_c^d \| w(\tau, \varepsilon_n)\|^2 d\tau = 0$.

Так как

$$\overline{\lim_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0}}\int_a^b \|w(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau \leqslant \overline{\lim_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0}}\int_a^c \|w(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau + \overline{\lim_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0}}\int_d^b \|w(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau,$$

а разности $c - a$ и $b - d$ могут быть сколь угодно малыми, то

$$\lim_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0}\int_a^b \|w(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau = 0.$$

Это значит, что последовательность $\{u(t,\varepsilon_n), v(t,\varepsilon_n)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть: 1) для семейства систем* (1) *выполняются условия* ω; 2) $\min\lambda\left[S\left(A'(t,\varepsilon) + 2\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t,u,v)\right)\right] \geqslant \nu > 0$; 3) *существует такое семейство решений* $\{u(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon)\}$ *систем* (1), *определенное на* $[a, b]$ *что* $u(t,\varepsilon)\in Q_1$, $v(t,\varepsilon)\in Q_2$. *Тогда из семейства* $\{u(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon)\}$ *можно извлечь последовательность, которая сходится в* $L^2[a, b]$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, получим равенства (4). Из них следуют неравенства

$$\nu\int_c^d \|w(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau \leqslant (A(d,\varepsilon_n)\,w(d,\varepsilon_n), w(d,\varepsilon_n)) - (A(c,\varepsilon_n)\,w(c,\varepsilon_n),$$

$$w(c,\varepsilon_n)) + 2\left(\int_c^d \|h(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_c^d \|w(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $c, d\in[a, b]$, $c < d$, $\lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0} A(c,\varepsilon_n) = \lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0} A(d,\varepsilon_n) = 0$, а разности $c - a$ и $b - d$ могут быть сколь угодно малыми. Поэтому $\lim\limits_{\varepsilon_n\to\varepsilon_0}\int_a^b \|w(\tau,\varepsilon_n)\|^2 d\tau = 0$ и последовательность $\{u(t,\varepsilon_n), v(t,\varepsilon_n)\}$ сходится в $L^2[a, b]$. Теорема 2 доказана.

При доказательстве теорем 1 и 2 не накладывались никакие ограничения на выбор корня уравнения $\hat{f}_1(t,u,v) = 0$. Это значит, что при выполнении условий теорем 1 и 2 уравнение $\hat{f}_1(t,u,v) = 0$ в рассматриваемой области имеет единственный корень $u = \varphi(t, v)$.

Дополнительно к условиям ω предположим, что для систем (1) выполняются следующие условия. Семейство $\{f_2(t,u,v,\varepsilon)\}$ при $\varepsilon\to\varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ сходится к вектор-функции $f_2(t,u,v)$ равномерно на $([a, b], Q_1)\times\{[a, b], M, Q_2\}$; $\hat{f}_2(t,u,v)$ ограничена при фиксированных u и v, измерима по t и удовлетворяет условию Липшица по u и v. Новые условия для систем (1) обозначим ω_1.

Наряду с семейством систем (1) рассмотрим вырожденную систему

$$0 = \hat{f}_1(t,u,v), \quad v' = \hat{f}_2(t,u,v). \tag{6}$$

Решением системы (6) на отрезке $[a, b]$ называется вектор-функция $(u(t), v(t))$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $(u(t), v(t))$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$; 2) $(u(t), v(t))$ удовлетворяет первому уравнению системы (6) всюду, а второму — почти всюду на $[a, b]$.

Теорема 3. *Пусть: 1) для семейства систем* (1) *выполняются условия* ω_1; 2) $\max\lambda\left[S\left(A'(t,\varepsilon) + 2\frac{\partial}{\partial u}\hat{f}_1(t,u,v)\right)\right] \leqslant -\mu$ $(\mu > 0)$; 3) *существует такое семейство решени[illegible]* $t,\varepsilon), v(t,\varepsilon)\}$ *системы* (1), *определенное на* $[a, b]$, *что* $\|u(t,\varepsilon)\| \leqslant \overline{H}_1 < H_1$, $\|v(t,\varepsilon)\| \leqslant \overline{H}_2 < H_2$, $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} v(a,\varepsilon) = v^0$. *Тогда семейство* $\{u(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon)\}$ *при* $\varepsilon\to\varepsilon_0$ *в* $L^2[a, b]$ *сходится к некоторому решению системы* (6) $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$ *такому, что* $\hat{v}(a) = v^0$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что существует такая последовательность $\{\varepsilon_n\}$, сходящая к ε_0, что последовательность $\{u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к некоторой вектор-функции $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$, где при $t \in [a, b]$ $\|\hat{u}(t)\| \leqslant \overline{H}_1$, $\|\hat{v}(t)\| \leqslant \overline{H}_2$, $\hat{u}(t) = \varphi(t, \hat{v}(t))$.

