УДК 519.644

**Э. А. Шамсиев** (Ташкент. ун-т, Узбекистан)

# О ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ОБЛАСТЯМ

We construct cubature formulas for the computation of integrals over spherical domains containing less knots than the known ones.

Для обчислення інтегралів по сферичних областях побудовано кубатурні формули, що містять менше вузлів порівняно з відомими.

С. Л. Соболевым [1] был разработан метод построения кубатурных формул для двумерной сферы, инвариантных относительно групп вращений правильных многогранников. Г. Н. Салихов [2] доказал возможность построения инвариантных кубатурных формул для многомерной сферы и осуществил реализацию метода для сферы четырех- и пятимерного пространства. В. И. Лебедев [3 – 5] предложил метод построения кубатурных формул типа Гаусса – Маркова для двумерной сферы, инвариантных относительно группы октаэдра. За счет удачного подбора инвариантных многочленов ему удалось возникающую систему нелинейных алгебраических уравнений для определения параметров кубатурной формулы разбить на несколько поочередно стандартно решаемых самостоятельных подсистем. Аналогичную работу для группы икосаэдра выполнил С. И. Коняев [6, 7]. И. П. Мысовских [8] сформулировал теорему С. Л. Соболева об инвариантной кубатурной формуле для случая произвольной конечной ортогональной группы, собрал и систематизировал данные из теории инвариантов, необходимые для построения кубатурных формул, построил кубатурные формулы для различных областей, инвариантные относительно групп, порожденных отражениями, и установил нижние границы для числа узлов кубатурных формул. А. К. Пономаренко [9, 10] и С. Б. Стоянова [11] построили инвариантные кубатурные формулы для гипершара и гипероктаэдра, имеющие алгебраическую степень точности до одиннадцати и содержащие в ряде случаев наименьшее число узлов в классе рассматриваемых формул. Во всех вышеупомянутых работах использованы группы преобразований правильных многогранников и построены кубатурные формулы фиксированной алгебраической степени точности. М. В. Носков [12] при построении кубатурной формулы для периодических функций применил аппарат теории инвариантных кубатурных формул. При этом он использовал группу, получаемую декартовым произведением $n$ групп преобразований правильного $m$-угольника. В данной работе аналогичные группы преобразований применяются для вычисления интегралов по сферическим областям. Таковыми являются все евклидово пространство $R^n$, сфера $S_{n-1} = \{ x \in R^n \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \}$, шар $B_n = \{ x \in R^n \,|\, x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le 1 \}$.

Сначала построим кубатурные формулы для сферы. При этом будем различать сферы четной и нечетной размерности.

**1.** Пусть $S_{2n-1}$ — единичная сфера $2n$-мерного евклидова пространства $R^{2n}$, $n \ge 2$. Определим условия, при выполнении которых существует кубатурная формула $(2m-1)$-й алгебраической степени точности, имеющая вид

$$I(f) \cong S(f), \tag{1}$$

где

$$I(f) \overset{\text{df}}{=} \int\limits_{S_{2n-1}} f(x)\,dS,$$

$$S(f) \overset{\text{df}}{=} \frac{\pi^n}{m^n} \sum_{l=0}^{1} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=1}^{N} D_{k_1}^{(1)} D_{k_2}^{(2)} \ldots D_{k_{n-1}}^{(n-1)} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{m} f(d^{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},i_1,i_2,\ldots,i_n}),$$

$$d^{(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},i_1,i_2,\ldots,i_n)} = f\Bigg( \sqrt{(1-t_{k_1}^{(1)})(1-t_{k_2}^{(2)})\ldots(1-t_{k_{n-1}}^{(n-1)})} \cos\frac{(2i_1-l)\pi}{m},$$

$$\sqrt{(1-t_{k_1}^{(1)})(1-t_{k_2}^{(2)})\ldots(1-t_{k_{n-1}}^{(n-1)})} \sin\frac{(2i_1-l)\pi}{m},$$

$$\sqrt{t_{k_2}^{(2)}(1-t_{k_2}^{(2)})\ldots(1-t_{k_{n-1}}^{(n-1)})} \cos\frac{(2i_2-l)\pi}{m},$$

$$\sqrt{t_{k_2}^{(2)}(1-t_{k_2}^{(2)})\ldots(1-t_{k_{n-1}}^{(n-1)})} \sin\frac{(2i_2-l)\pi}{m}, \ldots$$

$$\ldots, \sqrt{t_{k_{S-1}}^{(S-1)}(1-t_{k_S}^{(S)})\ldots(1-t_{k_{n-1}}^{(n-1)})} \cos\frac{(2i_S-l)\pi}{m},$$

$$\sqrt{t_{k_{S-1}}^{(S-1)}(1-t_{k_S}^{(S)})\ldots(1-t_{k_{n-1}}^{(n-1)})} \sin\frac{(2i_S-l)\pi}{m}, \ldots$$

$$\ldots, \sqrt{t_{k_{n-1}}^{(n-1)}} \cos\frac{(2i_n-l)\pi}{m}, \sqrt{t_{k_{n-1}}^{(n-1)}} \sin\frac{(2i_n-l)\pi}{m} \Bigg),$$

