УДК 517.53

В. К. Дзядык

Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде

§ 1. Введение. Классическая проблема моментов состоит в том, чтобы на одном из множеств X вида $[0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ или $[0, 1]$ по заданной числовой последовательности $\{s_k\}$ найти меру $d\mu(x)$, при которой выполнялись бы равенства

$$s_k = \int_X x^k d\mu(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Условимся $\forall j, k = 0, 1, \ldots$ и произвольных элементов a_j, b_k и c_l из какого-нибудь кольца полагать

$$\det | a_j \ldots a_{j+k};\ a_{j+k-1} \ldots a_{j+2k-1};\ c_1 \ldots c_{k+1} | \overset{\mathrm{df}}{=} \det \begin{vmatrix} a_j & a_{j+1} \ldots a_{j+k} \\ a_{j+1} & a_{j+2} \ldots a_{j+k+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{j+k-1} & a_{j+k} \ldots a_{j+2k-1} \\ c_1 & c_2 \ \ldots c_{k+1} \end{vmatrix}.$$

Известно (см., например, [1]), что необходимое условие, налагаемое на последовательность $\{s_k\}$, при котором проблема моментов разрешима в том смысле, что существует мера $d\mu(x)$, имеющая бесконечное число точек роста и удовлетворяющая условию (1), состоит в том, чтобы были отличны от нуля все определители Ганкеля:

$$H_n = \det | s_0 \ldots s_n;\ \ldots ;\ s_{n-1} \ldots s_{2n-1};\ s_n \ldots s_{2n} | \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Этим условиям удовлетворяют коэффициенты s_k очень многих аналитических функций $f(z) = \sum\limits_0^\infty s_k z^k$ и в том числе коэффициенты всех элементарных функций.

Проблема моментов (1) нашла, в частности, применение в аппроксимации Паде. Назовем при любых $m, n \in \mathbf{Z}_+$ рациональной функцией порядка (m, n) функцию вида $P_m(z)/Q_n(z)$, где $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены степеней, не превышающих соответственно m и n. При этом рациональная функция $\pi_{m,n}(z) = P_m(z)/Q_n(z)$ называется для некоторой функции $f(z) = \sum\limits_0^\infty s_k z^k$ аппроксимантой Паде порядка (m, n), если $f(z) Q_n(z) - P_m(z) = O(z^{m+n+1})$ при $z \to 0$. Якоби установил, что аппроксиманта Паде порядка (m, n) для функции $f(z) = \sum\limits_0^\infty s_k z^k$ строится по формуле

$$\pi_{m,n}(f; z) = \frac{\det \left| s_{m-n+1} \ldots s_{m+1};\ \ldots ;\ s_m \ldots s_{m+n};\ \sum\limits_{j=n}^{m} s_{j-n} z^j \ \sum\limits_{j=n-1}^{m} s_{j-n+1} z^j \ldots \sum\limits_{j=0}^{m} s_j z^j \right|}{\det | s_{m-n+1} \ldots s_{m+1};\ \ldots ;\ s_m \ldots s_{m+n};\ z^n z^{n-1} \ldots 1 |}, \tag{3}$$

в которой $s_\nu \overset{\mathrm{df}}{=} 0$ при $\nu < 0$ и $\sum\limits_{j=\mu}^{\nu} \overset{\mathrm{df}}{=} 0$ всякий раз, когда $\mu > \nu$.

Известно, что достаточные условия для разрешимости проблемы моментов (1) очень жестки, и для множеств X вида $[0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ и $[0, 1]$ получены соответственно Стильтьесом, Гамбургером и Хаусдорфом. При этом для того чтобы для коэффициентов s_k степенного ряда некоторой функции $f(z)$ проблема (1) была разрешимой, необходимо, чтобы для этой функции на любом луче $\zeta = r\exp(i\varphi)$, $0 \leqslant r < \infty$, $\varphi \neq k\pi$, $k = 0, 1$, выполнялось достаточно жесткое условие $f(z) \leqslant A \operatorname{cosec}\varphi$, где $A = \mathrm{const}$, и некоторые другие условия. В частности, ни одна целая функция не разлагается в ряд, для коэффициентов s_k которого проблема моментов (1) разрешима.

