УДК 512.54

С. Н. Козулин, В. И. Сенашов, В. П. Шунков
(Ин-т вычислит. моделирования СО РАН, Красноярск, Россия)

О ГРУППАХ ФРОБЕНИУСА С НЕИНВАРИАНТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ $SL_2(3)$*

We obtain a criterion for the unsimplicity of an infinite group containing the infinite class of the Frobenius groups $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ with complement $SL_2(3)$.

Отримано ознаку непростоти нескінченної групи, що містить нескінченний клас груп Фробеніуса $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ з доповненням $SL_2(3)$.

Бесконечные группы с разного рода условиями конечности начали изучать в 30 – 40-х годах прошлого века в школе О. Ю. Шмидта. Это было связано с попытками обобщить некоторые результаты относительно конечных групп на бесконечные группы. Результаты по этому направлению можно также найти в работах С. Н. Черникова [1, 2], М. И. Каргаполова [3, 4], В. П. Шункова [5, 6] и др.

Настоящая работа также относится к этому разделу теории групп. В ней получен признак непростоты бесконечной группы с условиями конечности. Признаки непростоты применяются во многих областях теории групп. Одним из основных признаков непростоты является теорема Фробениуса. В 1901 г. Г. Фробениус доказал, что в конечной группе G, содержащей пару Фробениуса (G, H), совокупность элементов, не содержащихся ни в H, ни в одной сопряженной с H подгруппе, вместе с единицей составляют нормальный делитель F группы G [7]. Теорема Фробениуса в полном объеме переносится на класс локально конечных групп [8, 9]. Также нетрудно убедиться, что она справедлива и в классе (периодических) бинарно конечных групп, т. е. групп, в которых любая пара элементов порождает конечную подгруппу. Однако теорема Фробениуса неверна в общем случае, более того, она неверна в классе периодических групп. В связи с этим фактом В. П. Шунков определение пары Фробениуса распространил на бесконечные группы. Напомним, что (G, H) называется парой Фробениуса, если $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$.

В. П. Шунков ввел следующий аналог определения группы Фробениуса для бесконечных групп.

Определение. *Группа вида* $G = F \leftthreetimes H$ *называется группой Фробениуса* [10], *если выполняются следующие условия*:

1) $H^g \cap H = 1$, $g \in G \setminus H$;
2) $G \setminus F = \bigcap_{g \in G} H^g \setminus \{1\}$.

Группы Фробениуса встречаются в качестве секций во всех конечных ненильпотентных группах, что делает их мощным инструментом исследования групп с различными условиями конечности [11 – 13].

Идея рассматривать произвольные, не обязательно конечные группы Фробениуса $L_g = \langle a, g^{-1}ag \rangle$ с циклическим неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ принадлежит В. П. Шункову [10]. Признаки непростоты групп с произвольными подгруппами Фробениуса L_g позволяют делать более сильные заключения о строении групп. В данной работе методика исследования групп основана на изучении бесконечного множества подгрупп Фробениуса с неинвариантным множителем $SL_2(3)$.

* Поддержана грантом 02-01-00078 Российского фонда фундаментальных исследований, грантом № 9 шестого конкурса-экспертизы 1999 г. научных проектов молодых ученых и грантом КГПУ № 19-04-1/фп по программе фундаментальных исследований в области естественных и гуманитарных наук.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть* G — *группа,* H — *ее собственная подгруппа,* a — *элемент порядка* 3 *из* G *и выполняются условия*:

1) *нормализатор любой конечной* $\langle a\rangle$-*инвариантной подгруппы из* H *содержится в* H;

2) *почти для всех* (*т. е. кроме, быть может, конечного числа*) *элементов вида* $g^{-1}ag$ $(g \in G\backslash H)$ *подгруппы* $L_g = \langle a, g^{-1}ag\rangle$ *являются группами Фробениуса с неинвариантным множителем* $\langle a\rangle$ *или с неинвариантным множителем* $Q \leftthreetimes \langle a\rangle$, *где* Q — *группа кватернионов.*

Тогда имеет место одно из следующих утверждений:

I. *Элемент* a *содержится в конечной нормальной в* G *подгруппе*;

II. 1) $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a\rangle)$ *и* $F \leftthreetimes \langle a\rangle$ — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем* $\langle a\rangle$;

2) $G = F \leftthreetimes (QN_G(\langle a\rangle))$ *и* $F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes \langle a\rangle)$ — *группа Фробениуса с абелевым ядром* F *и неинвариантным множителем* $Q \leftthreetimes \langle a\rangle$, *где* Q — *группа кватернионов.*

Приведем некоторые необходимые определения.

Любое конечное расширение прямого произведения квазициклических групп, взятых в конечном числе, называется *черниковской группой.*

Элемент называется *строго вещественным* относительно инволюции, если он при сопряжении этой инволюцией переводится в обратный.

Элемент g из группы G называется *p-вещественным* относительно некоторого элемента a простого порядка p из G, если $\langle g, a\rangle$ — группа Фробениуса и g содержится в ее ядре.

Пусть G — группа, содержащая элемент g. Элемент g называется *почти регулярным*, если централизатор $C_G(g)$ конечен.

Перейдем к доказательству основного результата.

Обозначим

$$A = \langle a\rangle, \quad N = Q \leftthreetimes A, \quad R = N_G(\langle a\rangle), \quad \mathfrak{V} = \bigcap_{g\in G} g^{-1}A^{\#}g;$$

$\mathfrak{L}$ — множество элементов c из $G\backslash H$, для которых $\langle a, c\rangle = \langle a, a^c\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A и ядром, содержащим элемент c, $\mathfrak{L}_k$ — множество элементов c из $G\backslash H$, для которых $\langle a, c\rangle = F_k \leftthreetimes Q_k \leftthreetimes \langle a\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $Q_k \leftthreetimes \langle a\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, и ядром, содержащим элемент c. Множество $\mathfrak{M} = \mathfrak{L} \cup \mathfrak{L}_1 Q_1 \cup \mathfrak{L}_2 Q_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{L}_n Q_n \cup \cup \ldots$, где Q_k, $k = 1, 2, \ldots$, — $\langle a\rangle$-инвариантные группы кватернионов. Обозначим $\mathfrak{J} = \{j \,|\, j \in \mathfrak{M} \cap R,\ |j| = 2\}$. Далее, для элемента $s \in g^{-1}A^{\#}g$ положим $A_s = \langle s\rangle = A^g$, $N_s = N^g$, $R_s = R^g$, $H_s = H^g$ и $\mathfrak{M}_s = g^{-1}\mathfrak{M}g$. Кроме того, если $\langle s, t\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A_s для некоторых $s \in \mathfrak{V}$ и $t \in \mathfrak{V}\backslash H_s$, то пишем $\langle s, t\rangle = A(s, t)$. Если $\langle s, t\rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем N_s для некоторых $s \in \mathfrak{V}$ и $t \in \mathfrak{V}\backslash H_s$, то $\langle s, t\rangle = B(s, t)$.

Всюду в дальнейшем тройка (G, H, a) удовлетворяет условиям 1, 2 теоремы.

В силу теоремы 10 [14] подгруппы $L_g = \langle a, g^{-1}ag\rangle$ $(g \in G\backslash H)$ — конечные группы Фробениуса с абелевым ядром.

Для доказательства теоремы нам понадобится ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть* $L = F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes \langle a\rangle)$ — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем* $N = Q \leftthreetimes \langle a\rangle$ *и ядром* F. *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Для любого неединичного элемента* $s \in N$ *отображение* $\alpha_s : F \to F$, *задаваемое формулой* $\alpha_s(c) = s^{-1}c^{-1}sc$, *является биекцией.*

2. *Если* $L = B \leftthreetimes N_v$ $(N_v = Q_v \leftthreetimes \langle v \rangle)$ *и* $N_L(N_v) = N_v$, *то* $B = F$ *и* $N_v = N^c$ *для некоторого* $c \in F$.

