УДК 517.5

И. Е. Овчаренко

О двумерных степенных моментных последовательностях

В настоящей работе с помощью подхода, подобного использованному в [1, 2] для получения специальных интегральных представлений различных классов положительно-определенных ядер, исследуются двумерные степенные моментные последовательности.

1. K_λ — представление M-последовательностей.

Определение 1. *Пусть $a_{n,m}$, $n, m \in \mathbf{Z}_+$, — вещественная последовательность, такая, что ядро $a_{n+k,m+l}$ — положительно-определенное* (п. о.):

$$K(n, m;\ l, k) := a_{n+k, m+l} \gg 0. \tag{1}$$

Последовательность $a_{n,m}$ будем называть M-последовательностью, если существует двумерная мера $\sigma(\varepsilon)$ $(=\sigma(d\lambda;\ d\mu))$, такая, что

$$a_{n,m} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda;\ d\mu). \tag{2}$$

Совокупность двумерных мер $\sigma(d\lambda;\ d\mu)$, задающих представление M-последовательности $a_{n,m}$ в виде (2) будем обозначать $\mathfrak{S}_a$.

Как известно, двумерные последовательности, обладающие свойством (1), не обязательно M-последовательности, а для последних мера в (2), вообще говоря, не единственна.

Определение 2. *M-последовательность будем называть определенной, если мера в представлении (2) единственна.*

Теорема 1. *Пусть a_{nm}, n, $m \in \mathbf{Z}_+$, — вещественная п. о. последовательность. Для того чтобы она была M-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление*

$$a_{n,m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_\lambda(m)\, \rho(d\lambda), \tag{3}$$

где $\rho(d\lambda)$ — мера на прямой, задающая представление последовательности $a_{n,0}$ в виде

$$a_{n,0} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \rho(d\lambda), \tag{4}$$

$s_\lambda(m)$ — отображение $(\lambda;\ m) \to R^1$, обладающее свойствами: 1) *$\forall \lambda \in R^1$, $s_\lambda(m)$ — одномерная последовательность, такая, что $s_\lambda(l+k)$ есть п. о. ядро;* 2) *$\forall m \in \mathbf{Z}_+$ — отображение $\lambda \to s_\lambda(m)$, ρ — измеримая функция;* 3) *$s_\lambda(0) = 1$, ρ-почти всюду.*

Доказательство. M-последовательность $a_{n,m}$ допускает представление (2). Полагая в (2) $m = 0$, получаем (4), где $\rho(d\lambda) = \pi_\lambda \sigma(d\lambda;\ d\mu)$, т. е. $\rho(\Delta) = \sigma(\Delta \times (-\infty, \infty))$. Введем эрмитово-положительную (э. п.) функцию

$$F(x;\ y) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[i(\lambda x + \mu y)]\, \sigma(d\lambda;\ d\mu). \tag{5}$$

Согласно теореме 2 из [2]

$$F(x;\, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x)\, \psi(\lambda;\, y)\, \rho(d\lambda), \tag{6}$$

где $\forall\lambda$ $\psi(\lambda;\, y)$ — непрерывная э. п. функция, следовательно,

$$\psi(\lambda;\, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(i\mu y)\, \eta_\lambda(d\mu). \tag{7}$$

При этом для каждого борелевского множества $B \subset R^1$ функция $\lambda \to \eta_\lambda(B)$ ρ-измерима.

Определим теперь п. о. последовательности

$$s_\lambda(m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu^m \eta_\lambda(d\mu). \tag{8}$$

Интегралы (8) существуют при всех λ. В самом деле, т. к. σ имеет все моменты, то $F(x;\, y) \in C^\infty(R^2)$, а $F(0;\, y) \in C^\infty(R^1)$. Полагая в (6) $x = 0$, получаем

$$F(0;\, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda;\, y)\, \rho(d\lambda). \tag{9}$$

Каждое из «слагаемых» в (9) — п. о. ядро. Известно [3], что гладкость п. о. ядра наследуется его п. о. слагаемыми. Таким образом, $\psi(\lambda;\, y) \in C^\infty$, а значит, меры $\eta_\lambda(d\mu)$ обладают всеми моментами. Из равенств (5) и (6) вытекает, что

$$\sigma(\Delta' \times \Delta'') = \int\limits_{\Delta'} \left\{ \int\limits_{\Delta''} \eta_\lambda(d\mu) \right\} \rho(d\lambda),$$

$$\sigma(d\lambda;\, d\mu) = \eta_\lambda(d\mu)\, \rho(d\lambda). \tag{10}$$

Далее,

$$a_{n,m} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda;\, d\mu) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \eta_\lambda(d\mu)\, \rho(d\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_\lambda(m)\, \rho(d\lambda).$$

