УДК 519.52

М. И. Малкин

Периодические орбиты, энтропия и множества вращения непрерывных отображений окружности

1. Рассматриваются непрерывные отображения окружности в себя. Для отображения f степени 1 аналогично [1] вводится множество чисел вращения $\rho(f)$. Могут быть три случая: 1) $\rho(f)$ — иррациональная точка; 2) $\rho(f)$ — рациональная точка; 3) $\rho(f)$ — замкнутый интервал (см. [1]). В статье показано, как структура периодических орбит отображения f и величина топологической энтропии $h(f)$ зависят от того, какой из указанных случаев реализуется для f (теорема 1). Далее, по информации о периодах и числах вращения двух периодических точек отображения f делается вывод о том, какими еще периодами обладает f, и дается нижняя оценка $h(f)$ (теорема 2).

2. Пусть $\mathrm{Per}(f)$ означает множество периодических точек отображения f. Для $x \in \mathrm{Per}(f)$ пусть $\mathrm{per}(f, x)$ означает период (наименьший) точки x и $\mathrm{per}(f) = \{\mathrm{per}(f, x) : x \in \mathrm{Per}(f)\}$. Будем говорить, что f обладает периодом k, если $k \in \mathrm{per}(f)$.

Для непрерывных отображений интервала $f : I \to I$ структура множества $\mathrm{per}(f)$ определяется теоремой Шарковского [2], утверждающей, что если $\lhd$ — следующее отношение порядка на $\mathbf{N}$:

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \ldots \lhd 2\cdot 3 \lhd 2\cdot 5 \lhd 2\cdot 7 \lhd \ldots \lhd 2^2\cdot 3 \lhd 2^2\cdot 5 \lhd 2^2\cdot 7 \lhd \ldots$$
$$\ldots \lhd 2^3 \lhd 2^2 \lhd 2 \lhd 1, \tag{1}$$

то из $n \in \mathrm{per}(f)$ и $n \lhd k$ следует, что $k \in \mathrm{per}(f)$.

Для непрерывных отображений окружности $f : S^1 \to S^1$ степени 0 и —1 доказано [3]—[5], что соотношения между периодами также определяется упорядоченностью (1). Если $|\deg f| > 1$, то $\mathrm{per}(f)$ совпадает с множеством всех натуральных чисел, за исключением случая $\deg f = -2$, когда периода 2 может не быть (см. [3]).

Рассмотрим множество $\mathfrak{F}$ непрерывных отображений окружности степени 1. Пусть $\pi : \mathbf{R} \to S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ означает каноническую проекцию. Для заданного отображения $f \in \mathfrak{F}$ зафиксируем поднятие $\bar{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и определим число вращения $\rho(f, x)$ точки $x \in S^1$:

$$\rho(\bar{f}, x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} (\bar{f}^n(\bar{x}) - \bar{x}),$$

где $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$ (очевидно, $\rho(\bar{f}, x)$ не зависит от выбора $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$). Множество вращения $\rho(\bar{f})$ есть $\{\rho(\bar{f}, x) : x \in S^1\}$. Заметим, что при изменении поднятия множество вращения сдвигается на целое число и $\rho(\bar{f}) \pmod{\mathbf{Z}}$ — инвариант топологической сопряженности. Более того, если отображения f и g полусопряжены при помощи монотонной полусопряженности, то $\rho(\bar{f}) = \rho(\bar{g}) \pmod{\mathbf{Z}}$. Множество вращения представляет собой либо точку, либо замкнутый интервал (см. [1]), причем если рациональное число p_1/p принадлежит $\rho(\bar{f})$ и p_1, p взаимно просты, то $p \in \mathrm{per}(f)$ (см. [1], [4]). Будем считать, что множество вращения $\rho(f)$ совпадает с таким $\rho(\bar{f})$, для которого $\inf \rho(\bar{f}) \in [0, 1)$.

Пусть $\mathfrak{F}_1 = \{f \in \mathfrak{F} : \rho(f)$ — иррациональная точка$\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{f \in \mathfrak{F} : \rho(f)$ — рациональная точка$\}$, $\mathfrak{F}_3 = \{f \in \mathfrak{F} : \rho(f)$ — нетривиальный замкнутый интервал$\}$.

