УДК 519.41—47

Л. А. Курдаченко

FC-группы с ограниченной периодической частью

В статье продолжается нахождение условий вложимости FC-группы в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения. Результаты работ [1—4] показывают, что решение вопроса о том, будет ли FC-группа вкладываться в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения, существенно зависит как от строения ее периодической части, так и от строения фактор-группы по ней.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ класс конечных групп, а через $\mathfrak{A}'$ — класс абелевых групп без кручения. Как и в [5], здесь удобно использовать символику Ф. Холла. Через $SD\mathfrak{F}$ обозначим класс подгрупп прямых произведений конечных групп, а через $SD(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{A}')$ — класс групп, каждая из которых вкладывается в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения. Через $t(G)$ обозначим периодическую часть FC-группы G.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — подкласс $SD\mathfrak{F}$. Будем говорить, что абелева группа A без кручения принадлежит классу $A(\mathfrak{X})$, если всякая FC-группа G, у которой $t(G) \in \mathfrak{X}$, а $G/t(G) \cong A$, вкладывается в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения.*

Если класс $\mathfrak{X}$ порождается одной группой T (т. е. состоит из всех изоморфных копий T и всех единичных групп), то вместо $A(\mathfrak{X})$ будем писать $A(T)$.

Можно показать, что класс $A(T)$ во многом определяется классами $A(C)$, где C — центральная подгруппа T. Более точно, $A(T) \leqslant A(C)$. Поэтому возникают две ситуации: 1) порядки элементов центра $\zeta(T)$ группы T ограничены в совокупности; 2) период $\zeta(G)$ бесконечен. Первая ситуация и рассматривается в настоящей статье в более общей форме: находятся классы $A(T)$, где T — группа конечного периода, вложимая в прямое произведение конечных групп. Нахождение этих классов приводит в то же время к получению достаточных условий вложимости FC-группы в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения.

Теорема 1. *Пусть G — FC-группа, $T = t(G)$, $A = G/T$. Если T имеет конечный период и вкладывается в прямое произведение конечных групп, а фактор-группа A/A^q конечна для любого $q \in \Pi(\zeta(T))$, то G вкладывается в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения.*

Теорема 2. *Пусть T — группа конечного периода, вложимая в прямое произведение конечных групп, $\pi = \Pi(\zeta(T))$. Класс $A(T)$ состоит из тех и только тех абелевых групп A без кручения, у которых фактор-группа A/A_q конечна для любого $q \in \pi$.*

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп периода n, вложимых в прямые произведения конечных групп. Тогда $A(\mathfrak{X})$ — класс тех и только тех абелевых групп A без кручения, у которых фактор-группа A/A^n конечна.*

Назовем группу G ко-слойно-конечной, если фактор-группа G/G^n конечна для любого $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$, где $G^n = \mathrm{гр}(g^n \mid g \in G)$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех групп конечного периода, вложимых в прямые произведения конечных групп. Тогда $A(\mathfrak{X})$ — класс всех абелевых ко-слойно-конечных групп без кручения.*

Лемма 1. *Пусть G — локально-нормальная группа, $[G, G] \leqslant H \leqslant G$ и $\Pi(\zeta(H) \cap \Pi(G/H) = \varnothing$, $L \lhd H$, $Z = \zeta(G) \cap H$, индекс $|H : L|$ конечен, $ZL \neq L$, $K = \bigcap_{g \in G} L^g$. Тогда будет существовать подгруппа F, обладающая следующими свойствами: $F \leqslant H$, $F \lhd G$, индекс $|H : F|$ конечен, $F \cap ZK = K$.*