3. *Если для некоторого элемента* $b \in L$ *группа* $M = \langle N, N^b \rangle$ — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем* $N_v = Q_v \leftthreetimes \langle v \rangle$, *то* $b \in M$, $M \bigcap F$ — *ядро в* M *и* N_v *сопряжена с* N *в* M.

Доказательство. 1. Пусть $s \in N^{\#}$, $b, c \in F$ и $s^{-1}b^{-1}sb = s^{-1}c^{-1}sc$. Тогда $b^{-1}sb = c^{-1}sc$ и $bc^{-1} \in F \bigcap C_L(s) \subseteq F \bigcap N = 1$ (определение группы Фробениуса), что влечет $b = c$. Следовательно, при $b \neq c$ имеем $\alpha_s(b) \neq \alpha_s(c)$. Далее, если $b \in F$, то $sb \notin F$, и согласно определению группы Фробениуса найдутся элементы $d \in F$ и $r \in N$ такие, что $sb = d^{-1}rd$ и $b = s^{-1}d^{-1}rd = (s^{-1}d^{-1}sd)(s^{-1}d^{-1}rd)$. Элементы $(s^{-1}d^{-1}sd)$, b лежат в F, следовательно, и $(s^{-1}d^{-1}rd)$ лежит в F, а это возможно только при $s = r$. Таким образом, $b = (s^{-1}d^{-1}sd) = \alpha_s(d)$ и α_s — биекция на F.

2. Пусть $L = B \leftthreetimes N_v$, где $N_v = Q_v \leftthreetimes \langle v \rangle$, Q_v — группа кватернионов. Из первого утверждения леммы очевидным образом вытекает, что либо $B \leq F$, либо $B > F$. В любом случае $v \in L \backslash F$, и из условия $N_G(N_v) = N_v$ и определения группы Фробениуса заключаем, что $N_v = N^c$ для подходящего $c \in F$. Наконец, из определения полупрямого произведения следует равенство $B = F$.

3. Пусть $b \in L$ и $M = \langle N, N^b \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем N. Положим $D = M \bigcap F$. Имеем $M = D \leftthreetimes N$, причем $N_L(N) = N$. Согласно утверждению 2 D — ядро группы M и N — ее неинвариантный множитель. Аналогично получаем, что N^b и N сопряжены в M, причем с помощью некоторого элемента c из D. Далее, $b = rd$ для некоторого $r \in N$, $d \in F$ и $cd^{-1}Ndc^{-1} = cb^{-1}Nbc^{-1} = N$. Отсюда $dc^{-1} = 1$ (определение группы Фробениуса), $d = c \in M$ и $b \in M$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $R \backslash H$ *непусто, то условия* 1, 2 *теоремы выполняются для тройки* (G, R, a).

Доказательство. Пусть $R \backslash H \neq \varnothing$ и $r \in R \backslash H$. Тогда $rh \in G \backslash H$ и $A^h = A^{rh}$ для любого $h \in H$. Отсюда

$$\bigcap_{g \in G \backslash H} g^{-1}A^{\#}g = \bigcap_{g \in G} g^{-1}A^{\#}g,$$

и, следовательно, условия 1, 2 теоремы выполняются для любой тройки (G, T, a) (T — подгруппа из G). В частности, это утверждение справедливо и для тройки (G, R, a).

На основании леммы 2 всюду в дальнейшем предполагаем, что $R \leq H$.

Лемма 3. *Пусть* $g \in G \backslash H$ *и* $L_g = \langle a, a^g \rangle$ — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем* $N_g = Q_g \leftthreetimes \langle a \rangle$ *и ядром* F_g, *где* Q_g — *группа кватернионов. Тогда*:

1) A *и* A^g *сопряжены в* L_g;

2) $L_g = B(a, a^g) = B(a, a^s)$, $s \in g^{-1}N^{\#}g$;

3) *для любого* $c \in F_g \backslash H$ *выполняется одно из утверждений*:

а) $\langle a, c \rangle = \langle a, a^c \rangle = A(a, ca) = A(a, ac) = A(a, a^c)$, б) $\langle a, c\rangle = \langle a, a^c\rangle = B(a, ca) = B(a, ac) = B(a, a^c)$.

Доказательство. Пусть $g \in G\backslash H$ и $L_g = \langle a, a^g\rangle$.

1. Поскольку L_g — конечная группа, утверждение очевидно.

2. Докажем сначала, что $a^g \notin H$. Если это не так, то $L_g < H$. Согласно определению группы Фробениуса подгруппы A и A^g сопряжены в L_g, т. е. $A^h = A^g$, $h \in L_g < H$. Но в этом случае $A = A^{gh^{-1}}$ и $gh^{-1} \in N_G(A) \le R \le H$. Следовательно, $g \in H$, что противоречит выбору g, т. е. $a^g \notin H$. Но в данном случае это равносильно $L_g = B(a, a^g)$. Утверждение, что $L_g = B(a, a^s)$ для любого $s \in g^{-1}N^{\#}g$, получаем как частный случай утверждения 3.

3. Поскольку $a^g \notin H$, то $F_g\backslash H$ непусто. Пусть s — произвольный элемент из $F_g\backslash H$ и положим $L = (a, a^c)$, $L \le L_g$. Согласно условию 2 теоремы возможны два случая. Если $L = B \leftthreetimes A$ $(B = L \cap F_g)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A, то утверждение леммы вытекает из леммы 6.3 [13]. Пусть теперь $L = B \leftthreetimes (Q_c \leftthreetimes A)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $Q_c \leftthreetimes A$ (Q_c — группа кватернионов). Поскольку L — конечная группа, L — группа Фробениуса с неинвариантным множителем N_g и ядром B, причем согласно лемме 1 $c \in B$. Далее, так как $c \notin H$, из второго утверждения леммы следует $L = B(a, a^c)$. Окончательно имеем $L = \langle a, c\rangle = B(a, ca) = B(a, ac) = B(a, a^c)$, в частности $c \in \mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть* $b, c \in \mathfrak{M}A$, $r \in R$ *и* $b = rc$. *Тогда* $r \in A \cap \mathfrak{I}$, *причем если* $b, c \in \mathfrak{M}$, *то* $r \in I$.

Доказательство. Согласно определению $\mathfrak{M}$ имеем равенства $\langle a, c\rangle = \langle a, a^c\rangle = \langle a, b^{-1}rar^{-1}b\rangle = \langle a, a^b\rangle = \langle a, b\rangle$. По условию 2 теоремы возможны два случая. Если $\langle a, c\rangle = F_c \leftthreetimes A$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A, то утверждение леммы вытекает из леммы 6.4 [13]. Пусть теперь $\langle a, c\rangle = F_c \leftthreetimes (Q_c \leftthreetimes A)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $N_c = Q_c \leftthreetimes A$ (Q_c — группа кватернионов). Докажем, что $r \in N_c$. Пусть $b = b_1q_1a^l$, $c = c_1q_2a^m$, где $b_1, c_1 \in F_c$, $q_1, q_2 \in Q_c$, $l, m = 1, 2$. Согласно условию леммы $r = bc^{-1} = b_1q_1a^la^{-m}q_2^{-1}c_1^{-1}$. Отсюда $b_2c_2 = a^{m-l}q_1^{-1}rq_2$, $b_2c_2 \in F_c$. Поскольку $a^{l-m}q_1^{-1}rq_2 = 1$, то $r = q_2^{-1}a^{l-m}q_1 \in N_c$.