Теорема 1. *Множество $\mathfrak{F}$ представимо в виде объединения непересекающихся множеств $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$,* при этом:

1) *если $f \in \mathfrak{F}_1$, то* $\operatorname{per}(f) = \varnothing$, $h(f) = \varnothing$ *и f монотонно полусопряжено с гомеоморфизмом поворота на угол $\rho(f)$;*

2) *если $f \in \mathfrak{F}_2$, то* $\operatorname{per}(f) \neq \varnothing$ *и число $l = \min \operatorname{per}(f)$ делит любой период $k \in \operatorname{per}(f)$. Соотношения между периодами получаются, если все числа упорядоченности* (1) *умножить на l, т. е. из $nl \in \operatorname{per}(f)$ и $n \lhd k$ следует, что $kl \in \operatorname{per}(f)$. Можно построить такое непрерывное отображение интервала $g : I \to I$, что g полусопряжено с отображением f^l,* $\operatorname{per}(g) = \operatorname{per}(f^l)$ *и $h(g) = h(f^l)$. Отображение, осуществляющее полусопряженность, сюръективно и склеивает не более чем по три точки;*

3) *если $f \in \mathfrak{F}_3$, то существует такое $N_0 \in \mathbf{N}$, что* $\operatorname{per}(f)$ *содержит все числа, большие N_0,* и $h(f) > 0$. *Далее, f монотонно полусопряжено с таким отображением $f_1 : S^1 \to S^1$ степени 1, для которого при любом рациональном ρ из внутренности интервала $\rho(f_1) = \rho(f)$ периодические точки с числом вращения ρ плотны на S^1.*

Доказательство. 1). Пусть $f \in \mathfrak{F}_1$, f не имеет периодических точек, так как наличие периодической точки x периода p влечет $\rho(\bar{f}, x) = p_1/p$, где $p_1 = \bar{f}^p(\bar{x}) - \bar{x}$, $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$. У отображения окружности без периодических точек имеется единственное минимальное множество [6]. Таким образом, ω-предельное множество любой точки совпадает с этим минимальным множеством, которое мы обозначим $M(f)$. Очевидно, $M(f)$ — совершенное множество. Если для точек $x, y \in S^1$ ввести отношение эквивалентности $x \sim y \equiv x = y$ или x, y принадлежат замыканию одного и того же смежного к $M(f)$ интервала, то из теоремы 1 [6] следует, что

$$x \sim y \ \text{ равносильно } \ f(x) \sim f(y). \tag{2}$$

Следовательно, все внутренние точки смежных интервалов блуждающие и $M(f) = \mathrm{NW}(f)$, где $\mathrm{NW}(f)$ — множество неблуждающих точек отображения f. В силу (2) на множестве классов эквивалентности, которое в фактор-топологии $S^1/\sim$ гомеоморфно S^1, индуцируется транзитивный гомеоморфизм f_1. Таким образом, f монотонно полусопряжено с f_1 при помощи такого отображения T, которое склеивает в точку замыкание каждого смежного к $\mathrm{NW}(f)$ интервала. Поэтому $\rho(f) = \rho(f_1)$, а f_1 в силу классической теории [7] сопряжено с гомеоморфизмом поворота на угол $\rho(f_1)$. Очевидно, $T(\mathrm{NW}(f)) = \mathrm{NW}(f_1) = S^1$ и $T \mid \mathrm{NW}(f)$ склеивает не более чем по две точки.

Для топологической энтропии непрерывного отображения $f : X \to X$ компакта X в себя имеется формула [8], [9]

$$h(f) = h(f \mid \mathrm{NW}(f)). \tag{3}$$

Теперь для доказательства равенства $h(f) = 0$ остается воспользоваться леммой, являющейся обобщением соответствующего результата [10].

Лемма 1. *Пусть непрерывные отображения $f : X \to X$ и $g : Y \to Y$ метрических компактов X, Y полусопряжены при помощи сюръективного отображения $T : X \to Y$ и существует такое число k_0, что для любой точки $y \in Y$* $\operatorname{cord} T^{-1}(y) \leqslant k_0$. *Тогда $h(f) = h(g)$.*

Таким образом, учитывая лемму 1, формулу (3) и тот факт, что гомеоморфизмы окружности имеют нулевую топологическую энтропию (см. [10]), мы получаем: $h(f) = h(f \mid \mathrm{NW}(f)) = h(f_1) = 0$.