Доказательство. Из включения $H/K \leqslant \prod_{g \in G} H/L^g$, вытекающего из теоремы Рэмака (см., например, [5], теорема I.1. 2), следует финитная аппроксимируемость группы H/K, а из конечности индекса $|H : L|$ — конечность периода этой фактор-группы. Имеем $ZK \cap L = K(Z \cap L)$. Так как $Z \cap L = (Z \cap L)^g \leqslant L^g$ для любого $g \in G$, то $Z \cap L \leqslant \bigcap_{g \in G} L^g = K$. Отсюда следует, что $ZK \cap L = K$. Из соотношений $ZK/K \cong ZK/(ZK \cap L) \cong ZL/L$ получаем конечность ZK/K. Поэтому в H/K существует подгруппа конечного индекса $E/K \lhd H/K$, имеющая с ZK/K единичное пересечение. Выберем конечную подгруппу $Y/K \lhd G/K$, удовлетворяющую равенству $H/K = (Y/K) \cdot (E/K)$. Положим $C/K = C_{G/K}(Y/K)$, $N/K = (H/K) \cap (C/K)$, $M/K = (E/K) \cap (C/K)$. Выберем в подгруппе $NE/K = (N/K)(E/K)$ два элемента g_1, g_2. Тогда $g_1 = hu_1$, $h \in N/K$, $u_1 \in E/K$. Так как $H/K = (Y/K) \cdot (E/K)$, то $g_2 = h_1 u_2$, $h_1 \in Y/K$, $u_2 \in E/K$. Имеем $[g_1, g_2] = [hu_1, h_1 u_2] = [h,$

$h_1u_2]^{u_1}[u_1, h_1u_2] = ([h, u_2][h, h_1]^{u_2})^{u_1}[u_1, u_2][u_1, h_1]^{u_2} = [h, u_2]^{u_1}\ [u_1, u_2]\ [u_1, h_1]^{u_2}$ (ведь $h \in C_{G/K}(Y/K)$, так что $[h, h_1] = 1$). Из соотношения $E/K \lhd H/K$ следует включение $[h, u_2]$, $[u_1, h_1] \in E/K$, т. е. и $[g_1, g_2] \in E/K$. Это означает, что фактор-группа NE/E абелева. Из соотношений $N/M = N/N \cap E \cong NE/E$ следует, что абелевой будет и группа N/M. Положим $U = \bigcap_{g \in G} M^g$. Так как $N \lhd G$, то $N/M^g = N^g/M^g \cong N/M$ для любого элемента $g \in G$, поэтому из вложения $N/U \leqslant \prod_{g \in G} N/M^g$ получаем, что N/U — абелева группа. Так как $U/K \leqslant E/K$, то $U \cap ZK = K$. Из конечности периода N/U получаем равенство $N/U = \bigtimes_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k/U$, где S_k/U—силовская q_k—подгруппа N/U, q_k—простое число, $1 \leqslant k \leqslant n$. Так как группа G локально-нормальная, то S_k/U включает в себя такую подгруппу $P_k/U \lhd G/U$, что индекс $|S_k:P_k|$ конечен и $P_k/U \leqslant \zeta(H/U)$ (ведь H/U — почти абелева локально-нормальная группа, а потому она конечна над центром). Обозначим через Q_k/U нижний слой P_k/U. Предположим, что пересечение $X_k/U = (ZU/U) \cap (Q_k/U)$ неединично. Тогда $q_k \in \Pi(Z) \subset \Pi(\zeta(H))$ и из условий леммы следует, что $q_k \notin \Pi(G/H)$. Но тогда $q_k \notin \Pi((G/U)/$ $/C_{G/U}(Q_k/U))$. Повторяя дословно рассуждения леммы 2 работы [2], получим разложение $(X_k/U) \times (B_k/U) = Q_k/U$, при этом $B_k/U \lhd G/U$. Рассуждая аналогично и используя индукцию по длине цокольного ряда подгруппы P_k/U (этот ряд конечен, ибо период N/U конечен), получим подгруппу $D_k/U \lhd G/U$, имеющую в P_k/U конечный индекс и имеющую с P_k/U единичное пересечение. Если же для числа k пересечение X_k/U единично, то полагаем $D_k/U = P_k/U$. Пусть теперь $F/U = \bigtimes_{1 \leqslant k \leqslant n} D_k/U$. Тогда $F \lhd G$, индекс $|H:F|$ конечен и $F \cap ZU = U$. Далее, $K = U \cap ZK = F \cap ZU \cap ZK =$ $= F \cap ZK$. Лемма доказана.

Пусть $H \in SD\mathfrak{F}$. Согласно [2], в группе H существует система подгрупп $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, удовлетворяющая следующим условиям (условиям рэмаковской вложимости): 1) $H_\lambda \lhd H$, $\lambda \in \Lambda$; 2) H/H_λ конечна, $\lambda \in \Lambda$; 3) $(1) =$ $= \bigcap_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$; 4) каждый элемент H не содержится только в конечном множестве подгрупп H_λ.