Полагая в (10) $\Delta'' = R^1$, получаем, что для любого промежутка $\Delta' \subset R^1$

$$\rho(\Delta') = \int\limits_{\Delta'} \{Var\, \eta_\lambda(d\mu)\}\, \rho(d\lambda).$$

Откуда $s_\lambda(0) = Var\, \eta_\lambda(d\tau) = 1$, ρ почти всюду.

Введем определение.

Определение 3. *Пусть $\rho(d\lambda)$ — мера на R^1, $\eta_\lambda\, d\tau)$, $\lambda \in R^1$, — семейство мер на R^1. Семейство $\eta_\lambda(d\tau)$ будем называть ρ-вогласованным, если функция $\lambda \to \eta_\lambda(B)$ ρ-измерима при любом борелевском $B \subset R^1$.*

Доказательство достаточности. Пусть последовательность $a_{n,m}$ представима в виде (3). Так как каждое ядро $s_\lambda(m+n)$ п. о., то оно допускает представление

$$s_\lambda(m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu^m \eta_\lambda(d\mu), \tag{11}$$

где $\eta\ (d\mu)$ — некоторые меры на R^1, определяемые, вообще говоря, не единственным образом. Покажем, что семейство $\mu_\lambda(d\mu)$ в (11) можно выбрать ρ-согласованным. Не нарушая общности, можно считать, что для всех $s\ (m)$ имеет место неопределенный случай проблемы моментов. Как известно [1], в неопределенном случае проблемы моментов равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(dt)}{t-z} = [w_{11}(z)\, v(z) + w_{12}(z)]\, [w_{21}(z)\, v(z) + w_{22}(z)]^{-1}$$

$$(= W(z) : v(z)) \tag{12}$$

задает одно-однозначное соответствие между решениями $\eta(dt)$ и функциями $\tau(z)$, принадлежащими классу функций $\tilde{R}$ (пополненному функцией $\tau(z) \equiv \equiv \infty$), т. е. голоморфных в $\mathbf{C}_+$ функций, имеющих там неотрицательную мнимую часть.

Функции $w_{jk}(z)$, $j, k = 1, 2,$ — суть вещественные целые функции, строящиеся каноническим образом по заданной моментной последовательности и образующие матрицу-функцию — $W(z) = \| w_{jk}(z) \|_{j,k=1}^2$ (м.-ф. Гамбургера — Неванлинна), обладающую рядом характерных свойств. Из способа построения м.-ф. $W(z)$ следует, что семейство м.-ф. $W_\lambda(z)$, построенных по моментным последовательностям $s_\lambda(m)$ будет ρ-измеримым при каждом фиксированном z.

Если в правой части (12) положить $W(z) := W_\lambda(z)$; $\tau(z) := \tau_\lambda(z)$, причем $\tau_\lambda(z) \in \tilde{R}$ по z и ρ-измерима при каждом z, то из сказанного выше и формулы обращения Стилтьеса следует, что $\eta_\lambda(B)$ — суть ρ-измеримые функции при любом борелевском множестве $B \subset R^1$, т. е. семейство $\eta_\lambda(d\tau)$ получается ρ-согласованным. Заметим, что в качестве функции $\tau_\lambda(z)$ можно взять функцию $\tau_\lambda(z) \equiv \tau = \bar{\tau}$.

Строим двумерную меру

$$\sigma(d\lambda; d\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \oplus\, \eta_\lambda(d\tau)\, \rho(d\lambda), \tag{13}$$

т. е. полагаем на прямоугольниках $\Delta' \times \Delta''$

$$\sigma(\Delta' \times \Delta'') := \int_{\Delta'} \left\{ \int_{\Delta''} \eta_\lambda(d\tau) \right\} \rho(d\lambda)$$

и распространяем ее затем каноническим образом. Построенная мера $\sigma(d\mu; d\mu) \in \mathfrak{S}_a$. Действительно,

$$a_{n,m} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_\lambda(m)\, \rho(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mu^m \eta_\lambda(d\mu) \right\} \rho(d\lambda) =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \eta_\lambda(d\mu)\, \rho(d\lambda) = \iint_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda; d\mu).$$

Замечание. Факт дезинтегрируемости меры σ по отношению к мере ρ имеет место в очень общей ситуации [4]. Мы предпочли использовать здесь технику работы [2], т. к. 1) становится наглядным существование всех моментов у $\eta_\lambda(d\mu)$, 2) в [2] приведена полезная в конкретных случаях процедура дезинтеграции меры σ.