$D_{k_j}^{(j)}$ и $t_{k_j}^{(j)}$ определяются как параметры квадратурной формулы Гаусса или Гаусса – Маркова для отрезка $[0, 1]$ с весом $(1-t)^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\int_0^1 (1-t)^{j-1} \varphi(t)\, dt \cong \sum_{k_j=1}^{N} D_{k_j}^{(j)} \varphi(t_{k_j}^{(j)}). \tag{2}$$

**Теорема 1.** *Пусть* (2) *является квадратурной формулой Гаусса с* $N = p$ *узлами. Тогда при* $m = 2p$ *кубатурная формула* (1) *имеет* $(4p-1)$*-ю алгебраическую степень точности.*

**Теорема 2.** *Пусть* (2) *является квадратурной формулой Гаусса – Маркова с* $N = p+1$ *узлом при* $t_1^{(j)} = 0$ *и* $t_{p+1}^{(j)} = 1$. *Тогда при* $m = 2p$ *кубатурная формула* (1) *имеет* $(4p-1)$*-ю алгебраическую степень точности.*

**Теорема 3.** *Пусть* (2) *является квадратурной формулой Гаусса – Маркова с* $N = p+1$ *узлом при* $t_1^{(j)} = 0$ *или* $t_{p+1}^{(j)} = 1$. *Тогда при* $m = 2p+1$ *кубатурная формула* (1) *имеет* $(4p+1)$*-ю алгебраическую степень точности.*

***Доказательство.*** Покажем, что формула (1) точна для произвольного одночлена $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{2n}^{\alpha_{2n}}$ $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_{2n} \le 2m-1)$. В случае, когда хотя бы один из $\alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$, является нечетным числом, интеграл от одночлена равен нулю. Нулевое значение дает также кубатурная сумма, так как при вычислении значения одночлена по каждой переменной получаем квадратурную формулу прямоугольников с $2m$ узлами. Поэтому положим $\alpha_i = 2\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, 2n$. Тогда

$$I(x_1^{2\beta_1} x_2^{2\beta_2} \ldots x_{2n}^{2\beta_n}) = \frac{2\Gamma\left(\frac{2\beta_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\beta_2+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2\beta_{2n}+1}{2}\right)}{\Gamma(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{2n}+n)},$$

где

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty t^{\lambda-1} e^{-\lambda}\, dt = \int_0^\infty \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\lambda-1} dt$$

— гамма-функция Эйлера.

Подставим в кубатурную сумму одночлен $x_1^{2\beta_1} x_2^{2\beta_2} \ldots x_{2n}^{2\beta_n}$:

$$S(x_1^{2\beta_1} x_2^{2\beta_2} \ldots x_{2n}^{2\beta_n}) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}}^{N} D_{k_1}^{(1)} (1 - t_{k_1}^{(1)})^{\beta_1+\beta_2} t_{k_1}^{(1)\beta_3+\beta_4} \times$$

$$\times D_{k_2}^{(2)} (1 - t_{k_2}^{(2)})^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4} t_{k_2}^{(2)\beta_5+\beta_6} D_{k_3}^{(3)} (1 - t_{k_3}^{(3)})^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+\beta_6} t_{k_3}^{(3)\beta_7+\beta_8} \ldots$$

$$\ldots D_{k_{n-1}}^{(n-1)} (1 - t_{k_{n-1}}^{(n-1)})^{\beta_1+\ldots+\beta_{2n-2}} t_{k_{n-1}}^{(n-1)\beta_{2n-1}+\beta_{2n}} \times$$

$$\times \frac{\pi^n}{m^n} \sum_{l=0}^{1} \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{m} \cos^{2\beta_1} \frac{(2i_1 - l)\pi}{m} \sin^{2\beta_2} \frac{(2i_1 - l)\pi}{m} \ldots$$