Лемма 2. *Пусть G — локально-нормальная группа, $[G, G] \leqslant H \leqslant G$, $H \in SD\mathfrak{F}$ и $\Pi(\zeta(H)) \cap \Pi(G/H) = \varnothing$. Тогда G включает в себя такую нормальную подгруппу A, что $H \cap A = (1)$ и $G/A \in SD\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $Z = \zeta(G) \cap H$, а $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — система подгрупп из H, удовлетворяющая приведенным выше условиям 1)—4) рэмаковской вложимости. Через Λ_1 обозначим подмножество тех индексов $\lambda \in \Lambda$, для которых $ZH_\lambda \neq H_\lambda$. Для произвольного $\lambda \in \Lambda_1$ положим $K_\lambda =$ $= \bigcap_{g \in G} H_\lambda^g$. Из леммы 1 следует, что для любого $\lambda \in \Lambda_1$ существует подгруппа F_λ, обладающая свойствами: $F_\lambda \leqslant H$, $F_\lambda \lhd G$, $F_\lambda \cap ZK_\lambda = K_\lambda$, индекс $|H:F_\lambda|$ конечен.

Рассмотрим фактор-группу G/F_λ. Ее коммутант входит в конечную подгруппу H/F_λ. В частности, $C_\lambda/F_\lambda = C_{G/F_\lambda}(H/F_\lambda)$ — нильпотентная подгруппа, ступень нильпотентности которой не больше 2. Пусть $\sigma_\lambda = \Pi(ZF_\lambda/F_\lambda)$ и V_λ/F_λ — силовская σ'_λ-подгруппа C_λ/F_λ. Так как $\sigma_\lambda \subset \Pi(Z) \subset \Pi(\zeta(H))$, то силовская σ_λ-подгруппа C_λ/F_λ входит в H/F_λ. Отсюда следует, что V_λ/F_λ имеет в C_λ/F_λ, а значит, и во всей группе G/F_λ, конечный индекс. Из выбора V_λ следует, что $V_\lambda \cap ZF_\lambda = F_\lambda$.

Из леммы 1 работы [2] следует, что всякий элемент H не содержится только в конечном множестве подгрупп $\{K_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_1\}$, а из включения $K_\lambda \leqslant$ $\leqslant F_\lambda$ получаем, что каждый элемент H не содержится только в конечном множестве подгрупп семейства $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_1\}$. Пусть $x \in G$, $U = (x)^G$. Подгруппа $U \cap H$ конечна, поэтому существует такое конечное множество

$\Delta \subset \Lambda_1$, что $U \cap H \leqslant F_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda_1 \setminus \Delta$. Далее, пересечение $(UF_\lambda/F_\lambda) \cap (H/F_\lambda)$ единично, а потому $UF_\lambda/F_\lambda \leqslant C_{G/F\lambda}(H/F_\lambda)$. Из соотношений $UF_\lambda/F_\lambda \cong \cong U/U \cap F_\lambda = U/U \cap H \cong UH/H \leqslant G/H$ следует, что $\Pi(UF_\lambda/F_\lambda) \cap \sigma_\lambda = \varnothing$, поэтому $UF_\lambda/F_\lambda \leqslant V_\lambda/F_\lambda$. Итак, $g \in V_\lambda$ для $\lambda \in \Lambda_1 \setminus \Delta$. Но тогда отображение $g \mapsto (gV_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_1}$ задает вложение фактор-группы G/V, $V = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} V_\lambda$, в группу $\mathop{\times}\limits_{\lambda \in \Lambda_1} G/V_\lambda$. В частности, $G/V \in SD\mathfrak{F}$.