Теорема 1 позволяет ввести

Определение 4. *Функции $s_\lambda(m)$, фигурирующие в теореме 1, будем называть ρ_σ-каналовыми функциями M-последовательности $a_{n,m}$, а меры $\eta_\lambda(d\tau)$, задающие интегральное представление* (11), *ρ_σ-каналовыми мерами последовательности $a_{n,m}$.*

Заметим, что при фиксировании $\sigma \in \mathfrak{S}_a$ ρ_σ-каналовые функции определяются однозначно на множестве полной ρ-меры.

2. Неравенства для M-последовательностей.

Теорема 2. *Пусть $a_{n,m}$, $n, m \in \mathbf{Z}_+$, — M-последовательность, $P_N(\lambda)$ — ортогональные многочлены первого рода, построенные по последовательности $a_{n,0}$, $P_N(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \gamma_{k,N} \lambda^k$. Тогда*

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{N} a_{n,m} \gamma_{n,N} \right|^2 \leqslant a_{0,2m}. \tag{14}$$

Доказательство. Покажем, что в представлении (3) функция $s_\lambda(m) \in L^2_\rho$. Действительно, полагая в (3) $n = 0$, получаем, что $s_\lambda(m) \in L^1_\rho$, а из неравенства $|s_\lambda(m)|^2 \leqslant s_\lambda(2m)$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s_\lambda(m)|^2 \rho(d\lambda) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} s_\lambda(2m)\rho(d\lambda) = a_{0,2m}. \tag{15}$$

С учетом (12) получаем равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_N(\lambda)\, s_\lambda(m)\, \rho(d\lambda) = \sum_{n=0}^{N} a_{n,m}\gamma_{n,N}, \tag{16}$$

дающее значения коэффициентов Фурье функции $s_\lambda(m)$, относительно ортонормированной в L^2_ρ системы $\{P_N(\lambda)\}_{N=1}^{\infty}$. Неравенство (14) следует из неравенства Бесселя и (16).

Замечание. Из неравенства $|s_\lambda(m)|^{2^k} \leqslant s_\lambda(2^k m)$, которое вытекает из п. о. $s_\lambda(m)$, следует, что $s_\lambda(m) \in L_\rho^{2^k}$.

3. Достаточные условия интегральной представимости п. о. последовательностей. Пусть $a_{n,m}$ — вещественная п. о. последовательность. Через $\mathfrak{S}_{1,\lambda}$ будем обозначать совокупность всех мер $\rho(d\lambda)$, задающих представление последовательности $a_{n,0}$ в виде (4).

Пусть $H_{0,\lambda}$—гильбертово пространство, являющееся замыканием множества многочленов в метрике, порожденной последовательностью $a_{n,0}$, а заданная п. о. последовательность $a_{n,m}$ такова, что в $H_{0,\lambda}$ при каждом m сходятся ряды

$$\sum_{N=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{N}\gamma_{k,N}a_{k,m}\right)P_N(\lambda)\,(:= \mathring{s}_\lambda(m)). \tag{17}$$

Определение 5. *Последовательность $\mathring{s}_\lambda(m)$, определяемую равенством (17), будем называть $\mathring{K}_\lambda$-представляющей функцией последовательности $a_{n,m}$.* (Как видно из (17), $\mathring{K}_\lambda$-представляющие функции вычисляются по самой последовательности $a_{n,m}$ и не требуют знания каких-либо мер, связанных с представлениями последовательности $a_{n,m}$.)

Теорема 3. *Пусть $a_{n,m}$ — п.о. последовательность такая, что левые части в (14) конечны. Справедливо равенство*

$$a_{n,m} = \langle \lambda^n, \mathring{s}_\lambda(m)\rangle. \tag{18}$$

Здесь $\mathring{s}_\lambda(m)$ — $\mathring{K}_\lambda$-представляющая функция последовательности $a_{n,m}$, $\langle , \rangle$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве $H_{0;\lambda}$.