$$\ldots \cos^{2\beta_{2n-1}} \frac{(2i_n - l)\pi}{m} \sin^{2\beta_{2n}} \frac{(2i_n - l)\pi}{m} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta_3 + \beta_4 + 1)\Gamma(\beta_1 + \beta_2 + 1)}{\Gamma(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + 2)} \frac{\Gamma(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + 2)\Gamma(\beta_5 + \beta_6 + 1)}{\Gamma(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + 3)} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\beta_1 + \ldots + \beta_6 + 3)\Gamma(\beta_7 + \beta_8 + 1)}{\Gamma(\beta_1 + \ldots + \beta_8 + 4)} \ldots$$

$$\ldots \frac{\Gamma(\beta_1 + \ldots + \beta_{2n-2} + n - 1)\Gamma(\beta_{2n-1} + \beta_{2n} + 1)}{\Gamma(\beta_1 + \ldots + \beta_{2n} + n)} \times$$

$$\times \frac{2\Gamma\left(\frac{2\beta_1 + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\beta_1 + 2\beta_2 + 2}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{2\beta_2 + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\beta_3 + 2\beta_4 + 2}{2}\right)} \ldots \frac{\Gamma\left(\frac{2\beta_{2n} + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\beta_{2n-1} + 2\beta_{2n} + 2}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{2\beta_1 + 1}{2}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{2\beta_{2n} + 1}{2}\right)}{\Gamma(\beta_1 + \beta_2 \ldots \beta_{2n} + n)}.$$

При вычислениях использована формула [13, с. 181]

$$\int_0^1 x^{\lambda-1}(1 - x)^{\mu-1} dx = \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}.$$

Теоремы доказаны.

Построенные кубатурные формулы при более простой конструкции содержат в $2^{n-1}$ раза меньше узлов, чем формулы аналогичной алгебраической степени точности, получаемые методом повторного применения квадратурных формул [8, с. 119 – 123].

Приведем значения параметров кубатурной формулы (1) при $n = 2$:

$$\int_{S_3} f(x) dS \cong \frac{\pi^2}{m^2} \sum_{l=0}^{1} \sum_{k_1=0}^{N} D_{k_1}^{(1)} \sum_{i_1,i_2=1}^{m} f\left(\sqrt{1 - t_{k_1}} \cos \frac{(2i_1 - l)\pi}{m}, \sqrt{1 - t_{k_1}} \sin \frac{(2i_1 - l)\pi}{m},\right.$$

$$\left.\sqrt{t_{k_1}} \cos \frac{(2i_2 - l)\pi}{m}, \sqrt{t_{k_1}} \sin \frac{(2i_2 - l)\pi}{m}\right),$$

где $D_{k_1}^{(1)}$ и $t_{k_1}$ — параметры кубатурной формулы Гаусса или Гаусса – Маркова для отрезка $[0, 1]$ с постоянным весом

$$\int_0^1 \varphi(t)\,dt \;\cong\; \sum_{k_1=1}^{N} D_{k_1}\varphi(t_{k_1}).$$

**Теорема 4.** *Не существует кубатурной формулы вида* (1), *алгебраическая степень точности которой была бы выше чем* $2m-1$.

***Доказательство.*** Кубатурная формула (1) инвариантна относительно группы $G$ [8, с. 129], которая получается прямым произведением $n$ групп преобразований правильного $m$-угольника в себя.

Обозначим эти группы через $G_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Группа $G_i$ имеет следующие оси симметрии [14]:

$$\eta_k \;=\; x_{2i-1}\sin\frac{k\pi}{m} - x_{2i}\cos\frac{k\pi}{m} \;=\; 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Перемножая левые части этих уравнений и возводя в квадрат полученное выражение, получаем многочлен $P^2(x_{2i-1}, x_{2i})$ степени $2m$. Этот многочлен неотрицателен в $S_{2n-1}$, и поэтому интеграл от него по этой области положителен. С другой стороны, подставляя $P^2(x_{2i-1}, x_{2i})$ в кубатурную формулу (1), получаем нулевое значение, так как узлами кубатурной формулы являются вершины и середины ребер правильного $m$-угольника, лежащие на осях симметрии. Поэтому сколь бы не увеличивали число точек в построенной формуле, она не будет давать точное значение многочлена $P^2(x_{2i-1}, x_{2i})$.

Теорема доказана.

