УДК 517.9

Я. А. Прикарпатський (Ін-т математики НАН України, Київ
та AGH Univ. Sci. and Technol., Krakow, Poland)

АДІАБАТИЧНА ПРОБЛЕМА СТІЙКОСТІ МЕЛЬНИКОВА – САМОЙЛЕНКА*

The symplectic method of the investigation of invariant submanifolds of nonautonomous Hamiltonian systems and ergodic measures on them is developed. The so-called Mel'nikov – Samoilenko problem for the case of adiabatically perturbed completely integrable oscillator-type Hamiltonian systems is studied on the basis of a new construction of "virtual" canonical transformations.

Розвивається симплектичний метод дослідження інваріантних підмноговидів неавтономних гамільтонових систем та ергодичних мір на них. На основі нової конструкції „віртуальних" канонічних перетворень вивчено так звану проблему Мельникова – Самойленка для випадку адіабатично збурених цілком інтегровних гамільтонових систем осциляторного типу.

1. Вступ. Як відомо [1, 2], багато явищ у природі та техніці описуються гамільтоновими системами на симплектичних многовидах. Серед таких систем особливий інтерес викликають системи, які є адіабатичними збуреннями осциляторного типу цілком інтегровних гамільтонових систем. Такі системи мають інтегральні інваріантні многовиди, дифеоморфні [1, 3, 4] у випадку компактності скінченновимірним торам. Проблема стійкості цих інваріантних торів при адіабатичному збуренні, поставлена і частково розв'язана у працях В. К. Мельникова [5, 6] та А. М. Самойленка [7 – 12], є досить актуальною і була предметом досліджень у працях [5 – 8, 12 – 14], в яких розвивались аналітичні методи її розв'язку, що ґрунтувались як на геометричній теорії Пуанкаре для збурень гіперболічних сепаратрисних многовидів, так і на теорії функцій Гріна та методі прискореної збіжності. Оскільки при розв'язанні цієї проблеми залишалось ще багато відкритих питань, в останні роки ця проблема набула нового значення й активно аналізувалась у працях [9, 10, 15 – 20] як на основі одного узагальнення класичного методу Ляпунова – Шмідта [11, 15, 16], так і симплектичної версії методу Пуанкаре [10, 11, 20]. При розв'язанні проблеми Мельникова – Самойленка у випадку слабких збурень у праці [15] було застосовано, зокрема, об'єднану схему методу прискореної збіжності КАМ-теорії [1, 3] та підходу Ляпунова – Шмідта. Це дало можливість точніше описати структуру збуреного інваріантного тора, оскільки класична схема методу прискореної збіжності в КАМ-теорії не охоплює багато інших важливих аспектів процесу деформації інваріантного тора. При цьому, як було зазначено у працях [21 – 24], застосування методу прискореної збіжності для встановлення структури збуреного інваріантного тора не є необхідним.

З іншого боку, проблема стійкості інваріантного тора адіабатично збуреної цілком інтегровної системи тісно пов'язана з описом ергодичних мір на відповідних інваріантних підмноговидах, оскільки потік на них є ергодичним [25, 26]. Для вивчення таких мір у праці [27] розвивається якісно-аналітичний підхід, який дає, зокрема, дуальний опис ергодичних мір на осциляторно збурених інваріантних торах.

---

* Присвячено пам'яті колеги і наставника, талановитого московського математика Віктора Козьмича Мельникова, без якого теорія динамічних систем не була б такою привабливою.

Іншим аспектом проблеми стійкості Мельникова – Самойленка є використання канонічних змінних дія-кут для вкладення незбуреного многовиду в фазовий простір, які не є *a priori* заданими майже в усіх важливих для застосувань випадках інтегровних гамільтонових систем і знаходження яких у загальному випадку на сьогодні [3, 17, 28] є нерозв'язаною проблемою. У зв'язку з цим актуальним є подальший розвиток симплектичного підходу [9, 10, 20, 27, 29] до розв'язку адіабатичної проблеми стійкості Мельникова – Самойленка, на основі якого можна вивчати структуру осциляторно збуреного інваріантного многовиду та його стійкість в залежності від заданих параметрів. У даній роботі пропонується новий підхід до розв'язку цієї проблеми на основі спеціальної конструкції так званих „віртуальних" канонічних перетворень фазового простору в змінних Гамільтона – Якобі. За допомогою цих перетворень уперше зведено початкову адіабатично збурену гамільтонову систему осциляторного типу до системи Гамільтона в канонічній формі Боголюбова [1, 12], до якої вже можна застосувати стандартну схему КАМ-теорії на основі методу прискореної збіжності. Зокрема, встановлено стійкість інваріантного тора цієї системи, яка розв'язує проблему Мельникова – Самойленка.