Отметим, что 1) проблема моментов тесно связана с аппроксимацией Паде функций вида $\int\limits_X \frac{d\mu(x)}{1-xz}$ и с системами ортогональных на X по мере $d\mu(x)$ многочленов; 2) с целью исследования аппроксимации Паде функции $\sin z$ в [2] по существу впервые решена обобщенная проблема моментов и построена специальная система биортогональных многочленов.

В результате анализа методов и результатов этой статьи и сравнения их с существующими результатами мы приходим к целесообразности обобщить проблему моментов (1).

Определение 1 [3]. *Для заданной последовательности $\{s_k\}$, вообще говоря, комплексных чисел требуется определить на некотором множестве $X \subset \mathbf{R} \vee \mathbf{C}$ меру $d\mu(x)$ и две последовательности линейно независимых функций*

$$\{a_j(x)\}_0^\infty \text{ и } \{b_k(x)\} \tag{4}$$

из пространства $L^2(X, d\mu(x))$ такие, чтобы $\forall_{j,k} = 0, 1, 2, \ldots$ выполнялись равенства

$$s_{j+k} = \int\limits_X a_j(x)\, b_k(x)\, d\mu(x). \tag{4'}$$

Отметим, что если для последовательности $\{s_k\}_0^\infty$ на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}$ разрешима классическая проблема моментов (1), то при $a_j(x) = x^j$, $b_k(x) = x^k$ и той же мере $d\mu(x)$ на X будет разрешимой также обобщенная проблема моментов. Обратное неверно, ибо, как установлено в [4], обобщенная проблема моментов, в отличие от классической, разрешима для любой последовательности $\{s_k\}_0^\infty$, для которой выполнены необходимые условия (2). В отличие от классической проблемы моментов, для которой существует глубокая теория, посвященная единственности ее решения, решение обобщенной проблемы (если оно существует) всегда неединственно и задача разыскания среди множества решений в каком-то смысле «хорошего решения» требует большого искусства.

§ 2. Построение биортогональных систем функций.

Теорема 1. *Пусть $f(z) = \sum\limits_0^\infty s_k z^k$ — аналитическая в некоторой окрестности нуля функция и пусть последовательности $\{a_j(x)\}_0^\infty$ и $\{b_k(x)\}_0^\infty$ и мера $d\mu(x)$, определенные на некотором множестве $X \subset \mathbf{R}$, служат решением обобщенной проблемы моментов для последовательности $\{s_k\}_0^\infty$.*

Тогда, если все определители Ганкеля H_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, отличны от нуля, то система функций

$$A_0(x) = \varepsilon_0 a_0(x),\quad A_m(x) = \varepsilon_m \det|\, s_0 \ldots s_m; \ldots; s_{m-1} \ldots s_{2m-1}; a_0(x) \ldots a_m(x)\,|, \tag{5}$$

$$B_0(x) = \varepsilon_0 b_0(x),\quad B_n(x) = \varepsilon_n \det|\, s_0 \ldots s_n; \ldots; s_{n-1} \ldots s_{2n-1}; b_0(x) \ldots b_n(x)\,|, \tag{5'}$$

где $m, n = 1, 2, \ldots$; $\varepsilon_j = (H_{j-1}H_j)^{-1/2}$, $j = 0, 1, \ldots, H_{-1} \overset{\mathrm{df}}{=} 1$, образуют биортонормальную систему.

Справедливость этой теоремы немедленно следует из равенства (4').

Следствие 1. *Для многочленов $B_n(x)$, определенных по формуле (5'), справедливы соотношения*

$$\forall n \in \mathbf{N} : B_n(x) \perp a_j(x),\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{6}$$

§ 3. **Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде.** Установим теорему о построении диагональных аппроксимаций Паде.

Теорема 2. *Пусть $f(z)$ — аналитическая в круге $D = \{z : |z| < 1\}$ функция:*

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} s_j z^j, \quad s_j = f^{(j)}(0)/j! \tag{7}$$

и пусть а) *все определители Ганкеля H_n последовательности $\{s_k\}_0^\infty$ отличны от нуля:*

$$H_n \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{8}$$

б) *для последовательности $\{s_k\}_0^\infty$ на каком-нибудь множестве $X \subset \mathbf{R}$ разрешена обобщенная проблема моментов*

$$s_{i+j} = \int_X a_i(x)\, b_j(x)\, d\mu(x); \quad i, j = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Тогда 1) *если, отправляясь от последовательностей $\{a_i(x)\}$ и $\{b_j(x)\}$ и меры $d\mu(x)$, образовать две последовательности биортонормальных по мере $d\mu(x)$ полиномов вида* (5) — (5′) *и положить*