Доказательство. Ввиду неравенства (14) $\mathring{K}_\lambda$-представляющую функцию $\mathring{s}_\lambda(m)$ можно определить равенством (17). Образуем матрицы $B_N = |b_{jk}|/ = \| \langle \lambda^j, P_k\rangle \|_{j,k=1}^{N}$; $\Gamma_N = \|\gamma_{k,m}\|_{k,m=1}^{N} = \|\gamma_{kM}\|_{k,M=1}^{N}$. Если $y_N = (1;\ \lambda: \ldots \lambda^N)$ и $x_N = (P_1(\lambda), \ldots P_N(\lambda))$, то $y_N = x_N B_N$, $x_N = y_N\Gamma_N$. Матрицы Γ_N и B_N — невырожденные нижнетреугольные: $\Gamma_N B_N = B_N\Gamma_\Lambda = \mathrm{I}$. Имеем

$$\langle \mathring{s}_\lambda(m), \lambda^k\rangle = \sum_{N=1}^{\infty}\left\{\sum_{r=0}^{N}\gamma_{rN}a_{rm}\right\}\langle P_N(\lambda), \lambda^k\rangle = \sum_{N=1}\sum_{r=0}^{N}\gamma_{rN}a_{rm}\langle P_N(\lambda), \lambda^k\rangle =$$

$$= \sum_{r=0}^{N} a_{rm}\sum_{N=1}\gamma_{rN}\langle P_N(\lambda), \lambda^k\rangle = \sum_{r=0}^{N} a_{rm}\delta_{rk} = a_{km}.$$

Определение 6. *Пусть H_0 — гильбертово пространство, полученное пополнением множества многочленов по метрике, порожденной п. о. последовательностью $a_{n,0}$, $\varphi_m(\lambda)$ — последовательность функций из H_0, ρ — мера из $\mathfrak{S}_{1;\lambda}$. Будем говорить, что $\varphi_m(\lambda)$ — Π_ρ-продолжаема, если* *существует последовательность* $f_m(\lambda) \in L^2_\rho$, *такая, что* 1) $P_{H_0} f_m(\lambda) = \varphi_m(\lambda)$, P_{H_0} — *ортопроектор на* H_0; 2) *ядра* $f_{m+n}(\lambda)$ — *п. о. на множестве полной* ρ-*меры.*

Последовательности, обладающие свойством 2), будем называть ρ-вполне позитивными.

Теорема 4. *Пусть* $a_{n,m}$, $n, m \in \mathbf{Z}_+$, — *вещественная п. о. последовательность. Для того чтобы она была М-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы* 1) *выполнялись неравенства*

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^{N} a_{k;m} \gamma_{k,N} \right|^2 < C_m, \ m = 0, 1, 2, \ldots, \quad C_m = a_{0,2m}; \tag{19}$$

2) *последовательность*

$$\overset{\circ}{s}_\lambda (m) := \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} a_{k,m} \gamma_{k,N} \right) P_N (\lambda) \tag{20}$$

была Π_ρ-*продолжаемой при некоторой* $\rho \in \mathfrak{S}_{1,\lambda}$.

Мера $\sigma(d\lambda; d\mu) \in \mathfrak{S}_a$ точно тогда, когда она представима в виде (10), где $\rho \in \mathfrak{S}_{1,\lambda}$, а $\eta_\lambda(d\mu)$ — ρ-согласованное семейство мер, задающих интегральное представление ρ-вполне позитивного продолжения последовательности $s_\lambda(m)$.

Теорема 4 показывает, что один из путей получения интегральных преставлений двумерных п. о. последовательностей состоит в решении задачи о Π_ρ-«подъеме» последовательности $\overset{\circ}{s}_\lambda(m) \in H_0$ до ρ-вполне позитивной последовательности.

Здесь существенно различаются случаи, когда последовательность $a_{n,0}$ — определенная (он исследуется ниже) и $a_{n,0}$ — неопределенная. Чтобы подчеркнуть особенность последнего случая, заметим, что $\overset{\circ}{s}_\lambda(m)$ может быть отождествлена с целой функцией нулевой степени, имеющей специальную структуру. Ввиду замечания п. 2 п. о. $\overset{\circ}{s}_\lambda(m)$, ρ почти всюду, будет лишь в очень специальных случаях и задача о Π_ρ-«подъеме» требует специальных рассмотрений.

4. λ-полуопределенные М-последовательности.