**2.** Перейдем теперь к сфере $(2n+1)$-мерного пространства. Будем изучать кубатурную формулу вида

$$\int_{S_{2n}} f(x)\,dS \;\cong\; \frac{\pi^n}{2m^n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} A_k \sum_{l=0}^{1}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=1}^{N} D_{k_1}^{(1)}D_{k_2}^{(2)}\ldots D_{k_{n-1}}^{(n-1)}\times$$

$$\times \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{m}\Big[f\Big(\sqrt{1-\tau_k}\,d^{(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},i_1,i_2,\ldots,i_n)}, \sqrt{\tau_k}\Big) +$$

$$+\; f\Big(\sqrt{1-\tau_k}\,d^{(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},i_1,i_2,\ldots,i_n)}, -\sqrt{\tau_k}\Big)\Big], \tag{3}$$

где $A_k$ и $\tau_k$ — параметры квадратурной формулы Гаусса или Гаусса – Маркова для отрезка $[0, 1]$ с весом $(1-t)^{n-1}t^{1/2}$:

$$\int_0^1 (1-t)^{n-1}\sqrt{t}\,\varphi(t)\,dt \;\cong\; \sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]} A_k\varphi(\tau_k). \tag{4}$$

Здесь $\left[\dfrac{m+1}{2}\right]$ — целая часть $\dfrac{m+1}{2}$.

**Теорема 5.** *Пусть* $m = 2p$ *и* (4) *является квадратурной формулой Гаусса с* $p$ *узлами. Тогда при выполнении условий теоремы* 1 *или* 2 *кубатурная формула* (3) *имеет* $(4p-1)$*-ю алгебраическую степень точности.*

**Теорема 6.** *Пусть* $m = 2p+1$ *и* (4) *является квадратурной формулой Гаусса – Маркова с* $p+1$ *узлом при* $\tau_1 = 0$. *Тогда при выполнении условий теоремы* 3 *кубатурная формула* (3) *имеет* $(4p+1)$*-ю алгебраическую степень точности.*

***Доказательство.*** Подставим в кубатурную сумму одночлен $x_1^{2\beta_1}x_2^{2\beta_2}\ldots x_{2n}^{2\beta_{2n}}x_{2n+1}^{2\beta_{2n+1}}$:

$$\frac{\pi^n}{m^n}\sum_{k=1}^{\left[\frac{m+1}{2}\right]}(1-\tau_k)^{\beta_1+\ldots+\beta_{2n}}\tau_k^{\beta_{2n+1}}A_k\sum_{l=0}^{1}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=1}^{N}D_{k_1}^{(1)}D_{k_2}^{(2)}\ldots D_{k_{n-1}}^{(n-1)}\times$$

$$\times\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{m}(d^{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},i_1,i_2,\ldots,i_n})^{2\beta_1+2\beta_2+\ldots+2\beta_{2n}}=$$

$$=\frac{\Gamma(n+\beta_1+\ldots+\beta_{2n})\Gamma\left(\beta_{2n+1}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\beta_1+\ldots+\beta_{2n}+\beta_{2n+1}+\frac{1}{2}\right)}\frac{2\Gamma\left(\frac{2\beta_1+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2\beta_{2n}+1}{2}\right)}{\Gamma(n+\beta_1+\ldots+\beta_{2n}+n)}=$$

$$=\frac{2\Gamma\left(\frac{2\beta_1+1}{2}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{2\beta_{2n+1}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2n+2\beta_1+2\beta_2+\ldots+2\beta_{2n+1}+1}{2}\right)}.$$

То же самое значение получаем, если будем вычислять интеграл

$$\int\limits_{S_{2n}}x_1^{2\beta_1}x_2^{2\beta_2}\ldots x_{2n+1}^{2\beta_{2n+1}}\,dS.$$

Теорема доказана.

Кубатурная формула (3) также содержит примерно в $2^{n-1}$ раза меньше узлов, чем формулы, получаемые методом повторного применения кваратурных формул.

Формула (3) инвариантна относительно группы, которая получается из группы $G$ в $R^{2n+1}$ добавлением преобразования $x_{2n+1}\to -x_{2n+1}$.

**Теорема 7.** *Не существует кубатурной формулы вида* (3), *алгебраическая степень точности которой была бы выше чем* $2m-1$.

Теорема доказывается аналогично теореме 4.

**3.** Используя методику работы [15], нетрудно получить следующую кубатурную формулу $(2m-1)$-й алгебраической степени точности для шара $B_{2n}$:

$$\int\limits_{B_{2n}}f(x)dx\;\cong\;C_0f(\theta)+\sum_{s=1}^{m-2\sigma-1}C_s\Delta^s f(x)|_{x=\theta}+$$

$$+\frac{\pi^n}{m^n}\sum_{j=1}^{\sigma}T_j\sum_{l=0}^{1}\sum_{k_1,k_2,\ldots,k_{n-1}=1}^{N}D_{k_1}^{(1)}D_{k_2}^{(2)}\ldots D_{k_{n-1}}^{(n-1)}\times$$

$$\times\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=1}^{m}f(a_jd^{(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1},i_1,i_2,\ldots,i_n)}),\tag{5}$$