2). Пусть $f \in \mathfrak{F}_2$ и $\rho(f) = \{l_1/l\}$, где l_1, l взаимно просты. Тогда $l \in \operatorname{per}(f)$ и для произвольной периодической точки x периода q имеем $q_1/q = l_1/l$, где $q_1 = \bar{f}^q(\bar{x}) - \bar{x}$. Отсюда следует, что q_1, q — целые кратные соответственно l_1, l.

Возьмем $x \in \operatorname{Per}(f)$, и пусть $\operatorname{per}(f, x) = nl$ для некоторого $n \in /\mathbf{N}$. Рассмотрим отображение $F = f^l$, и пусть $\bar{F}$ — такое поднятие F, что $\rho(\bar{F}) = \{0\}$. Тогда $\bar{F}^n(\bar{x}) = \bar{x}$, где $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$, и по теореме 3.2 из [4] F будет обладать любым периодом k таким, что $n \lhd k$. Таким образом, $\operatorname{per}(F, y) = k$ для некоторой точки $y \in S^1$. Очевидно, $y \in \operatorname{per}(f)$ и $\operatorname{per}(f, y)$ — делитель числа kl. Но поскольку любой f-период делится на l, мы получаем, что $\operatorname{per}(f, y) = kl$.

Так как мы взяли такое поднятие $\bar{F}$, что $\rho(\bar{F}) = \{0\}$, то $\bar{F}^n([0, 1]) \subset \subset [-1, 2]$ для любого $n \in N$. По этой же причине на $\bar{F}$-орбите произвольной точки $\bar{y} \in \mathbf{R}$ отображение $\pi \mid \mathrm{orb}_{\bar{F}}\, \bar{y}$ взаимно однозначно, а для произвольной F-периодической точки $z \in S$ $\pi^{-1}(\mathrm{orb}_{\bar{F}}\, z)$ можно представить в виде объединения $\bar{F}$-орбит того же периода. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{F}(0) = 0$. Тогда получим расширяющуюся последовательность замкнутых интервалов $I_n = \bar{F}^n([0, 1]) \subset [-1, 2]$, $n \in \mathbf{N}$. Обозначая $I = = \mathrm{clos} \bigcup\limits_{n \geqslant 1} I_n$ и $g = \bar{F}/I$, имеем $g(I) = I$ и g полусопряжено с F при помощи отображения π/I. Равенство $\mathrm{per}(g) = \mathrm{per}(F)$ следует из указанного соответствия между орбитами F и $\bar{F}$, а равенство $h(g) = h(F)$ — из леммы 1 при $k_0 = 3$. Используя оценку топологической энтропии для отображений интервала [4], получаем такой факт: если отображение окружности $f \in \mathfrak{F}_2$ обладает наименьшим периодом l и периодом $2^m ql$, q — нечетное число больше 1, то $h(f) \geqslant (\log \lambda_q)/(2^m l)$, где λ_q — наибольший положительный нуль полинома $\lambda^q - 2\lambda^{q-2} - 1$. 3). Пусть теперь $f \in \mathfrak{F}$ и $\rho(\bar{f}) = [\rho_1, \rho_2]$, $\rho_1 < \rho_2$, где $\bar{f}$ — некоторое поднятие отображения f. Без ограничения общности можно считать, что $\rho_1 > 1$. Число $p(N)$ простых чисел, меньших N, подчинено асимптотическому закону $p(N) \sim N | \ln N$ [11]. Отсюда следует, что разность $p(\rho_2 N) - p(\rho_1 N)$ стремится к ∞ при $N \to \infty$. Возьмем такое N_0, что при $N > N_0$ эта разность будет больше 1. Тогда для любого целого $q > N_0$ найдется такое простое число q_1, что $\rho_1 \leqslant q_1/q \leqslant \rho_2$. Числа q_1, q взаимно просты, так как $\rho_1 > 1$. Таким образом, $q \in \mathrm{per}(f)$ при $q > N_0$.

Если $1 \in \mathrm{per}(f)$, то, взяв периодическую точку периода q с нецелым числом вращения, будем иметь, согласно [4], $h(f) \geqslant \log \mu_q$, где μ_q — наибольший положительный нуль полинома $\mu^{q+1} - \mu^q - \mu - 1$. Если $1 \notin \mathrm{per}(f)$, то для $q > N_0$ возьмем периодические точки x, y соответственно периодов q и $q+1$. Тогда $\mathrm{per}(f^q, x) = 1$, $\mathrm{per}(f^q, y) = q + 1$, и поэтому $h(f^q) \geqslant \geqslant \log \mu_{q+1}$. Таким образом, $h(f) \geqslant (\log \mu_{q+1})/q > 0$.