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j^{(n)} b_j(x), \tag{10}$$

где $c_j^{(n)}$ — миноры определителя в (5′), *то аппроксиманты Паде $\pi_{n-1,n}(f; z)$ порядка $(n-1, n)$ для ряда* (7) *могут быть представлены в виде*

$$\pi_{n-1,n}(f; z) = P_{n-1}(f; z)/Q_n(f; z), \tag{11}$$

где

$$Q_n(f; z) = \sum_{j=0}^{n} c_j^n z^{n-j} = \varepsilon_n \det |s_0 \ldots s_n; \ldots ; s_{n-1} \ldots s_{2n-1}; z^n z^{n-1} \ldots 1|, \tag{12}$$

$$P_{n-1}(f; z) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(n)} z^{n-j} t_{j-1}(f; z) = \varepsilon_n \det |s_0 \ldots s_n; \ldots ; s_{n-1} \ldots s_{2n-1}; z^n t_0(f; z)$$
$$z^{n-1} t_1(f; z) \ldots t_n(f; z)|, \tag{12′}$$

и через $t_k(f; z)$ обозначены частные суммы ряда Тейлора (7) *порядка k: $t_k(f; z) = \sum_{j=0}^{k} s_j z^j$;* 2) *если функция*

$$A(x; z) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\, z^j \tag{13}$$

$\forall z \in D$ суммируема по переменной x на X и ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x)\, B_n(x)\, z^j$ можно почленно интегрировать по мере $d\mu(x)$, то

$$f(z) = \int_X A(x; z)\, b_0(x)\, d\mu(x) \tag{14}$$

а разность $f(z) - \pi_{n-1,n}(f; z)$ может быть представлена в интегральной форме

$$f(z) - \pi_{n-1,n}(f; z) = \frac{z^n}{Q_n(f; z)} \int_X A(x; z)\, B_n(x)\, d\mu(x). \tag{14′}$$

Доказательство. 1. Равенство (14) — следствие равенств (13) и (4′). 2. Учитывая (7) и (9) — (13), получаем

$$\int_X A(x;z)\,B_n(x)\,d\mu(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j^{(n)}\int_X\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x)\,z^i b_j(x)\,d\mu(x)=\sum_{j=0}^{n}c_j^{(n)}\sum_{i=0}^{\infty}s_{i+j}z^i=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}c_j^{(n)}\frac{f(z)-t_{j-1}(f;z)}{z^j}=Q_n(f;z)\,z^{-n}f(z)-P_{n-1}(f;z)\,z^{-n},$$

$$t_{-1}(f;z)\overset{\mathrm{df}}{=}0.$$

Отсюда следует равенство (14′). Тот факт, что рациональная функция $\pi_{n-1,n}(f;z)=P_{n-1}(f;z)/Q_n(f;z)$ — аппроксиманта Паде порядка $(n-1, n)$, вытекает из (14′) на основании следствия 1.

Следствие. *Пусть в формуле Якоби* (3) *определитель в знаменателе отличен от нуля при* $m=n$ и $z=0$. *Тогда, чтобы для функции* $f(z)$ *получить диагональные аппроксиманты Паде, положим* $(f(z)-f(0))\,z^{-1}\overset{\mathrm{df}}{=}\varphi(z)\Leftrightarrow f(z)=f(0)+z\varphi(z)$. *После этого, найдя по формулам* (11) *и* (12) *аппроксиманту Паде* $\pi_{n-1,n}(\varphi;z)=P_{n-1}(\varphi;z)/Q_n(\varphi;z)$; *где*

$$P_{n-1}(\varphi;z)=\sum_{j=1}^{n}c_j^{(n)}z^{n-j}t_{j-1}(\varphi;z)=\sum_{j=1}^{n}c_j^{(n)}z^{n-j}\left[f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}z+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{f^{(j)}(0)}{j!}z^{j-1}\right],$$

$$Q_n(z)=\sum_{j=0}^{n}c_j^{(n)}z^{n-j},$$

положим

$$f(0)+z\frac{P_{n-1}(\varphi;z)}{Q_n(\varphi;z)}=\frac{f(0)\,Q_n(\varphi;z)+zP_{n-1}(\varphi;z)}{Q_n(\varphi;z)}=P_n(f;z)/Q_n(f;z),$$

где $P_n(f;z)=f(0)\,Q_n(\varphi;z)+zP_{n-1}(\varphi;z)$, $Q_n(f;z)=Q_n(\varphi;z)$. *Тогда* $f(z)-P_n(f;z)/Q_n(f;z)=f(0)+z\varphi(z)-z[\varphi(z)-P_{n-1}(\varphi;z)]/Q_n(\varphi;z)=O(z^{2n+1})$, *т. е.* $P_n(f;z)/Q_n(f;z)=\pi_{n,n}(f;z)$.