Обозначим через Z_∞ верхний гиперцентр группы G. Из следствия II.3.9. книги [5] получаем соотношение $G/Z_\infty \in SD\mathfrak{F}$. Положим $A = V \cap Z_\infty$. Из теоремы Рэмака следует вложение $G/A \leqslant (G/V) \times (G/Z_\infty)$, так что $G/A \in \in SD\mathfrak{F}$. Рассмотрим пересечение $A \cap H$. Поскольку $A \cap H \lhd G$, то из $A \cap H \neq \neq (1)$ вытекает, что $(1) \neq A \cap H \cap \zeta(G) = A \cap Z$. Имеем $A \cap Z \leqslant V \cap Z = = \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} V_\lambda\right) \cap Z = \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} V_\lambda\right) \cap \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} ZF_\lambda\right) \cap Z = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} (V_\lambda \cap ZF_\lambda) \cap Z = \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} F_\lambda\right) \cap \cap Z = \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} F_\lambda\right) \cap \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} ZK_\lambda\right) \cap Z = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} (F_\lambda \cap ZK_\lambda) \cap Z = \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} K_\lambda\right) \cap Z \leqslant \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} (H_\lambda \cap \cap Z)$. Но из выбора множества Λ_1 следует, что $Z \cap \left(\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda_1} H_\lambda\right) = (1)$. Таким образом, $A \cap Z = (1)$. Это означает, что $A \cap H = (1)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — локально-нормальная группа, H — ее нормальная подгруппа конечного индекса. Если $H \in SD\mathfrak{F}$, то и $G \in SD\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как $H \in SD\mathfrak{F}$, то в H существует семейство подгрупп $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, удовлетворяющих условиям 1) — 4) рэмаковской вложимости. Положим $K_\lambda = \bigcap\limits_{g \in G} H_\lambda^g$. Поскольку индекс $|G:H|$ конечен, то конечным будет и индекс $|G:K_\lambda|$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Группу G можно представить в виде $G = L \cdot H$, где L — конечная нормальная подгруппа G. Из конечности L получаем равенство $L = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} LK_\lambda$. Поэтому соответствие $g \mapsto (gLK_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ задает вложение фактор-группы G/L в группу $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} G/LK_\lambda$. Из леммы 1 работы [2] следует, что каждый элемент подгруппы H не содержится только в конечном множестве подгрупп K_λ, а потому любой элемент группы G не содержится только в конечном множестве подгрупп LK_λ. Итак, $G/L \leqslant \mathop{\times}\limits_{\lambda \in \Lambda} G/LK_\lambda$, т. е. $G/L \in SD\mathfrak{F}$. Так как $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \leqslant \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda = = (1)$, то группа G финитно аппроксимируема, в частности G включает в себя нормальную подгруппу M конечного индекса, для которой $L \cap M = = (1)$. Но тогда $G \leqslant (G/L) \times (G/M)$ и $G \in SD\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Выберем в центре группы G подгруппу V без кручения, определяющую локально-нормальную фактор-группу (существование такой подгруппы вытекает из теоремы II.1.8 книги [5]). Пусть $\pi = \Pi(\zeta(T))$ и H/VT — силовская π-подгруппа G/VT. Из леммы 7 работы [4] можно получить разложение $H/VT = D/VT \cdot F/VT$, где подгруппа F/VT конечна, а D/VT — делимая π-группа. Через D_1/V обозначим делимую часть группы D/V. Если предположить, что $D/V \neq (D_1/V) \cdot (TV/V)$, то фактор-группа D/D_1 будет расширением группы конечного периода с помощью нееднничной делимой π-группы. Из следствия леммы 2 работы [6] получаем, что D/D_1 включает в себя неединичную квазициклическую подгруппу, а это противоречит выбору D_1. Итак, $D/V = (D_1/V) \cdot (TV/V)$. Так как $D_1/V \leqslant \zeta(G/V)$ и коммутант FC-группы периодический, а V—подгруппа без кручения, то $D_1 \leqslant \zeta(G)$. Но тогда $D_1 = T_1 \times U$, где $T_1 = T \cap \cap D_1$, U — подгруппа без кручения. В фактор-группе G/U подгруппа H/U является конечным расширением TU/U, а фактор-группа по ней —π'-группа. Из предыдущей леммы следует, что $H/U \in SD\mathfrak{F}$. Из выбора H получаем равенство $\Pi(\zeta(H/U)) = \pi$, поэтому подгруппа H/U удовлетворяет всем условиям леммы 2. Следовательно, G включает в себя такую нормальную подгруппу W, что $G/W \in SD\mathfrak{F}$ и $(1) = W \cup H$. Из последнего равенства следует, что $W \cap T = (1)$. Теорема Рэмака показывает, что $G \leqslant (G/W) \times (G/T)$, т. е. $G \in SD(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{A}')$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $A \in A(T)$ и предположим, что фактор-группа A/A^q бесконечна для некоторого $q \in \Pi(\zeta(T))$. В группе A выберем подгруппу $B \geqslant A^q$, фактор-группа по которой будет бесконечной и счетной. Легко видеть, что A можно представить в виде $A = C \cdot D$, где $C \cap D = B$ и индексы $|A : C|$, $|A : D|$ бесконечны. Пусть $L = C \times D$. Положим $(c, d)\varphi = c \cdot d$. Отображение φ будет гомоморфизмом L на A и его ядро K будет состоять из пар (x, x^{-1}), $x \in B$.