Пусть $\sim$ — следующее отношение эквивалентности на $S^1 : x \sim y \equiv$ все точки на одной из двух дуг с концами x, y имеют одинаковые числа вращения. Классы эквивалентности представляют собой замкнутые (возможно, тривиальные) интервалы, и из $x \sim y$ следует $f(x) \sim f(y)$. Таким образом, на множестве классов эквивалентности, гомеоморфном S^1, индуцируется отображение $f_1 : S^1 \to S^1$ степени 1 и $\rho(f) = \rho(f_1)$. Отображение f_1 обладает тем свойством, что в любом интервале $I \subset S^1$ найдутся точки $x, y \in I$ такие, что $\rho(\bar{f}_1 x) \neq \rho(\bar{f}_1, y)$, где $\bar{f}_1$ — произвольное поднятие f_1. Если J — компонента связности $\pi^{-1}(I)$ и $\bar{x}, \bar{y} \in J$, $\pi(\bar{x}) = x$, $\pi(\bar{y}) = y$, то при $n \to \infty$ получаем неограниченную последовательность $\bar{f}_1^n(y) - \bar{f}_1^n(x)$. Тогда $f_1^n(I) = S^1$ для некоторого $n \in \mathbf{N}$. Пусть $\rho = p | q \in \mathrm{int}\, \rho(f_1)$. Можно взять z_1, $z_2 \in J$ такие, что $f_1^n(\pi(z_1))$, $f_1^n(\pi(z_2)) \in \mathrm{Per}(f_1)$ и $\rho(\bar{f}_1, \pi(z_1)) < \rho < \rho(\bar{f}_1, \pi(z_2))$. Рассмотрим отображение $F = \bar{f}_1^q - p$. Очевидно, $F^m(z_1) \to -\infty$, $F^m(z_2) \to +\infty$ при $m \to +\infty$. Поэтому для достаточно большого m найдется точка $z \in J$ такая, что $F^m(z) - z = 0$. Легко видеть, что $\rho(\bar{f}_1, \pi(z)) = = p/q$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если на $\mathfrak{F}$ задать C^0-топологию, то нетрудно показать, что множество вращения $\rho(f)$ непрерывно зависит от f, и поэтому $\mathfrak{F}_3$ — открытое множество. $\mathfrak{F}_3$ не является плотным, в то время как $\mathfrak{F}_2 \cup \mathfrak{F}_3$ плотно в $\mathfrak{F}$.

З а м е ч а н и е 2. Для отображений интервала $f : I \to I$ справедливо такое утверждение [12]: $h(f) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{per}(f)$ содержит лишь степени числа 2. Для отображений окружности $f : S^1 \to S^1$(не обязательно степени 1) можно привести такой аналог этого утверждения: $h(f) = 0$ тогда и только тогда, когда из p, $q \in \mathrm{per}(f)$ следует, что $p/q = 2^m$ для некоторого целого m. Для отображений степени 1 это следует из теоремы 1. Если $\deg f = -1$, то надо рассмотреть отображение f^2 степени 1. Если $\deg f = 0$ и $\bar{f}$ — поднятие f, то для некоторого $M \geqslant 1$ $| f(x) | \leqslant M$ при всех

$x \in \mathbf{R}$. Тогда $g = \bar{f} \mid [-M, M]$ полусопряжено с f при помощи отображения $\pi \mid [-M, M]$ и наше утверждение будет следовать из того, что $h(g) = h(f)$ (в силу леммы 1) и $\operatorname{per}(g) = \operatorname{per}(f)$ (так как π отображает любую периодическую $\bar{f}$-орбиту в f-орбиту того же периода и если $\bar{f}^n(x) = x + k$ для целых n, k, то $\bar{f}^n(x+k) = (x+k)$. Если $|\deg f| > 1$, то f обладает любыми периодами, не равными 2, и $h(f) \geqslant \log |\deg f|$ (см. [4]).

3. Получим теперь оценки топологической энтропии по информации о двух периодических точках отображения f степени 1, а также выясним, какими еще периодами обладает f.