Замечание. Подобные же рассуждения дают возможность строить и так называемые наддиагональные, а в ряде случаев и поддиагональные аппроксиманты Паде.

§4. Некоторые стандартные способы решения обобщенной проблемы моментов. 1. Пусть функция $f(z)=\sum_{0}^{\infty}s_kz^k$ — аналитическая в круге $|z|<1$ и непрерывна на $|z|\leqslant 1$. Тогда $\forall k=0, 1, 2, \ldots$ $s_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}f(\zeta)\,\zeta^{-k-1}d\zeta$ и, следовательно, если положить $X=\{\zeta:|\zeta|=1\}$, $a_j(\zeta)=\zeta^{-j}$, $b_k(\zeta)=\zeta^{-k}$, $d\mu(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\zeta)}{\zeta}d\zeta$, то $\forall j, k=0, 1, 2, \ldots$

$$s_{j+k}=\int_X a_j(\zeta)\,b_k(\zeta)\,d\mu(\zeta). \tag{15}$$

В силу равенств (5) и (5′) и следствия 1 система функций $\{B_n(\zeta)\}_0^\infty$ просто ортогональна и согласно формулам (14′) и (12) $\forall z:|z|<1$

$$A(\zeta;z)=\sum_{j=0}^{\infty}\zeta^{-j}z^j=\frac{\zeta}{\zeta-z},\ f(z)=\int_{|\zeta|=1}A(\zeta;z)\,d\mu(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \tag{16}$$

и

$$f(z)-\pi_{n-1,n}(f;\,z)=\frac{z^n}{2\pi i Q_n(z)}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}B_n(\zeta)\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{z^n}{Q_n(z)}\int\limits_{|\zeta_1|=1}\frac{f(\zeta)\,Q_n(\zeta)}{\zeta^n(\zeta-z)}\,d\zeta. \qquad (16')$$

Анализируя эту формулу, легко придем к формуле Эрмита для рациональной интерполяции. Так, например, легко установить равенство

$$f(z)-\pi_{m,n}(f;\,z)=f(z)-P_m(f;\,z)/Q_n(f;\,z)=\frac{z^{m+n+1}}{Q_n(z)}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)\,Q_n(\zeta)}{\zeta^{m+n+1}(\zeta-z)}\,d\zeta$$

(частный случай формулы Эрмита).

2. Если в (15) произведем замену $\zeta=\exp ix$, то получим

$$s_{j+k}=\int\limits_0^{2\pi} f(\exp ix)\exp[-i(j+k)x]\,dx,\quad f(\exp ix)=\sum_{j=0}^{\infty}s_j\exp ijx.$$

Это же равенство, очевидно, верно и для $f(x)\in L_{[0,2\pi]}$ и $f(x)\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}s_j\exp ijx$.

3. Предположим, что функция $f(z)$ разлагается в абсолютно сходящийся при $|z|=1$ степенной ряд $\sum\limits_0^{\infty}s_kz^k$. Положим

$$\varphi_k(x)=\begin{cases}16\left[\left(x-\left(k-\frac{1}{2}\right)\right)\left(x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\right)\right]^2=16\left[(x-k)^2-\frac{1}{4}\right]^2 & \\ \qquad\qquad\text{при } x\in\left[k-\frac{1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right], & \\ 0 \qquad\qquad \text{при } x\notin\left[k-\frac{1}{2},\ k+\frac{1}{2}\right]. &\end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi_k(x)\in W^2(-\infty,\infty)$ и $\varphi_k\left(k-\frac{1}{2}\right)=\varphi_k'\left(k-\frac{1}{2}\right)=\varphi_k\left(k+\frac{1}{2}\right)=\varphi_k'\left(k+\frac{1}{2}\right)=0$, $\varphi_k(k)=1$ и $\|\varphi_k''\|\leqslant C=\text{const}$. Поэтому функция $s(x)=\sum\limits_0^{\infty}s_k\varphi_k(x)$, построенная, отправляясь от $f(z)$, также принадлежит $W^2[0,\infty)$.