Пусть $b, c \in \mathfrak{M}$. Если $b, c \in \mathfrak{L}$, то $r = bc^{-1}$ лежит в ядре группы $B(a, ab)$. Это означает, что $r = 1$. Рассмотрим теперь случай, когда $r = bc^{-1} \in F_c \leftthreetimes Q_c$. Так как инволюция из Q_c централизует a, то либо $|r| = 2$, либо $|r| = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $a^g \in H$ *для некоторого* $g \in G\backslash H$, *то подгруппы* R *и* $g^{-1}Rg \cap H$ *имеют в* H *конечные индексы.*

Доказательство. Предположим, что $g \in G\backslash H$, $s = a^g \in H$ и индекс подгруппы $R^g \cap H$ в H бесконечен. В этом случае элементов вида s^h, $h \in H$, — бесконечное множество. Поскольку $gh \notin H$, согласно условию 2 теоремы для группы $L_{gh} = \langle a, s^h\rangle$ выполняется одно из следующих двух условий. Если $L_{gh} = F_{gh} \leftthreetimes A$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A, то утверждение леммы вытекает из леммы 6.5 [13]. Пусть теперь $\langle a, c\rangle = F_{gh} \leftthreetimes (Q_{gh} \leftthreetimes A)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $Q_{gh} \leftthreetimes A$ (Q_{gh}

— группа кватернионов). Согласно лемме 3 $L_{gh} = B(a, s^h)$. Однако это противоречит условию $s \in H$. Следовательно, $|H : H \cap R^g| < \infty$. Обозначим $D = H^g \cap \cap H$. Очевидно, $|H : D| < \infty$. Далее, для тройки (G, H^g, s) также выполняется условие 2 теоремы, причем нетрудно видеть, что $g \notin H^g$. Предположим, что индекс R в H бесконечен. Тогда множество элементов вида a^d, $d \in D$, бесконечно и, следовательно, найдется такой элемент $d \in D$, для которого выполняется одно из следующих двух условий. Если $L = \langle a^d, a^g \rangle = B \leftthreetimes A$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A, то утверждение леммы вытекает из леммы 6.5 [13]. Пусть теперь L — группа Фробениуса вида $B \leftthreetimes (Q_d \leftthreetimes \leftthreetimes A)$. Согласно лемме 3 A^d и A^g сопряжены в L, что влечет сопряженность A и A^g в H. Тогда $g = rh$ для некоторых $r \in R$ и $h \in H$, и вследствие $R \leq H$ получаем $g \in H$. Но это противоречит выбору элемента g. Следовательно, $|H : R| < \infty$, и лемма доказана.

Если R — подгруппа конечного индекса в H, то условие 2 теоремы выполняется и для тройки (G, R, a). На основании этого всюду далее предполагаем, что либо $H = R$, либо R — подгруппа бесконечного индекса в H.

Лемма 6. *Если индекс подгруппы R в G бесконечен, то $H \cap H^g \cap \mathfrak{B}$ пусто для любого $g \in G \backslash H$.*

Доказательство. В силу леммы 5 достаточно рассмотреть случай, когда $R = H$. Предположим, что для некоторого $g \in G \backslash H$ имеет место $k = a^g \in H = R$. По условию леммы индекс R в G бесконечен и, следовательно, бесконечно и множество $\mathfrak{M}_k$. Если бы R содержало бесконечное множество элементов из $\mathfrak{M}_k$, то согласно лемме 4 подгруппа $R_k \cap R$ имела бы бесконечный индекс в R, что противоречило бы лемме 5. Следовательно, $|\mathfrak{M}_k \cap R| < \infty$ и $\mathfrak{M}_k$ имеет бесконечное множество $\mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{N} \subseteq G \backslash H$. Далее, $A_k \leq R = H$ и $A_k^{\#} \mathfrak{N}$ — бесконечное подмножество из $\mathfrak{B} \backslash H$. Элемент b принадлежит некоторой группе Фробениуса $L_z = F_z \leftthreetimes (Q_z \leftthreetimes A)$. Поскольку $b \in F_z \leftthreetimes Q_z$ и $t \notin F_z \leftthreetimes Q_z$, то $tb \notin F_z \leftthreetimes Q_z$. Значит, порядок элемента tb равен либо 3, либо 6. В случае, когда не существует бесконечно много элементов $b \in \mathfrak{N}$ таких, что $|tb| = 3$, во множестве $\mathfrak{N}$ будет бесконечно много элементов $b \in \mathfrak{N}$, для которых элемент tb имеет порядок 6. В случае, когда существует бесконечно много элементов tb порядка 6, вместо элемента tb рассматриваем элемент $tb_1 = (tb)^2$ (здесь $b_1 \in \mathfrak{N}$) порядка 3. Таким образом, не нарушая общности рассуждений, считаем, что существует бесконечно много элементов $b \in \mathfrak{N}$ таких, что $|tb| = 3$. Из условия 2 теоремы и леммы 3 следует, что в $\mathfrak{N}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}_1$ такое, что $\langle a, tb \rangle = B(a, tb)$ для любых $t \in A_k^{\#}$ и $b \in \mathfrak{N}_1$. Это означает, что $A_k^{\#} \mathfrak{N}_1 \leq \mathfrak{M}$. Пусть $b \in \mathfrak{N}_1$. Поскольку $|a| = 3$, то $k^2 \neq 1$ и kb, $k^2 b \in A\mathfrak{M}$, причем $k \in R$. Согласно лемме 4 $k \in Q_k \leftthreetimes A$ и $g \in R$ вопреки выбору. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечное множество. Если для элемента t из $\mathfrak{B}$ и бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ пересечение $t\mathfrak{A} \cap H$ пусто, то $\mathfrak{A}$ имеет такое бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$, что $t\mathfrak{N} \subseteq A\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если бы $\mathfrak{A}$ содержало различные элементы b, c такие, что $tbAb^{-1}t^{-1} = tcAc^{-1}t^{-1}$, или $bAb^{-1} = cAc^{-1}$, то получили бы $b = rc$. Из леммы 4 следует, что $|r| = 2$. Поскольку в R только конечное число инволюций, то существует бесконечное число различных элементов вида $tbab^{-1}t^{-1}$,

$b \in \mathfrak{A}$. Согласно условию леммы $tb \notin H$, и в силу условия 2 теоремы и леммы 3 $\mathfrak{A}$ имеет бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1$ такое, что выполняется одно из следующих двух условий. Пусть группа $\langle a, tbab^{-1}t^{-1}\rangle = A(a, tbab^{-1}t^{-1})$, $b \in \mathfrak{A}_1$. В этом случае утверждение леммы вытекает из леммы 6.7 [13]. Пусть теперь $\langle a, tbab^{-1}t^{-1}\rangle = B(a, tbab^{-1}t^{-1})$, $b \in \mathfrak{A}_1$. Согласно лемме 3 $tb = c_b r_b$, где $c_b \in \mathfrak{M}$ и $r_b \in R$. Если для почти всех $b \in \mathfrak{A}_1$ имеет место $ba \in H_t$, то, очевидно, $H_t \neq H$, и в силу леммы 6 $ba^2 \notin H_t$ для почти всех $b \in \mathfrak{A}_1$. Следовательно, существует такое число m, $1 \leq m < 3$, а в $\mathfrak{A}_1$ такое бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_2$, что $ba^m \notin H_t$ для любого $b \in \mathfrak{A}_2$. Элемент b принадлежит некоторой группе Фробениуса $L_z = F_z \leftthreetimes (Q_z \leftthreetimes A)$. Поскольку $b \in F_z \leftthreetimes Q_z$ и $a^m \notin F_z \leftthreetimes Q_z$, то $ba^m \notin F_z \leftthreetimes Q_z$. Значит, порядок элемента ba^m равен либо 3, либо 6. В случае, если не существует бесконечно много элементов $b \in \mathfrak{A}_2$ таких, что $|ba^m| = 3$, во множестве $\mathfrak{A}_2$ будет бесконечно много элементов $b \in \mathfrak{A}_2$, для которых элемент ba^m имеет порядок 6. В этом случае вместо элемента ba^m рассматриваем элемент $b_1 a^m = (ba^m)^2$ (здесь $b_1 \in \mathfrak{A}_2$) порядка 3. Таким образом, не нарушая общности рассуждений, считаем, что существует бесконечно много элементов $b \in \mathfrak{A}_2$ таких, что $|ba^m| = 3$.