Определение 7. *Вещественную п. о. последовательность будем называть* λ-*полуопределенной, если последовательность* $a_{n,0}$ — *определенная.*

Теорема 5. *Пусть* $a_{n,m}$, $n, m \in \mathbf{Z}_+$, — *вещественная* λ-*полуопределенная п. о. последовательность. Для того чтобы она была М-последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы* 1) *выполнялись неравенства* (19); 2) *последовательностью* $\overset{\circ}{s}_\lambda(m)$, *определяемая равенством* (20), *была* ρ-*вполне позитивной,* $\rho \in \mathfrak{S}_{1,\lambda}$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 4. В необходимой части надо проверить лишь условие 2). В силу теорем 1 и 3 справедливы представления (3) и (18). Отсюда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \left[s_\lambda(m) - s_\lambda(m)\right] \rho(d\lambda) = 0. \tag{21}$$

В силу теоремы М. Рисса многочлены плотны в L^2_ρ, тогда из (21) следует, что $s_\lambda(m) = s_\lambda(m)$, ρ почти всюду. Последовательность же $s_\lambda(m)$ ρ-вполне позитивна.

Из теорем 4 и 5 следует

Теорема 6. *Пусть* $a_{n,m}$ — λ-*полуопределенная* М-*последовательность. Совокупность* $\mathfrak{S}_a$ *совпадает с совокупностью двумерных мер* $\tilde{\sigma}$, *зада-*

ваемых на прямоугольниках равенством

$$\tilde{\sigma}(\Delta' \times \Delta'') = \int_{\Delta'} \left\{ \int_{\Delta''} \tilde{\eta}_\lambda(d\tau) \right\} \rho(d\lambda), \tag{22}$$

в котором $\{\tilde{\eta}_\lambda\}$ — *ρ-согласованное семейство каналовых мер.*

Теорему 6 естественно дополнить аналитическим описанием семейства $\{\tilde{\eta}_\lambda\}$. Множество $E \subset R^1$ тех λ, при которых последовательности $s_\lambda(m)$ определенные, ρ-измеримо. Действительно, функции $D_k(z; \lambda)$ — ортогональные многочлены 1-го рода, построенные по $s_\lambda(m)$ — ρ-измеримы. Функция $\sum_{k=1}^{\infty} |D_k(z_0; \lambda)|^2 = \sup \sum_{k=1}^{n} |D_k(z_0; \lambda)|^2$ измерима, а значит, и множество, где $\sum_{k=1}^{\infty} |D_k(z_0; \lambda)|^2 = \infty$, измеримо. В силу критерия Гамбургера оно совпадает с E. На множестве $E_1 = R \setminus E$ определена м.-ф. $W(\lambda; z) = \| w_{jk}(\lambda; z) \|_{j,k=1}^2$ Гамбургера — Неванлинна, элементы которой, в силу их конструкции, будут ρ-измеримыми функциями $\forall z \in \mathbf{C}^1$. Как уже отмечалось, ρ-согласованное семейство λ-каналовых мер последовательности $a_{n,m}$ получается, если в равенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_\lambda(dt)}{t - z} = W(\lambda; z) \odot \tau_\lambda(z) \tag{23}$$

«параметр» $\tau_\lambda(z)$ выбрать $\breve{R}$-функцией по z, ρ-измеримой по λ. Определяя меры $\eta_\lambda(dt)$ при $\lambda \in R \setminus E$ равенством (23), а при $\lambda \in E$ как задающие представление последовательности $\mathring{s}_\lambda(m)$, мы получим ρ-согласованное семейство λ-каналовых мер. Любое ρ-согласованное семейство получается указанным образом.

Приведенные построения позволяют получить критерий определенности M-последовательностей и исследовать вопрос, когда у меры $\sigma(d\lambda; d\mu)$ в представлении (2) некоторая область плоскости $(\lambda; \mu)$ свободна от масс.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
2. *Левин Б. Я., Овчаренко И. Е.* Продолжение эрмитово-положительных функций, заданных в полосе. — Теория функций, функцион. анализ. и их прилож., 1967, № 5, с. 68—83.
3. *Крейн М. Г.* Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах.— Укр. мат. журн., 1949, 11, № 4, с. 64—98.
4. *Бурбаки Н.* Интегрирование.— М. : Наука, 1967.— 395 с.

Физико-технический ин-т
низких температур, Харьков

Поступила в редакцию
04.05.82