Обозначим через $\hat{s}(t)$ преобразование Фурье функции $s(x)$: $\hat{s}(t)=\gamma\int\limits_{-1/2}^{\infty}s(x)\exp(-ixt)\,dx$, $\gamma=1/\sqrt{2\pi i}$. Поскольку $\forall t\in(-\infty,\infty)$

$$|\hat{s}(t)|\leqslant|\gamma|\int\limits_{-1/2}^{\infty}|s(x)|\,dx<|\gamma|\,\|s\|_L, \qquad (17)$$

и при $|t|>1$

$$\hat{s}(t)=\int\limits_{-1/2}^{\infty}s(x)\,e^{-ixt}dx=\gamma is(x)\,t^{-1}\exp(-ixt)\,\Big|_{-1/2}^{\infty}-t^{-1}\gamma i\int\limits_{-1/2}^{\infty}s'(x)\,e^{-ixt}dx=$$

$$=-t^{-1}\gamma i\int\limits_{-1/2}^{\infty}s'(x)\,e^{-ixt}dx=t^{-2}\gamma\int\limits_{-1/2}^{\infty}s''(x)\,e^{-ixt}dx,$$

то

$$|\hat{s}(t)|\leqslant t^{-2}\gamma\int\limits_{-1/2}^{\infty}|s''(x)|\,dx\leqslant t^{-2}c\gamma\sum_{k=0}^{\infty}|s_k|\leqslant At^{-2},\ A=\text{const}. \qquad (17')$$

Из (17) и (17′) следует, что $\hat{s}(t) \in L^1 \cap L^2(-\infty, \infty)$, а значит, справедливо равенство $s(x) = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(t) e^{ixt} dt$ и, в частности, $\forall n \in \mathbf{Z}_+$ равенство $s_n = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(t) e^{int} dt$. Поэтому, если положить $a_j(t) = \sqrt{\gamma \hat{s}(t)}\, e^{ijt}$, $b_k(t) = \sqrt{\gamma \hat{s}(t)}\, e^{ikt}$, где взяты одинаковые ветви $\sqrt{\gamma \hat{s}(t)}$, то действительно получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a_j(t)\, b_k(t)\, dt = \gamma \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(t) \exp i(j+k)\, t dt = s_{j+k}. \tag{18}$$

Замечания. 1. Формулы (15) и (18) справедливы независимо от того, отличны от нуля или нет определители Ганкеля, построенные для последовательности $\{s_k\}$. Однако в силу теоремы 2 они представляют интерес главным образом тогда, когда такие определители отличны от нуля.

В [4] доказано, что обобщенная проблема моментов вида $s_{j+k} = (a_j, b_k)_H$, $j, k = 0, 1, 2, \ldots$, где H — бесконечномерное гильбертово пространство, имеет решение, представимое в H при помощи обобщенных полиномов a_j и b_k, построенных по какой-нибудь ортонормированной последовательности $\{e_k\}_0^\infty$: $a_j = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i^{(j)} e_i$, $b_k = \sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(k)} e_i$, $\beta_k^{(k)} \neq 0$, $j, k = \overline{0, \infty}$, тогда и только тогда, когда все определители Ганкеля последовательности $\{s_k\}$ отличны от нуля. При этом последовательности $\{a_j\}$ и $\{b_k\}$ будут единственными, если в одной из них, например в последовательности $\{a_j\}$, произвольным образом зафиксировать все старшие коэффициенты $\alpha_j^{(j)}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

2. Ряд результатов по аппроксимации Паде различных гипергеометрических функций получен в [5].

1. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов.— М. : ГИТТЛ, 1961.— 312 с.
2. *Дзядык В. К.* Об асимптотике диагональных аппроксимаций Паде функций $\sin z$, $\cos z$ и др.— Мат. сб., 1979, 108, № 2, с. 247—267.
3. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 6, с. 8—12.
4. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 3—15.
5. *Голуб А. П.* Применение обобщенной проблемы моментов к аппроксимации Паде некоторых функций.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981, с. 16—57.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
22.07.82