Согласно условию 2 теоремы либо $\langle t, ba^m\rangle = A(t, ba^m)$, либо $\langle t, ba^m\rangle = B(t, ba^m)$ для любого $b \in \mathfrak{A}_2$. В любом из случаев из леммы 3 следует, что $tba^m \in \mathfrak{B} \cup \mathfrak{M}_t$.

1. В $\mathfrak{A}_2$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_3$ такое, что $tba^m \in \mathfrak{B}$, $b \in \mathfrak{A}_3$. Согласно условию леммы $tba^m \notin H$. Из условия 2 теоремы вытекает существование такого бесконечного подмножества $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}_3$, что выполняется одно из двух следующих условий. Пусть группа $\langle a, tba^m\rangle = A(a, tba^m)$ для любого $b \in \mathfrak{N}$. В этом случае утверждение леммы вытекает из леммы 6.7 [13]. Пусть теперь $\langle a, tba^m\rangle = B(a, tba^m)$ для любого $b \in \mathfrak{N}$. Согласно лемме 3 $\langle a, tba^m\rangle = B(a, tba^m a a^{-m} b^{-1} t^{-1})$. Но $tba^m = c_b r_b a^m$ (определение $\mathfrak{A}_2$) и, следовательно, $\langle a, tba^m\rangle = B(a, c_b a c_b^{-1})$ (лемма 3). Это влечет $r_b \in R \cap \langle a, c_b\rangle = A$ и $t\mathfrak{N} \subseteq A\mathfrak{M}$.

2. Почти для всех $b \in \mathfrak{A}_2$ имеет место $tba^m \in \mathfrak{M}_t$. Снова рассматриваем равенство $tba^m = c_b r_b a^m$. Элементов вида c_b, $b \in \mathfrak{A}_2$, бесконечно много, так как все элементы вида $tbab^{-1}t^{-1}$ различны. В силу леммы 6 в $\mathfrak{A}_2$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_3$, а в $A^{\#}$ — элемент v такие, что $c_b v \in \mathfrak{B} \backslash H_t$. Далее, согласно условию 2 теоремы в $\mathfrak{A}_3$ для бесконечного числа элементов b выполняется неравенство $\langle t, c_b v\rangle \neq B(t, c_b v)$. Множество таких элементов b обозначим через $\mathfrak{A}_4$. Поскольку $|a| \neq 2$, для некоторого $t^n \in A_t^{\#}$ и некоторого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}_5$ из $\mathfrak{A}_4$ выполняется $t^n c_b v \in \mathfrak{B}$, $b \in \mathfrak{A}_5$. Имеем $t^{n+1} ba^m = t^n c_b v v^{-1} r_b a^m = t^n tba^m \in \mathfrak{B}$, так как $tba^m \in \mathfrak{M}_t$. Если $t \in H$, то, очевидно, $t^{n+1} ba^m$ и $t^n c_b v$ содержатся в $G \backslash H$. Тогда согласно условию 2 теоремы в $\mathfrak{A}_5$ найдется такое бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$, что для любого $b \in \mathfrak{N}$ выполняется одно из следующих условий. Пусть группы $\langle a, t^n c_b v\rangle = A(a, t^n c_b v)$ и $\langle a, t^{n+1} ba^m\rangle = A(a, t^{n+1} ba^m)$, либо группа $\langle a, t^n c_b v\rangle = B(a, t^n c_b v)$ и $\langle a, t^{n+1} ba^m\rangle = B(a, t^{n+1} ba^m)$. В любом из случаев из леммы 3 следует, что $t^n c_b v$, $t^{n+1} ba^m \in A\mathfrak{M}$. Согласно лемме 4 $v^{-1} r_b a^m = (tc_b v)^{-1}(t^{n+1} ba^m) \in A \cup \mathfrak{J}$, что влечет $r_b \in A \cup \mathfrak{J}$. Отсюда $t\mathfrak{N} \subseteq A\mathfrak{M}$, и лемма для $t \in \mathfrak{B} \cap H$ доказана.

Пусть теперь $t \notin H$. Если в $\mathfrak{A}_5$ найдется такое бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_6$, что $t^n c_b v \notin H$ для $b \in \mathfrak{A}_6$, то, рассуждая так же, как и в случае $t \in H$, мы докажем лемму. Предположим, что в $\mathfrak{A}_5$ не найдется бесконечного подмножества $\mathfrak{A}_6$ с указанным выше свойством и $\mathfrak{N}$ — бесконечное подмножество из $\mathfrak{A}_5$ такое, что $t^{n+1} b a^m$, $t^n c_b v \in H \bigcap \mathfrak{B}$, $b \in \mathfrak{N}$. Обозначим через M подгруппу в H, порожденную множеством $H \bigcap \mathfrak{B}$. Очевидно, для любого $b \in \mathfrak{N}$ элемент $r_b \in M$, и нам достаточно показать, что $M \bigcap R \subseteq A\mathfrak{M}$. Это вытекает из более общего свойства подгруппы M, а именно:

А) для любого элемента $s \in M$ и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{M}$ найдется такое бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}$, что $s\mathfrak{N} \subseteq A\mathfrak{M}$.

Доказательство проведем индукцией по длине элемента s через порождающие элементы. Если $s = 1$, то в качестве $\mathfrak{N}$ можно взять $\mathfrak{A}$. Пусть $s \neq 1$. По определению M $s = t_1 \ldots t_l$, где $t_1, \ldots, t_l \in \mathfrak{B} \bigcap H$. По индуктивному предположению в $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}_1$ такое, что $t_1^{-1} s\,\mathfrak{N}_1 \subseteq A\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — множество таких $b \in \mathfrak{M}$, что $t_1^{-1} s\,\mathfrak{N}_1 \bigcap bA$ непусто. Поскольку $\mathfrak{N}_1$ бесконечно, то бесконечно и $\mathfrak{N}_1$, более того, согласно доказанному случаю этой леммы $(t \in H)$ в $\mathfrak{A}_1$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_2$ такое, что $t\mathfrak{A}_2 \subseteq A\mathfrak{M}$. Множеству $\mathfrak{A}_2$ в $\mathfrak{N}_1$ соответствует бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ со свойством $t^{-1} s\,\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{A}_2 A$. Окончательно получаем

$$s\,\mathfrak{N} \;=\; t_1\,t_1^{-1} s\,\mathfrak{N} \;\subseteq\; t_1 \mathfrak{A}_2 A \;\subseteq\; A\mathfrak{M}A \;=\; A\mathfrak{M},$$

и утверждение А) доказано.

Покажем, что $R \bigcap M \subseteq A\mathfrak{M}$. Пусть $s \in R \bigcap M$. Согласно утверждению А) в $\mathfrak{M}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ такое, что $s\,\mathfrak{N} \subseteq A\,\mathfrak{M}$, и в силу леммы 4 $s \in A\mathfrak{M}$.