Зафиксируем поднятие $\bar{f}$ и предположим, что точки $x, y \in \operatorname{Per}(f)$ имеют соответственно периоды p, q и числа вращения $\rho_x = \rho(\bar{f}, x) = p_1/p$, $\rho_y = \rho(\bar{f}, y) = q_1/q$. Если $\rho_x = \rho_y$, то пусть l_1, l — такие взаимно простые числа, что $l_1/l = \rho_x = \rho_y$. Обозначим через d меньшее из чисел p/l, q/l при упорядоченности (1).

Теорема 2.1). *Если $\rho_x = \rho_y$, то из $d \lhd k$ следует, что $kl \in \operatorname{per}(f)$; если при этом $d = 2^m n$, n — нечетное число больше 1, то $h(f) \geqslant (1/2^m l) \times \log \lambda_n$, где λ_n — наибольший положительный нуль полинома $\lambda^n - 2\lambda^{n-2} - 1$.*

2). *Если $\rho_x \neq \rho_y$, то $pi + qj \in \operatorname{per}(f)$ при любых $i, j \in \mathbf{N}$ и $h(f) \geqslant \max\{\log \lambda_{p,q}, (1/s)\log(1 + s \cdot |\rho_y - \rho_x|)\}$, где $\lambda_{p,q}$ — наибольший положительный нуль полинома $\lambda^{p+q} - \lambda^p - \lambda^q$, а s — наименьшее общее кратное p и q.*

Доказательство. 1). Пусть $\rho_x = \rho_y = l_1/l$. Рассмотрим отображение $F = f^l$ и возьмем его поднятие $\bar{F} = \bar{f}^l - l_1$. Тогда $\rho(\bar{F}, x) = \rho(\bar{F}, y) = 0$ и точки x, y имеют F-периоды p/l и q/l соответственно. Тогда, согласно теореме 3.2 из [4], $h(F) \geqslant (\log \lambda_n)/2^m$, если $d = 2^m n$, и для любого k такого, что $d \lhd k$, найдется точка $z \in \mathbf{R}$ такая, что $\operatorname{per}(\bar{F}, z) = k$, $\operatorname{per}(F, \pi \times (z)) = k$. Поэтому $f^{kl}(\pi(z)) = \pi(z)$, причем $\rho(\bar{f}, \pi(z)) = l_1/l$ и, следовательно, f-период точки $\pi(z)$ делится на l. Таким образом, $\operatorname{per}(f, \pi(z)) = kl$.

2). Пусть теперь $\rho_x \neq \rho_y$. Будем считать, что $\rho_y > p_x > 0$. Определим функцию $L^n(z)$ формулой $L^n(z) = \bar{f}^n(\bar{z}) - \bar{z}$, $z \in S^1$, $n \in \mathbf{N}$. $\bar{z} \in \pi^{-1}(z)$. Докажем соотношение

$$\sum_{z \in \operatorname{orb}_f x} L^n(z) = np_1. \tag{4}$$

Действительно, пусть $\bar{x} \in \pi^{-1}(x)$. Тогда получим

$$\sum_{z \in \operatorname{orb}_f x} L^n(z) = \sum_{i=0}^{p-1} L^n(f^i(x)) = \sum_{i=0}^{p-1} (\bar{f}^{n+i}(\bar{x}) - \bar{f}^i(\bar{x})) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=1}^{n} (\bar{f}^{j+i}(\bar{x}) -$$

$$- \bar{f}^{j-1+i}(\bar{x})) = \sum_{j=1}^{n} (\bar{f}^{p+j-1}(\bar{x}) - \bar{f}^{j-1}(\bar{x})) = np_1.$$

Мы подразумеваем, что естественный порядок на $\mathbf{R}$ соответствует ориентации S^1 против часовой стрелки. Пусть A — правильное разбиение S^1 точками $a_1, \ldots, a_N$, $N \geqslant 2$, т. е. f отображает это множество точек в себя. Рассмотрим интервалы $U_1 = [a_1, a_2], \ldots, U_N = [a_N, a_1]$ этого разбиения. Далее, рассмотрим бесконечное разбиение $\bar{A} = \{\bar{U}, \bar{V}, \ldots\}$ прямой $\mathbf{R}$ точками $\pi^{-1}(a_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, т. е. интервалы разбиения $\bar{A}$ — компоненты связности $\pi^{-1}(U_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$. Построим по разбиению A для отображения f с поднятием $\bar{f}$ бесконечный граф $\bar{G}$ с вершинами $\bar{u}, \bar{v}, \ldots$ со следующим правилом смежности: если $\bar{U} = [b, c]$ и $[\bar{f}(b), \bar{f}(c)] \supset \bar{V}$, $\bar{U}, \bar{V} \in A$, то из $\bar{u}$ ведет ребро в $\bar{v}$. Учитывая, что A — правильное разбиение, получаем по индукции такое утверждение: если $[\bar{f}^n(b), \bar{f}^n(c)] \supset \bar{V}$ для некоторых интервалов $\bar{U} = [b, c]$, $\bar{V}$ разбиения $\bar{A}$, $n \in \mathbf{N}$, то в графе $\bar{G}$ имеется маршрут длины n, ведущий из $\bar{u}$ в $\bar{v}$.