При $t \in [a, b]$ имеют место равенства

$$v(t, \varepsilon_n) = v(a, \varepsilon_n) + \int_a^t f_2(\tau, u(\tau, \varepsilon_n), v(\tau, \varepsilon_n), \varepsilon_n)\, d\tau. \quad (7)$$

Существует такое число K, что при $u', u'' \in Q_1$ и $v', v'' \in Q_2$

$$\|\hat{f}_2(t, u'', v'') - \hat{f}_2(t, u', v')\| \leqslant K(\|u'' - u'\| + \|v'' - v'\|).$$

В силу этого имеет место следующая оценка:

$$\|f_2(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n), \varepsilon_n) - \hat{f}_2(t, \hat{u}(t), \hat{v}(t))\| \leqslant \|f_2(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n), \varepsilon_n) -$$
$$- \hat{f}_2(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n))\| + K(\|u(t, \varepsilon_n) - \hat{u}(t)\| + \|v(t, \varepsilon_n) - \hat{v}(t)\|).$$

Отсюда следует, что последовательность $\{f_2(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n), \varepsilon_n)\}$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{f}_2(s, \hat{u}(t), \hat{v}(t))$. Из последовательности $\{f_2(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n), \varepsilon_n)\}$ можно извлечь подпоследовательность, которая почти всюду на $[a, b]$ сходится к $\hat{f}_2(t, \hat{u}(t), \hat{v}(t))$. В целях простоты подпоследовательность запишем в виде $\{f_2(t, u(t, \varepsilon_n), v(t, \varepsilon_n), \varepsilon_n)\}$. Переходя к пределу в (7) при $\varepsilon_n \to \varepsilon_0$, получаем равенство $\hat{v}(t) = v^0 + \int_a^t \hat{f}_2(\tau, \hat{u}(\tau), \hat{v}(\tau))\, d\tau$. Так как $\hat{u}(t) = \varphi(t, \hat{v}(t))$, то вектор-функция $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$ является решением системы (6) таким, что $\hat{v}(a) = v^0$.

Рассмотрим систему

$$v' = \hat{f}_2(t, \varphi(t, v), v). \quad (8)$$

В силу теоремы о дифференцировании неявной функции вектор-функция $\varphi(t, v)$ в $[a, b] \times \tilde{Q}_2$, где $\tilde{Q}_2 = \{v : \|v\| \leqslant \tilde{H}_2\}$, $\overline{H}_2 < \tilde{H}_2 < H_2$, имеет непрерывные частные производные. Учитывая это, нетрудно показать, что вектор-функция $\hat{f}_2(t, \varphi(t, v), v)$ при фиксированных $v \in \tilde{Q}_2$ измерима по t и удовлетворяет условию Липшица по $v \in \tilde{Q}_2$. Так как $\|\hat{v}(t)\| \leqslant \overline{H}_2$, то $\hat{v}(t)$ — единственное решение системы (8) на $[a, b]$, удовлетворяющее условию $\hat{v}(a) = v^0$.

Предположим, что семейство $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ не сходится к $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$. Тогда существует такое число $\delta_1 > 0$ и такая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, сходящаяся к ε_0, что

$$\int_a^b (\|u(\tau, \varepsilon_k) - \hat{u}(\tau)\|^2 + \|v(\tau, \varepsilon_k) - \hat{v}(\tau)\|^2)\, d\tau \geqslant \delta_1.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, можно показать, что из последовательности $\{u(t, \varepsilon_k), v(t, \varepsilon_k)\}$ можно извлечь подпоследовательность, которая в $L^2[a, b]$ сходится к некоторой вектор-функции $(\overline{u}(t), \overline{v}(t))$, являющейся решением системы (6). При этом $\overline{v}(a) = v^0$, $\overline{u}(t) = \varphi(t, \overline{v}(t))$. Вектор-функция $\overline{v}(t)$ является решением системы (8). В силу единственности $\overline{v}(t) \equiv \hat{v}(t)$, а следовательно, и $\overline{u}(t) \equiv \varphi(t, \hat{v}(t)) \equiv \hat{u}(t)$.

Таким образом, упомянутая подпоследовательность в $L^2[a, b]$ сходится к $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$, а следовательно, семейство $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ в $L^2[a, b]$ сходится к $\hat{u}(t), \hat{v}(t))$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть*: 1) *для семейства систем* (1) *выполняются условия* ω_1; 2) $\min \lambda \left[S\left(A'(t, \varepsilon) + 2\frac{\partial}{\partial u} \hat{f}_1(t, u, v) \right) \right] \geqslant \nu > 0$; 3) *существует такое семейство решений* $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ *системы* (1), *определенное на отрезке* $[a, b]$, *что* $\| u(t, \varepsilon) \| \leqslant \overline{H}_1 < H_1$, $\| v(t, \varepsilon) \| \leqslant \overline{H}_2 < H_2$, $\lim\limits_{\varepsilon \to \varepsilon_0} v(a, \varepsilon) = v^0$. *Тогда семейство* $\{u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)\}$ *при* $\varepsilon \to \varepsilon_0$ *в* $L^2[a, b]$ *сходится к некоторому решению системы* (6) $(\hat{u}(t), \hat{v}(t))$ *такому, что* $\hat{v}(a) = v^0$.

Доказательство теоремы 4 со ссылкой на теорему 2 аналогично доказательству теоремы 3.

1. *Скрипник В. П.* Вырожденные системы и малый параметр при старшей производной.— Мат. сб., 1964, **65**, № 3, с. 338—356.
2. *Скрипник В. П.* Вырожденные системы и малый параметр при производной.— Дифференц. уравнения, 1980, **16**, № 3, с. 454—461.
3. *Тихонов А. Н.* Системы, содержащие малые параметры при старших производных.— Мат. сб., 1952, **31**, № 3, с. 575—586.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М. : Наука, 1973.— 272.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях.— М. : Госуниверситет, 1978.— 106 с.
6. *Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М. : Наука, 1975.— 247 с.
7. *Скрипник В. П.* Вырождающий параметр и вырожденные уравнения.— Литов. мат. сб., 1980, **20**, № 1, с. 165—173.

Лесотехнический институт,
Москва

Поступила в редакцию
7.01.83