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ множество элементов c из $G \backslash H$, для которых $\langle c, s \rangle = \langle s, s^c \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A_s и ядром, содержащим элемент c, через $\mathfrak{D}_k$ — множество элементов c из $G \backslash H$, для которых $\langle c, Q_k \rangle \leftthreetimes \langle s \rangle = F_k \leftthreetimes Q_k \leftthreetimes \langle s \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $Q_k \leftthreetimes \langle s \rangle$ и ядром, содержащим элемент c. Множество $\mathfrak{H}_s = \mathfrak{D} \bigcup \mathfrak{D}_1 Q_1 \bigcup \mathfrak{D}_2 Q_2 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{D}_n Q_n \bigcup \ldots$, где Q_k, $k = 1, 2, \ldots$, — $\langle a \rangle$-инвариантные группы кватернионов. Пусть, далее, $\mathfrak{H} = \bigcup_{s \in \mathfrak{B} \backslash H} (H \bigcap \mathfrak{H}_s)$ и K — подгруппа в H, порожденная множеством $\mathfrak{H} \bigcup M$, где $M = \langle \mathfrak{B} \bigcap H \rangle$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество $K \bigcup A\mathfrak{M}$, $B = \langle \mathfrak{B} \rangle \lhd G$.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечное множество. Тогда для каждого элемента t из K и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}$ такое, что $t\,\mathfrak{N} \subseteq A\,\mathfrak{M}$, в частности $K \bigcap R = A$.*

Доказательство. Пусть t — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{A}$ — бесконечное подмножество из $\mathfrak{M}$. Если бы элементы $tbab^{-1}t^{-1}$, $tcac^{-1}t^{-1}$ совпадали для различных b, c из $\mathfrak{A}$, то мы бы получили $b = cr$, $r \in R$. Согласно лемме 4 $|r| = 2$. Поскольку существует только конечное число инволюций в R, множество элементов вида $tbab^{-1}t^{-1}$ бесконечно, и согласно условию 2 теоремы и лемме 3 в $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1$ такое, что $tb = c_b r_b$, $c_b \in \mathfrak{M}$, и $r_b \in R$ для любого $b \in \mathfrak{A}_1$. Элементы c_b, $b \in \mathfrak{A}_1$, составляют бесконечное подмножество $\mathfrak{G}_1$ в $\mathfrak{M}$. По определению $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{B} \backslash H$ найдется такой элемент k, что $vt \in \mathfrak{B}$ для любого $v \in A_k^{\#}$. Нетрудно видеть, что найдутся число m, $1 \le m < 3$, а в $\mathfrak{G}_1$ бесконечное подмножество $\mathfrak{G}_2$ такие, что $k^m c_b \notin H$ для любого $c_b \in \mathfrak{G}_2$. Согласно лемме 7 $\mathfrak{G}_2$ имеет бесконечное подмножество $\mathfrak{G}_3$ такое, что для любых $c_b \in G_3$, $d_b \in \mathfrak{M}$, $a_b \in A$ выполняется равенство

$$k^m c_b = d_b a_b. \tag{1}$$

Множеству $\mathfrak{G}_3$ соответствует бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_3$ из $\mathfrak{A}_1$ такое, что $t\mathfrak{A}_3 \subseteq \mathfrak{G}_3 R$. Из (1) имеем

$$k^m tb = k^m c_b r_b = d_b a_b r_b, \quad b \in A_3. \tag{2}$$

Поскольку $k^m t \in \mathfrak{B}$ и $k^m tb = d_b a_b r_b \notin H$, то согласно лемме 7 для некоторого бесконечного подмножества $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}_3$ имеет место $k^m t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}A$. В силу леммы 4 заключаем, что $r_b \in A \bigcup \mathfrak{J}$ для любого $b \in \mathfrak{N}$. Это означает, что $t\mathfrak{N} \subseteq A\mathfrak{M}$. Таким образом, для $t \in \mathfrak{H}$ основное утверждение леммы доказано. Далее, согласно лемме 7 мы доказали утверждение А) и для элемента $t \in M$. Наконец, как и при доказательстве утверждения А), индукцией легко доказать лемму для произвольного элемента из K.

Обозначим через $\mathfrak{G}$ множество $K \bigcup A\mathfrak{M}$.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{M}$ — бесконечное множество. Тогда для каждого $t \in \mathfrak{B}$ и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{G}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}$ такое, что $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$.*

Доказательство. Если $t \in \mathfrak{B} \bigcap H$, утверждение следует из леммы 7 и определения подгруппы K. Пусть $t \in \mathfrak{B} \backslash H$. Рассмотрим два случая.

1. $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \bigcap K$ — бесконечное множество. Если для $s_1, s_2 \in \mathfrak{A}_1$ $ts_1 as_1^{-1} t^{-1} = ts_2 as_2^{-1} t^{-1}$, то $s_1 = s_2 r$, $r \in R \bigcap K$, и согласно лемме 8 $s_1 \in s_2 A$. Отсюда вследствие бесконечности $\mathfrak{A}$, условия 2 теоремы и леммы 3 следует, что $\mathfrak{A}_1$ содержит бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_2$ такое, что для любого $s \in \mathfrak{A}_2$ справедливо $ts = c_s r_s$, где $c_s \in \mathfrak{M}$, $r_s \in R$. Множество элементов вида c_s, $s \in \mathfrak{A}_2$, бесконечно (по тем же причинам), а так как $a \notin H_t$ (лемма 6), то найдутся число m, $1 \le m < 3$, а в $\mathfrak{A}_2$ такое бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_3$, что $c_s a^m \notin H_t$ для любого $s \in \mathfrak{A}_3$. Далее, $c_s a^m \in \mathfrak{B}$, и в силу условия 2 теоремы и леммы 3 $\mathfrak{A}_3$ содержит такое бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$, что для любого $s \in \mathfrak{N}$ выполняется одно из следующих двух условий. Пусть группа $\langle t, c_s a^m \rangle = A(t, c_s a^m)$. В этом случае утверждение леммы следует из леммы 6.9 [13]. Пусть теперь $\langle t, c_s a^m \rangle = B(t, c_s a^m)$. Очевидно, $t^{-1} c_s a^m \in \mathfrak{B} \bigcup \mathfrak{M}_t$. Но $t^{-1} c_s a^m = s r_s^{-1} a^m \in H$. Далее, элемент s лежит в K и элемент $t^{-1} c_s a^m \in \mathfrak{H}_t \bigcup (\mathfrak{B} \bigcap H)$ также лежит в K, что влечет $r_s \in K$. Согласно лемме 8 $r_s \in A$. Но это означает, что $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}A \subseteq \mathfrak{G}$.

2. $\mathfrak{A}$ почти все содержится в $\mathfrak{M}A$. Если в $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1$ такое, что $t\mathfrak{A}_1 \bigcap H$ пусто, то утверждение получается из леммы 7. Пусть теперь для любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}_1$ из $\mathfrak{A}$ множество $t\mathfrak{A}_1 \bigcap H$ непусто. Тогда, как нетрудно видеть, найдется такое бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1$ из $\mathfrak{A}$, что $t\mathfrak{A}_1 \subseteq H$ и $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}A$. Пусть $\mathfrak{G}_1$ — множество тех $c \in \mathfrak{M}$, для которых $cA \bigcap \mathfrak{A}_1 \neq \varnothing$. Согласно лемме 6 $a \notin H_t$, и, следовательно, найдутся бесконечное подмножество $\mathfrak{G}_2$ в $\mathfrak{G}_1$ и число m, $1 \le m < 3$, такие, что $ca^m \notin H_t$ для любого $c \in \mathfrak{G}_2$. Элемент c принадлежит некоторой группе Фробениуса $L_z = F_z \leftthreetimes (Q_z \leftthreetimes A)$. Поскольку $c \in F_z \leftthreetimes Q_z$ и

$a^m \notin F_z \leftthreetimes Q_z$, то $ca^m \notin F_z \leftthreetimes Q_z$. Значит, порядок элемента ca^m равен либо 3, либо 6. В случае, если не существует бесконечно много элементов $c \in \mathfrak{G}_2$ таких, что $|ca^m| = 3$, во множестве $\mathfrak{G}_2$ будет бесконечно много элементов $c \in \in \mathfrak{G}_2$, для которых элемент ca^m имеет порядок 6. В этом случае вместо элемента ca^m рассматриваем элемент $c_1 a^m = (ca^m)^2$ (здесь $c_1 \in \mathfrak{G}_2$) порядка 3. Таким образом, не нарушая общности рассуждений, считаем, что существует бесконечно много элементов $c \in \mathfrak{G}_2$ таких, что $|ca^m| = 3$. Для бесконечного числа элементов c из $\mathfrak{G}_2$ выполняется равенство $\langle ca^m, t\rangle = B(t, ca^m)$ (условие 2 теоремы). Множество таких элементов c обозначим через множество $\mathfrak{G}_3$. Ему соответствует бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}_1$, а именно, $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_1 \cap \cap \mathfrak{G}_3 A$. Поскольку $t\mathfrak{N} \subseteq H$ и $\langle ca^m, t\rangle = B(t, ca^m)$, получаем, что $tca^m \in \mathfrak{H} \cup \cup (\mathfrak{B} \cap H)$ для любого $c \in \mathfrak{G}_3$. Но это означает, что $t\mathfrak{N} \subseteq K$.

Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть B — нормальная в G подгруппа, порожденная множеством $\mathfrak{B}$. Тогда либо B — конечная подгруппа, либо множество $\mathfrak{M}$ бесконечно и справедливы следующие утверждения*:

1) *для каждого элемента t из B и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{G}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}$ такое, что $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$*;

2) $B \cap R = A \cup \mathfrak{J}$ *и* $B \cap H = K$;

3) $G = BR$.

Доказательство. Если подгруппа R имеет в G конечный индекс, то множество $\mathfrak{B}$ конечно и согласно лемме Дицмана [15] B — конечная группа. Пусть, далее, индекс подгруппы R в G бесконечен. Тогда, очевидно, во множестве $G \backslash H$ содержится бесконечно много правых смежных классов по R. Это равносильно бесконечности множества элементов вида $g^{-1}ag$, $g \in G \backslash H$, и согласно лемме 3 и условию 2 теоремы множество $\mathfrak{M}$ бесконечно. Перейдем к доказательству следующих утверждений:

1. Согласно определению B $t = t_1 t_2 \ldots t_l$, где $t_1, t_2, \ldots, t_l \in \mathfrak{B}$. По индуктивному предположению можно считать, что в $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1$ со свойством $\mathfrak{A}_2 = t_2 \ldots t_l \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{G}$. В силу леммы 9 $\mathfrak{A}_2$ содержит бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_3$ такое, что $t_1 \mathfrak{A}_3 \subseteq \mathfrak{G}$. Положим теперь $\mathfrak{N} = = (t_2 \ldots t_l)^{-1} \mathfrak{A}_3$. Очевидно, $\mathfrak{N}$ бесконечно, содержится в $\mathfrak{A}$ и $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$.

2. Пусть $r \in R \cap B$ и $\mathfrak{A}$ — бесконечное подмножество из $A\mathfrak{M} = \mathfrak{G} \backslash H$. Согласно первому утверждению леммы в $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ со свойством $r\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G}$. Поскольку $R \le H$ (лемма 2), $r\mathfrak{N} \subseteq A\mathfrak{M}$ и в силу леммы 4 $r \in A \cup \mathfrak{J}$. Далее, пусть $t \in H \cap B$. Если K — конечная подгруппа, то $\mathfrak{B} \cap H$ конечно, и в этом случае, как отмечено перед леммой 8, $R = H$. Согласно доказанному выше $t \in A$. Если K бесконечно, то в силу первого утверждения леммы найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из K такое, что $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{G} \cap \cap H = K$. Но это невозможно (так как K — подгруппа) только при $t \in K$. Следовательно, $H \cap B = K$.

3. Очевидно, $K, \mathfrak{M} \subseteq B$ и $B \lhd G$. Пусть s, t — произвольные элементы из $\mathfrak{B} \cap H$. Вследствие условия 2 теоремы и бесконечности $\mathfrak{M}$ найдется элемент $v \in \mathfrak{B} \backslash H$ такой, что выполняется одно из следующих двух условий. Пусть группа $\langle s, v\rangle = A(s, v)$ и $\langle t, v\rangle = A(t, v)$. В этом случае утверждение леммы вытекает из леммы 6.10 [13]. Пусть теперь $\langle s, v\rangle = B(s, v)$ и $\langle t, v\rangle = B(t, v)$. Согласно лемме 3 A_v и A_t сопряжены в $\langle v, t\rangle$ и A_s и A_t сопряжены в $\langle s, v\rangle$. Поскольку $v, s, t \in B$, подгруппы A_s и A_t сопряжены и в $B \cap H = K$. Это по-

казывает, что $H = KR$. Пусть теперь $g \in G \backslash H$ и $s = g^{-1}ag$. Так как $\mathfrak{M}$ бесконечно, найдется бесконечно много таких $b \in B$, что $bg^{-1}agb^{-1} \notin H$. Далее, $g^{-1}ag \in B$, и в силу условия 2 теоремы найдется такой элемент $b \in B$, что выполняется одно из следующих двух условий. Пусть группа $T = \langle a, bg^{-1}agb^{-1} \rangle = A(a, bg^{-1}agb^{-1})$. В этом случае утверждение леммы снова будет следовать из леммы 6.10 [13]. Пусть теперь $T = \langle a, bg^{-1}agb^{-1} \rangle = B(a, bg^{-1}agb^{-1})$. Согласно лемме 3 A и $bg^{-1}Agb^{-1}$ сопряжены в T. Но это влечет сопряженность A и $g^{-1}Ag$ в B, что равносильно $g \in BR$. Итак, $G = BR$, и лемма доказана.

Лемма 11. *Множества* $B \backslash \mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}_s \backslash \mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{M} \backslash \mathfrak{M}_s$, $s \in \mathfrak{B} \cap H$, *конечны.*

Доказательство. Ясно, что $B \cap R\mathfrak{M} = A\mathfrak{M}$, так как в силу леммы 10 $B \cap \cap R = A$. Из условия 2 теоремы и леммы 3 следует, что $B \backslash \mathfrak{G}$ содержит только конечное число смежных классов по R. Отсюда с учетом того, что $B \cap R = A$ (лемма 10), следует конечность множества $B \backslash \mathfrak{G}$. Пусть теперь $s \in \mathfrak{B} \cap H$. Согласно только что доказанному $\mathfrak{M}_s \backslash A\mathfrak{M}$ конечно. В силу леммы 3 $\mathfrak{M}_s \cap \mathfrak{B}$ пусто и, следовательно, $\mathfrak{M}_s \cap A\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}$. Отсюда вытекает конечность множества $\mathfrak{M}_s \backslash \mathfrak{M}$. Аналогично получаем конечность множества $\mathfrak{M} \backslash \mathfrak{M}_s$.

Лемма доказана.

На основании леммы 10 в дальнейшем предполагаем бесконечность множества $\mathfrak{M}$.

Лемма 12. *Если $H \neq R$, то для любого элемента t из T и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ найдется подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}$ со свойством $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ и $K = M$, причем подгруппа M имеет вид $M = T \leftthreetimes A$, либо $M = T \leftthreetimes (Q \leftthreetimes A)$.*