Для $\overline{U}=[b, c]$ и целого числа k обозначим $U_{(k)}=[b+k, \ c+k]$. Заметим, что если в графе $\overline{G}$ есть ребро $\overline{u}\to\overline{v}$, то при любом $k\in\mathbf{Z}$ в $\overline{G}$ есть ребро $\overline{u}_{(k)}\to\overline{v}_{(k)}$. Построим граф $\pi(\overline{G})$ с вершинами $u_1, \dots, u_N$ со следующим правилом смежности: если $\overline{U}=[b, c]$ — некоторая компонента связности $\pi^{-1}(U_i)$, $\overline{V}=[b', c']$ — некоторая компонента связности $\pi^{-1}(U_j)$, $1\leqslant i, j\leqslant N$, и в $\overline{G}$ есть ребро $\overline{u}\to\overline{v}$, то из u_i в u_j ведет ребро, которое мы пометим индексом, равным целой части числа $b'-b$. Обозначим это ребро $\pi(\overline{u}\to\overline{v})$. Таким образом, если $[\overline{f}(b), \overline{f}(c)]$ содержит r компонент связности $\pi^{-1}(U_j)$, то из u_i в u_j ведет r ребер, помеченных r последовательными целыми числами. Любому маршруту $\overline{g}$ в графе $\overline{G}$ естественным образом соответствует маршрут $g=\pi(\overline{g})$ в графе $\pi(\overline{G})$. Обратно, по любому маршруту g в $\pi(\overline{G})$ ввиду помеченности всех ребер $\pi(\overline{G})$ можно найти единственный соответствующий маршрут $\overline{g}$ в $\overline{G}$ с точностью до сдвига всего маршрута на целое число, т. е. замены $\overline{u}$ на $\overline{u}_{(k)}$ при некотором $k\in\mathbf{Z}$ для всех вершин $\overline{u}$ маршрута $\overline{g}$. Мы будем через $\overline{g}_{(k)}$ обозначать маршрут в $\overline{G}$, получающийся сдвигом $\overline{g}$ на k единиц. Если $\overline{g}'$, $\overline{g}''$ — такие маршруты в $\overline{G}$, что конец $\overline{g}'$ совпадает с началом $\overline{g}''$, то через $\overline{g}'+\overline{g}''$ обозначим суперпозицию этих маршрутов.

Применим эти рассуждения, рассматривая разбиения S^1 орбитами исходных периодических точек x, y. Пусть графы $\overline{G}_x$, $\overline{G}_y$ и $\overline{G}_{x,y}$ построены для отображения f с поднятием $\overline{f}$ по разбиениям S^1 соответственно точками $\operatorname{orb}_f x$, $\operatorname{orb}_f y$ и $\operatorname{orb}_f x\cup\operatorname{orb}_f y$. Пусть $a_1, \dots, a_{p+q}$ — последовательные точки множества $\operatorname{orb}_f x\cup\operatorname{orb}_f y$ и a_i, a_{i+1} — такие соседние точки, что $a_i\in$ $\in\operatorname{orb}_f x$, $a_{i+1}\in\operatorname{orb}_f y$. Если $\overline{V}=[b, c]$ — компонента связности $\pi^{-1}(u_i)$, то $\pi(b)=a_i$, $\pi(c)=a_{i+1}$, $b<c<b+1$ и $\overline{f}^p(b)=b+p_1$, $\overline{f}^q(c)=c+q_1$. Поскольку $s=$н. о. к. (p, q) делится на p и q, то $\overline{f}^s(b)=b+(s/p)p_1$, $\overline{f}^s(c)=c+(s/q)q_1$. Таким образом, $[\overline{f}^s(b), \overline{f}^s(c)]$ содержит $r=1+(s/q)q_1-(s/p)p_1=1+s(\rho_y-$ $-\rho_x)$ компонент связности $\pi^{-1}(U_i)$. Рассмотрим граф $\overline{G}^s$, построенный для отображения f^s с поднятием $\overline{f}^s$ по тому же самому разбиению S^1 точками $a_1, \dots, a_{p+q}$. Согласно сказанному выше, в вершине u_i графа $G^s=\pi(\overline{G}^s)$ имеется r петель. По лемме 1.5 [4] $h(G^s)\geqslant\log r$, где $h(G^s)$ — топологическая энтропия топологической марковской цепи, построенной по графу G^s. Очевидно, $h(G^s)\geqslant\log r$, так как в топологической марковской цепи с графом G^s есть подцепь, являющаяся схемой Бернулли из r символов. Таким образом, $h(f)=h(f^s)/s\geqslant(1/s)\log(1+s(\rho_y-\rho_x))$.