где $\theta=(0,0,\ldots,0)$, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$, $T_j=\frac{1}{2b_j^{m-2\sigma}}E_j$, $a_j=\sqrt{b_j}$, $E_j$ и $b_j$ — параметры квадратурной формулы типа Гаусса для отрезка $[0,1]$ с весом $\tau^{n+m-2\sigma-1}$,

$$\int\limits_0^1\tau^{n+m-2\sigma-1}\varphi(\tau)d\tau\;\cong\;\sum_{j=1}^{\sigma}E_j\varphi(b_j),$$

$$C_s = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)}\left[\frac{1}{n+s} - \sum_{j=1}^{\sigma} E_j b_j^{s+2\sigma-m}\right] : \Delta_s,$$

$$C_0 = \frac{\pi^n}{\Gamma(n)}\left[\frac{1}{n} - \sum_{j=1}^{\sigma} E_j b_j^{2\sigma-m}\right],$$

$$\Delta_s = 2^{2s} \cdot s!\, n(n+1)(n+2)\ldots(n+s-1), \qquad s! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s,$$

$$\sigma \leq \left[\frac{m}{2}\right], \left[\frac{m}{2}\right] \text{— целая часть } \frac{m}{2}.$$

Кубатурная формула (5) при $\sigma = \left[\frac{m}{2}\right]$ производных не содержит. В этом случае число ее узлов также в $2^{n-1}$ раза меньше, чем число узлов кубатурной формулы аналогичной алгебраической степени точности, получаемой методом повторного применения квадратурных формул [8, с. 123 – 128]. Используя формулы (1) и (3), можно получить и другие кубатурные формулы для шара и пространства.

1. *Соболев С. Л.* О формулах механических кубатур на поверхности сферы // Сиб. мат. журн. – 1962. – **3**, № 5. – С. 769 – 791.
2. *Салихов Г. Н.* Кубатурные формулы для многомерных сфер. – Ташкент: Фан, 1985. – 104 с.
3. *Лебедев В. И.* О квадратурах на сфере наивысшей алгебраической степени точности // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к некоторым задачам математической физики. – Новосибирск, 1973. – С. 31 – 35.
4. *Лебедев В. И.* Квадратурные формулы для сферы 25 – 29-го порядка точности // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 1. – С. 132 – 142.
5. *Лебедев В. И., Лайков Д. Н.* Кубатурные формулы для сферы гауссова типа порядков 65, 71, 77, 83, 89, 95 и 101 // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы V междунар. сем.-совещ. (Красноярск, 13 – 18 сент. 1999 г.). – С. 106 – 118.
6. *Коняев С. И.* Квадратурные формулы на сфере, инвариантные относительно группы икосаэдра // Вопросы вычислит. и прикл. математики. – 1975. – Вып. 32. – С. 69 – 76.
7. *Коняев С. И.* Квадратуры типа Гаусса для сферы, инвариантные относительно группы икосаэдра с инверсией // Мат. заметки. – 1979. – **25**, № 4. – С. 629 – 634.
8. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336 с.
9. *Пономаренко А. К.* Три кубатурные формулы девятой степени точности для гипероктаэдра // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы V междунар. сем.-совещ. (Красноярск, 13 – 18 сент. 1999 г.). – С. 150 – 158.
10. *Пономаренко А. К.* Две кубатурные формулы // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы VII междунар. сем.-совещ. (Красноярск, 18 – 23 авг. 2003 г.). – С. 133 – 138.
11. *Stoyanova S. B.* Invariant cubature formula of the seventh degree of accuracy for the hypersphere // Кубатурные формулы и их приложения: Материалы V междунар. сем.-совещ. (Красноярск, 13 – 18 сент. 1999 г.). – С. 285 – 290.
12. *Носков М. В.* Кубатурные формулы для приближенного интегрирования периодических функций // Кубатурные формулы и функциональные уравнения. (Методы вычислений. Вып. 14). – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1985. – С. 15 – 24.
13. *Двайт Г. Г.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука, 1977. – 228 с.
14. *Игнатенко В. Ф.* О плоских алгебраических кривых с осями симметрии // Укр. геом. сб. – 1978. – Вып. 21. – С. 31 – 33.
15. *Шамсиев Э. А.* Об инвариантных кубатурных формулах, содержащих производные // Численное интегрирование и смежные вопросы. – Ташкент: Фан, 1990. – С. 77 – 85.

Получено 20.04.2005,
после доработки — 14.11.2005