Пусть v — элемент порядка q, $C/B = \bigtimes_{n \in \mathbf{N}} (c_n B)$. Через α_n обозначим гомоморфизм C на подгруппу (v), при котором $c_n \alpha_n = v$, $\operatorname{Ker} \alpha_n = \text{гр}(c_k, B \mid k \neq n)$, а через ψ_n — автоморфизм группы $(v) \times C$, определенный матрицей

$$\begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ \alpha_n & I_2 \end{pmatrix},$$

где I_1 (соответственно I_2) — тождественный автоморфизм (v) (соответственно C). Другими словами, $v\psi_n = v$, $c_n \psi_n = c_n v$, $c_k \psi_n = c_k$, $n \neq k$. Далее, $|\psi_n| = q$ и $\psi_n \psi_k = \psi_k \psi_n$ при любых $n, k \in \mathbf{N}$. В частности, $\Psi = \text{гр}(\psi_n \mid n \in \mathbf{N})$ — элементарная абелева q-подгруппа $\operatorname{Aut}((v) \times C)$. Пусть $\chi : D \to \Psi$ — такой гомоморфизм D на Ψ, что $\operatorname{Ker} \chi = B$, и пусть W — полупрямое произведение $(v) \times C$ и D, определяемое гомоморфизмом χ. Легко видеть, что $\zeta(W) = (v) \times B \times B$. В частности, $K \leqslant \zeta(W)$. Положим $H = W/K$. Поскольку $(C \times D)/K \cong A$ и $t(W) = (v)$, то $t(H) = (h) = (vK)$, $H/t(H) \cong A$. Кроме того, $(h) = [H, H]$, $\zeta(H) = (h) \times B$, так что фактор-группа $H/\zeta(H)$ бесконечна.

Пусть U — максимальная нормальная подгруппа H, не содержащая элемент h. Тогда $U \cap [H, H] = (1)$, т. е. $U \leqslant \zeta(H)$. Отсюда следует бесконечность H/U. Это означает, в частности, что $H \notin SD(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{A}')$. Пусть t — элемент порядка q подгруппы $\zeta(T)$. Положим $Y = H \times T$, $R = (ht^{-1})$, $G = Y/R$. Тогда $R \leqslant \zeta(Y)$, $t(Y) = T \times (h) = T \times R$, $R \cap H = (1)$. Поэтому $t(G) = (T \times R)/R \cong T$, а $G/t(G) \cong H/t(H) \cong A$. Далее, $HR/R \cong H/H \cap R \cong H$, а это вместе с соотношением $H \notin SD(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{A}')$ показывает, что $G \notin SD(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{A}')$. Из полученного противоречия вытекает, что $A \notin A(T)$. Теорема доказана.

1. *Курдаченко Л. А.* FC-Группы, периодическая часть которых вкладывается в прямое произведение конечных групп.— Мат. заметки, 1977, 21, № 1, с. 9—20.
2. *Курдаченко Л. А.* О строении FC-групп, периодическая часть которых вкладывается в прямое произведение конечных групп.— Там же, 1979, 25, № 1, с. 15—26.
3. *Курдаченко Л. А.* Вложимость FC-группы в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения.— Там же, 1981, 29, № 3, с. 359—373.
4. *Курдаченко Л. А.* О некоторых условиях вложимости FC-группы в прямое произведение конечных групп и абелевой группы без кручения.— Мат. сб., 1981, 114, № 4, с. 566—582.
5. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М.: Наука, 1978.— 120 с.
6. *Курдаченко Л. А.* FC-Группы с ограниченными в совокупности порядками элементов периодической части.— Сиб. мат. журн., 1975, 16, № 6, с. 1205—1213.

Днепропетровский
государственный университет

Поступила в редакцию 19.01.81
после переработки — 23.10.81