Предположим, что $\overline{f}^q(b)-b>q_1$. В силу (4) и неравенства $\rho_x<\rho_y$ существует точка $z\in\operatorname{orb}_f x$ такая, что $L^q(z)<q_1$. Поэтому можно взять такие соседние точки z_1, z_2 орбиты x, что $L^q(z_1)<q_1$, $L^q(z_2)<q_1$. Пусть $U=[z_1, z_2]$ и $\overline{U}=[b', c']$ — компонента связности $\pi^{-1}(U)$, тогда $[\overline{f}^q(b'),$ $\overline{f}^q(c')]\supset[b'+q_1, c'+q_1]$ и, следовательно, через вершину u графа $\pi(\overline{G}_x)$ проходит цикл длины q. Кроме того $[\overline{f}^p(b'), \overline{f}^p(c')]=[b'+p_1, c'+p_1]$, и поэтому через вершину u проходит цикл длины p. Аналогичные рассуждения проведем для графа $\pi(\overline{G}_y)$, если $\overline{f}^p(c)-c<p_1$. Предположим теперь, что $\overline{f}^q(b)-b<q_1$ и $\overline{f}^p(c)-c>p_1$. Тогда $[\overline{f}^q(b), \overline{f}^q(c)]\supset[b+q_1, c+q_1]$ и $[\overline{f}^p(b), \overline{f}^p(c)]\supset[b+p_1, c+p_1]$. Таким образом, в графе $\pi(\overline{G}_{x,y})$ через вершину $u=u_i$ проходят цикл длины p и цикл длины q.

Итак, во всех трех случаях через вершину u графа G, равного $\pi(\overline{G}_x)$, $\pi(\overline{G}_y)$ или $\pi(\overline{G}_{x,y})$, проходят цикл g_x длины p и цикл g_y длины q. Заметим, что циклу g_x соответствует маршрут $\overline{g}_x$ длины p в графе $\overline{G}$, ведущий из $\overline{u}$ в $\overline{u}_{(p_1)}$ ($\overline{U}$ — произвольная компонента $\pi^{-1}(U)$), а циклу g_y — маршрут $\overline{g}_y$ длины q, ведущий из $\overline{u}$ в $\overline{u}_{(q_1)}$. Цикл g, проходящий через вершину u, назовем u-циклом. Назовем g простым u-циклом, если u встречается единственный раз среди вершин g. Разложим циклы g_x и g_y на простые u-циклы и предположим, что в разложениях g_x и g_y нет двух различных простых u-циклов. Тогда $g_x = m \cdot g$, $g_y = ng$ для некоторого простого u-цикла g и чисел $m, n \in \mathbf{N}$. Пусть g имеет длину j и ему соответствует маршрут $\bar{g}$ в $\bar{G}$, ведущий из $\bar{u}$ в $\bar{u}_{(k)}$. Тогда циклам g_x и g_y соответствуют маршруты $\bar{g}_x$ и $\bar{g}_y$ вида $\bar{g}_x = \bar{g} + \bar{g}_{(k)} + \ldots + \bar{g}_{(mk-k)}$, $\bar{g}_y = \bar{g} + \bar{g}_{(k)} + \ldots + \bar{g}_{(nk-k)}$. Поэтому $p = jm$, $p_1 = km$, $q = jn$, $q_1 = kn$. Отсюда $p_1/p = q_1/q$, что противоречит условию $\rho_x \neq \rho_y$.