Доказательство. Поскольку $B \cap R = A$ (лемма 10), то $\mathfrak{B}$ распадается в B ровно на 2 класса сопряженных элементов: $\mathfrak{B}_1$ с представителем a и $\mathfrak{B}_{-1}$ с представителем a^{-1}. Докажем сначала, что $K = M$. Как отмечено перед леммой 8, индекс R в H бесконечен, и, следовательно, подгруппа M бесконечна. Далее, $K = \langle \mathfrak{H}, M \rangle$. Пусть t — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$. Согласно условию 2 теоремы найдется такой элемент s из $\mathfrak{B} \backslash H$, для которого $\langle s, t \rangle$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем либо A_s, либо $Q_s \leftthreetimes A_s$ (Q_s — группа кватернионов) и ядром, содержащим элемент t. В первом случае утверждение леммы вытекает из леммы 6.12 [13]. Рассмотрим второй случай. Имеем $ts \in \mathfrak{B} \backslash H$, и элементов вида $h^{-1}tsh$, $h \in M$, имеется бесконечно много. В силу условия 2 теоремы в M найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{H}_0$ таких элементов h из M, что $\langle a, h^{-1}tsh \rangle = B(a, h^{-1}tsh)$ или $\langle v_h, ts \rangle = B(v_h, ts)$, где $v_h = hah^{-1}$. Для определенности положим $ts \in \mathfrak{B}_1$. Тогда $v_h^{-1}ts \in \mathfrak{M}_{ts}$ и $v_h^{-2}ts \in \mathfrak{B}_{-1}$. Поскольку $v_h \in H_s$, из двух элементов $v_h^{-1}ts$, $v_h^{-2}ts$ хотя бы один не лежит в H_s. Если $\mathfrak{H}_0$ содержит бесконечное множество $\mathfrak{H}_1$ такое, что $v_h^{-1}ts \in H_s$, как только $h \in \mathfrak{H}_1$, то в силу леммы 11 найдется элемент $h \in \in \mathfrak{H}_1$, для которого $v_h^{-1}ts \in \mathfrak{M}_s$. Это означает, что $v_h^{-1}t \in \mathfrak{B} \cap H$ и $t \in M$. В противном случае $\mathfrak{H}_0$ имеет бесконечное подмножество $\mathfrak{H}_2$ такое, что $v_h^{-2}ts \in H_s$ при $h \in \mathfrak{H}_2$. Согласно условию 2 теоремы найдется $h \in \mathfrak{H}_2$ со свойством $\langle v_h^{-2}ts, s \rangle = B(s, v_h^{-2}ts)$, что влечет $v_h^{-2}t \in \mathfrak{B}_2$. Снова заключаем, что $t \in M$, и вследствие произвольности элемента t из $\mathfrak{H}_0$ убеждаемся в справедливости равенства $K = M$. Пусть теперь $s \in \mathfrak{B}_m \cap H$ и $\mathfrak{A}$ — произвольное бесконечное подмножество из $\mathfrak{M}$. Согласно лемме 11 $\mathfrak{A}$ содержит бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_s$ и $s\mathfrak{N} \subseteq a^m\mathfrak{M}$. Имеем $a^{-m}s\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$. Также нетрудно показать, что $\mathfrak{A}$ имеет бесконечное подмножество $\mathfrak{N}_1$ со свойством $s^{-1}a^m\mathfrak{N}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть T — подгруппа в K, порожденная элементами вида $a^{-m}s$, $s \in \mathfrak{B}_m \cap H$. Как и в лемме 10, индукцией легко доказывается, что для любого $t \in T$ и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{M}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{A}$ такое, что $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$. В частности, $a \notin T$. Далее, a нормализует T и очевидно, что $M = T \leftthreetimes Q \leftthreetimes A$.

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathfrak{Y}$ множество $T \cup \mathfrak{M}$.

Лемма 13. *Для любого элемента $t \in \mathfrak{Y}$ и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{Y}$ найдется бесконечное подмножество из $\mathfrak{A}$ такое, что $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Если $t \in T$, то лемма вытекает из леммы 12. Пусть $t \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{A}$ — произвольное бесконечное подмножество из $\mathfrak{Y}$. Рассмотрим три случая:

1. В $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ такое, что $t\mathfrak{A}_1 \cap H$ пусто. Имеем $ca \in \mathfrak{B}_1$ для любого $c \in \mathfrak{A}$. Далее, в силу леммы 6 $a \notin H_{ca}$ ни для какого $c \in \mathfrak{A}_1$. Поскольку $|a| \neq 2$, найдутся число m, $1 \leq m < 3$, а в $\mathfrak{A}_1$ бесконечное подмножество $\mathfrak{A}$ такие, что $a^m t \notin H_{ca}$ ни для какого $c \in \mathfrak{A}_2$, или, что равносильно, $ca \notin H_{a^m t}$, $c \in \mathfrak{A}_2$. По условию 2 теоремы $\mathfrak{A}_2$ имеет бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_3$ такое, что выполняется одно из следующих двух условий. Пусть группа $\langle ca, a^m t\rangle = A(ca, a^m t)$ для любого $c \in \mathfrak{A}_3$. В этом случае утверждение леммы вытекает из леммы 6.13 [13]. Пусть теперь $\langle ca, a^m t\rangle = B(ca, a^m t)$ для любого $c \in \mathfrak{A}_3$. Очевидно, $ca \in \mathfrak{B}_1$, $a^m t \in \mathfrak{B}_m$ (множества $\mathfrak{B}_n$ определены при доказательстве леммы 12), что влечет $a^m tca \in \mathfrak{B}_{m+1}$, если $m \neq -1(3)$, либо $a^m tca = a^{-1}tca \in \mathfrak{M}_{ca}$. По условию $tc \notin H$, поэтому $a^m tca \notin H$, $c \in \mathfrak{A}_3$. Пусть $m \neq -1(3)$ и $a^m tca \in \mathfrak{B}_{m+1}$. В силу леммы 11 в $\mathfrak{A}_3$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ со свойством $a^m tca \in A\mathfrak{M}$ для любого $c \in \mathfrak{N}$. Но это показывает (так как $a^m tca \in \mathfrak{B}_{m+1}$), что $tc \in \mathfrak{M}$, $t\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{Y}$. Пусть теперь $m = -1$. Тогда снова согласно лемме 11 заключаем, что существует бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}_3$ такое, что $a^{-1}tca \in \mathfrak{M}_{ca} \cap \mathfrak{M}$ и $tc \in \mathfrak{M}$ для любого $c \in \mathfrak{N}$.

2. В $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ такое, что $t\mathfrak{A}_1 \subseteq H$. Если в $\mathfrak{A}_1$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_2$ со свойством $ca \notin H_{at}$ для любого $c \in \mathfrak{A}_2$, то, используя условие 2 теоремы, доказываем, что $\mathfrak{A}_2$ содержит бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ такое, что выполняется одно из следующих двух условий. Пусть группа $\langle at, ca\rangle = A(at, ca)$ для любого $t \in \mathfrak{N}$. В этом случае утверждение леммы снова вытекает из леммы 6.13 [13]. Пусть теперь $\langle at, ca\rangle = B(at, ca)$ для любого $t \in \mathfrak{N}$. В этом случае $atca \in \mathfrak{B}_2 \cap H$, и в силу лемм 10, 12 $tc \in T$. Имеем $t\mathfrak{N} \subseteq T$, и доказательство завершено. Предположим теперь, что $\mathfrak{A}_1$ не имеет бесконечного подмножества $\mathfrak{A}_2$, для которого $ca \notin H_{at}$, $c \in \mathfrak{A}_2$. Тогда $\mathfrak{A}_1$ содержит бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_2$ такое, что $H_{at} \cap \mathfrak{A}_2 = \varnothing$. В силу леммы 11 в $\mathfrak{A}_2$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_{at}$. Снова имеем $atc \in \mathfrak{B}_1 \cap H$, и по леммам 10, 12 $t\mathfrak{N} \subseteq T$.

3. В $\mathfrak{A}$ найдется бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_1$, содержащееся в T. Имеем $\mathfrak{G}_1 = t\mathfrak{A}_1 \subseteq A\mathfrak{M}$. Без ограничения общности можно считать, что для любого $c \in \mathfrak{A}_1$ $tc = d_c a^m$, где a^m — фиксированный элемент из A, $d_c \in \mathfrak{M}$, или

$ca^{-m} = t^{-1}d_c$. Очевидно, элементов d_c бесконечно много, $c \in \mathfrak{A}_1$ и согласно уже рассмотренным случаям $\mathfrak{A}_1$ имеет бесконечное подмножество $\mathfrak{A}_2$ такое, что для любого $c \in \mathfrak{A}_2$ верно $t^{-1}d_c \in T$. Это вместе с $c \in T$ и равенством $t^{-1}d_c = ca^{-m}$ равносильно $a^m = 1$. Следовательно, $t\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, и лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть F — подгруппа в G, порожденная множеством $\mathfrak{F} = T \bigcup \mathfrak{M}$. Рассмотрим произвольный элемент f из F. Поскольку T — подгруппа и $\mathfrak{M}$ совпадает с $\mathfrak{M}^{-1}$, f представим в виде $t_1 t_2 \ldots t_l$, где $t_1, t_2, \ldots, t_l \in \mathfrak{B}$. Используя теперь лемму 13, индукцией по l легко показать, что

В) для любого $f \in F$ и любого бесконечного подмножества $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{B}$ найдется такое бесконечное подмножество $\mathfrak{N}$ из $\mathfrak{A}$, что $f\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{B}$.