Таким образом, можно найти простые u-циклы $g' \neq g''$, входящие в разложение $g_x + g_y$. Заметим, что различным перестановкам простых u-циклов, входящих в разложение $g_x + g_y$, соответствуют различные маршруты в графе G, ведущие из $\bar{u}$ в $\bar{u}_{(p_1+q_1)}$. Каждая такая перестановка обеспечивает по лемме 1.4 [4] существование неподвижной точки z отображения $\bar{f}^{p+q}$. Следовательно, $\rho(\bar{f}, z) = (p_1 + q_1)/(p + q)$. Проделаем перестановку простых u-циклов в цикле $g_x + g_y$, приводящую к циклу $(g_x + g_y)'$, который получается прохождением сначала всех циклов, равных g', а затем всех остальных циклов разложения $g_x + g_y$. Периодическая точка z отображения f, соответствующая по лемме 1.4 [4] циклу $(g_x + g_y)'$, имеет число вращения $\rho_z = (p_1 + q_1)/(p + q)$ и поэтому не может совпадать с точкой разбиения S^1. Следовательно, $\mathrm{per}(f, z) = p + q$. Поскольку $\rho_x < \rho_z < \rho_y$, то по индукции получаем существование периодических точек любого периода $pi + qj$ для $i, j \in \mathbf{N}$.

Рассмотрим отдельно граф T, состоящий из простого цикла длины p и простого цикла длины q, которые пересекаются в единственной вершине. В силу независимости циклов g_x и g_y $h(T) \leqslant h(G)$, где $h(T)$, $h(G)$ — топологическая энтропия топологических марковских цепей, заданных соответственно графами T, G. По лемме 1.5 [4] $h(G) \leqslant h(f)$. Характеристический полином матрицы смежности графа T равен $\lambda^{p+q-1} - \lambda^{p-1} - \lambda^{q-1}$ и поэтому $h(T) = \log \lambda_{p,q}$, где $\lambda_{p,q}$ — максимальный положительный нуль этого полинома. Таким образом, $h(f) \geqslant \log \lambda_{p,q}$.

Теорема 2 доказана.

Результат теоремы 2, касающийся сосуществования периодов, обобщает соответствующие результаты [4] (при $p = 1$) и [13] (при $p = \min \mathrm{per}(f)$).

1. *Ito R.* Rotation sets are closed.— Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1981, **89**, N 1, p. 107—111.
2. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя.— Укр. мат. журн., 1964, **16**, № 1, с. 61—71.
3. *Ефремова Л. С.* Периодические орбиты и степень непрерывного отображения окружности.— Дифференц. и интегр. уравнения, 1978, вып. 2, с. 109—115.
4. *Block L., Guckenheimer J., Misiurewicz M., Young L. S.* Periodic points and topological entropy.— Lect. Notes Math., 1980, **819**, p. 18—34.
5. *Block L.* Periods of periodic points of maps of the circle which have a fixed point.— Proc. AMS, 1981, **82**, N 3, p. 481—486.
6. *Auslander J., Katznelson Y.* Continuous maps of the circle without periodic points.— Isr. J. Math., 1979, **32**, N 4, p. 375—381.
7. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику.— М.: Мир, 1975.— 304 с.
8. *Афраймович В. С.* Некоторые свойства топологической энтропии.— В кн.: Тр. V Междунар. конф. по нелин. колебаниям: В 3-х т.— Киев : Наук. думка, 1970, т. 1, с. 62—68.
9. *Алексеев В. М.* Символическая динамика.— Одиннадцатая математическая школа.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976.— 212 с.
10. *Adler R. L., Konheim A. G., Mc Andrew M. H.* Topological entropy.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, **114**, N 2, p. 309—319.
11. *Прахар К.* Распределение простых чисел.— М.: Мир, 1967.— 511 с.
12. *Misiurewicz M.* Horseshoes for mappings of interval.— Bull. Acad. Polon. Sci., 1979, **27**, N 2, p. 167—169.
13. *Ефремова Л. С., Рахманкулов Р. Г.* Теоремы сосуществования периодических орбит эндоморфизмов окружности.— Дифференц. и интегр. уравнения, 1980, вып. 4, с. 116—118.

НИИ механики при Горьковском
государственном университете

Поступила в редакцию 16.02.82
после переработки — 09.11.82