Поскольку элемент a, очевидно, не имеет свойства В), то $a \notin F$. Далее, a нормализует множество $\mathfrak{F}$ (лемма 12 и определение множества $\mathfrak{M}$). Следовательно, либо $\langle F, a\rangle = F \leftthreetimes A$, либо $\langle F, a\rangle = F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes A)$. Согласно леммам 10 – 12 легко получаем $F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes A) = B$. Докажем, наконец, что $B = F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes A)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $Q \leftthreetimes A$ и ядром F. В силу леммы 11 множество $\mathfrak{N} = F \backslash (\mathfrak{M} \bigcup H)$ конечно. По лемме 8 $d^{-1}rd \notin H$ для любых $d \in F \backslash H$ и $r \in A^{\#}$. Далее, если для некоторых $d \in F$ и $r \in A^{\#}$ имеет место $d^{-1}rd \in A\mathfrak{M}$, то в силу леммы 3 и равенства $B \bigcap R = A$ (лемма 10) следует, что $d \in \mathfrak{N}$. Таким образом, для любого $d \in \mathfrak{N}$ имеем $d^{-1}A^{\#}d \subseteq A^{\#}\mathfrak{N}$. Вследствие конечности $\mathfrak{N}$ и равенства $B \bigcap R = A$ заключаем, что и каждый элемент из $A^{\#}\mathfrak{N}$ сопряжен с некоторым элементом из A. Итак, мы доказали, что

$$B \backslash (F \bigcup H) \subseteq \mathfrak{B}. \tag{3}$$

Согласно леммам 10 и 12 $F \bigcap H = T$. Докажем, что $(T \leftthreetimes Q \leftthreetimes A) \backslash T \subseteq \mathfrak{B}$. Пусть $r \in \mathfrak{B} \bigcap H$ и $t \in T$. Если $rt \notin H_s$ для некоторого $s \in \mathfrak{B}$, то $rt \in \mathfrak{B}$ согласно (3). В частности, для любого $r \in \mathfrak{B} \bigcap H$

$$rD \subseteq \mathfrak{B}, \tag{4}$$

где $D = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Tg$. Предположим теперь, что для некоторых $r \in A^{\#}$ и $t \in T$ $rt \notin \mathfrak{B}$. Если бы для некоторого $s \in \mathfrak{B}$ $rt \notin H$, то согласно (3) получили бы $rt \in \mathfrak{B}$ вопреки предположению. Следовательно, $rt \in N = \bigcap_{g \in G} g^{-1}Hg$. Поскольку $N \lhd G$, то $v = r^{-1}t^{-1}rt \in N \bigcap D$. В силу условия 2 теоремы и бесконечности $A\mathfrak{M}$ найдется элемент $s \in \mathfrak{B} \backslash H$ такой, что $\langle t^{-1}rt, s\rangle = B(t^{-1}rt, s)$ и $V = \langle a, s\rangle = B(a, s)$. Далее, D нормальна в B, и, следовательно, $W = VD$ — подгруппа, причем $t^{-1}rt = rv \in W$. Согласно лемме 3 $\langle t^{-1}rt\rangle$ сопряжена с A_s в $B(t^{-1}rt, s)$ и A_s сопряжена с A в V. Это влечет сопряженность $\langle t^{-1}rt\rangle$ и A в W. В силу леммы 10 $B \bigcap R = A$, и, следовательно, $t \in W \bigcap F$. Согласно лемме 1 с учетом того, что $B = F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes A)$, убеждаемся, что $L = V \bigcap F$ — ядро группы V и, очевидно, $W \bigcap F = DL$. Итак, $t \in W \bigcap F \bigcap H$ и имеет вид $t = fd$, где $f \in L \bigcap H_1$, $d \in D$. Но $rf \in \mathfrak{B} \bigcap H$, так как $V = B(a, s)$, и согласно (4) $rfd \in \mathfrak{B}$, что означает $rt \in \mathfrak{B}$. Таким образом, $B = F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes A)$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем A и ядром F и $G = F \leftthreetimes R$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $G = F \leftthreetimes (Q \leftthreetimes \langle a\rangle)$ и a — элемент порядка 3 такие, что почти для каждого элемента g из G подгруппы $L = \langle a, a^g\rangle$ — группы*

Фробениуса с неинвариантным множителем либо $\langle a \rangle$, *либо* $Q \leftthreetimes \langle a \rangle$ (Q — *группа кватернионов*). *Кроме того, пусть* $C_G(a) = \langle a \rangle \times \langle i \rangle$, $|i| = 2$. *Тогда*:

1) *любая фактор-группа* G/N, *отличная от подгрупп* $\langle aN \rangle$ *и* $QN \leftthreetimes \langle aN \rangle$, — *группа Фробениуса с неинвариантным множителем либо* $\langle aN \rangle$, *либо* $QN \leftthreetimes \langle aN \rangle$;

2) *любая нециклическая подгруппа из* G, *содержащая элемент* a, *отличная от подгрупп* $Q \leftthreetimes \langle a \rangle$ *и* $\langle a \rangle \times \langle i \rangle$, *является группой Фробениуса с неинвариантным множителем либо* $\langle a \rangle$, *либо* $Q \leftthreetimes \langle a \rangle$.

Доказательство. Утверждение 1, очевидно, вытекает из условий следствия и теоремы. Отсюда и из определения группы Фробениуса легко получить справедливость утверждения 2.

1. *Черников С. Н.* О локально разрешимых группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Мат. сб. – 1951. – **28**, № 1. – С. 119 – 129.
2. *Черников С. Н.* К теории бесконечных специальных групп // Там же. – 1968. – **7**, № 6. – С. 539 – 548.
3. *Каргаполов М. И.* Локально конечные группы, обладающие нормальными системами с конечными факторами // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, № 6. – С. 853 – 873.
4. *Каргаполов М. И.* О разрешимых группах конечного ранга // Алгебра и логика. – 1962. – **1**, № 5. – С. 37 – 44.
5. *Шунков В. П.* О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Там же. – 1967. – **6**, № 3. – С. 113 – 124.
6. *Шунков В. П.* Об одном классе p-групп // Там же. – 1970. – **9**, № 4. – С. 484 – 496.
7. *Frobenius G.* Uber auflosbare Gruppen. IV // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. – 1901. – S. 1216 – 1230.
8. *Бусаркин В. М., Старостин А. И.* О локально конечных расщепляемых группах // Успехи мат. наук. – 1962. – **17**, № 6. – С. 275 – 294.
9. *Бусаркин В. М., Старостин А. И.* О расщепляемых локально конечных группах // Мат. сб. 1963. – **62**, № 3. – С. 275 – 294.
10. *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. – 1975. – **14**, № 5. – С. 576 – 603.
11. *Журтов Л. Х., Мазуров В. Д.* О группах Фробениуса, порожденных квадратичными элементами // Междунар. сем. по теории групп: Тез. докл. – Екатеринбург, 2001. – С. 77 – 81.
12. *Старостин А. И.* О группах Фробениуса // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 629 – 639.
13. *Шунков В. П.* M_p-группы. – М.: Наука, 1990. – 160 с.
14. *Журтов А. Х.* Квадратичные элементы групп Фробениуса: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Нальчик, 2003. – 115 с.
15. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.

Получено 20.08.2004