2. Вкладення інваріантних многовидів та симплектична теорія збурень. Розглянемо неавтономну гамільтонову систему на розширеному кодотичному просторі $T^*(M \times \mathbb{R}^r) \times \mathbb{S}^1$ до $\mathbb{Z}_+ \ni (n+r)$-вимірного многовиду $M \times \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{Z}_+$, із канонічною симплектичною структурою $\omega^{(2)} := d\,\mathrm{pr}^*_{M\times\mathbb{R}^r}\alpha^{(1)} \in \Lambda^2(T^*(M \times \mathbb{R}^r))$

$$\frac{dq}{ds} = \{H, q\}, \qquad \frac{dp}{ds} = \{H, p\}, \quad \frac{d\tau}{ds} = \varepsilon,$$
$$\frac{dx}{ds} = \{H, x\}, \qquad \frac{dy}{ds} = \{H, y\}, \tag{2.1}$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $\alpha^{(1)} := \langle p, dq\rangle + \langle y, dx\rangle \in T^*_{(q,x)}(M \times \mathbb{R}^r)$ — канонічна форма Ліувілля [1, 3, 4, 11] на $M \times \mathbb{R}^r$ у точці $(q, x) \in M \times \mathbb{R}^r$, $\mathrm{pr}_{M\times\times\mathbb{R}^r}$: $T^*(M \times \mathbb{R}^r) \to M \times \mathbb{R}^r$ — канонічна проекція, $\{\cdot, \cdot\}$ — відповідна дужка Пуассона на $T^*(M\times\mathbb{R}^r)$ і $H \in \mathcal{D}(T^*(M\times\mathbb{R}^r)\times\mathbb{S}^1)$ – адіабатично збурена функція Гамільтона осциляторного типу вигляду

$$H := \bar{H}(q, p) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\Big[y_j^2 + \nu_j^2(\tau_0 + \varepsilon s; \bar{H})x_j^2\Big]. \tag{2.2}$$

Тут $\bar{H} \in \mathcal{D}(T^*(M))$ є редукованою функцією Гамільтона на $T^*(M)$, а частоти $\nu_j \in \mathcal{D}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R})$, $j = \overline{1, r}$, залежать адіабатично від повільно змінного параметра $\tau := \varepsilon s + \tau_0 \in \mathbb{R}^1/2\pi\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$ і від функції Гамільтона $\bar{H} \in \mathcal{D}(T^*(M))$. Будемо вважати, що редукована гамільтонова система на $T^*(M)$ є цілком інтегровною [1, 3, 28] за Ліувіллем – Арнольдом, має відповідні n-вимірні компактні інтегральні многовиди $M_{\bar{h}} \subset T^*(M)$, дифеоморфні торам $\mathbb{T}^n$.

Поклавши $\varepsilon = 0$, гамільтонову систему (2.1) можемо звести до автономної системи на $T^*(M \times \mathbb{R}^r)$, котра буде, очевидно, також цілком інтегровною. Для цього визначимо

$$M_{\bar{h}} := \{(q, p) \in T^*(M) : \bar{H} = \bar{H}_1 = \bar{h}_1 \in \mathbb{R},\ \bar{H}_j = \bar{h}_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{2, n}\},$$

де $\bar{H}_j \in \mathcal{D}(T^*(M))$, $j = \overline{1, n}$, є відповідним повним інволютивним набором інваріантів на кодотичному многовиді $T^*(M)$. Тоді, очевидно, $M_{\bar{h}} \times \mathbb{T}^r_{\xi} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r)$

буде інтегральним многовидом гамільтонової системи (2.1) при $\varepsilon = 0$ із функцією Гамільтона

$$H_{\tau_0} := \bar{H}(q,p) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\Big[y_j^2 + \nu_j^2(\tau_0;\bar{H})x_j^2\Big],$$

де $\mathbb{T}^r_{\bar{\xi}} \subset T^*(\mathbb{R}^r)$ є тороїдальним інтегральним многовидом відповідної осциляторної гамільтонової системи. Тобто підмноговид $M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}} \simeq M_{\bar{h}} \times \mathbb{T}^r_{\bar{\xi}}$, де

$$M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}} := \Big\{(q,p;x,y) \in T^*(M\times\mathbb{R}^r) : H_{\tau_0} := \bar{h}_{1,\tau_0} \in \mathbb{R},\ \bar{H}_j = \bar{h}_j \in \mathbb{R},\ j=\overline{2,n},$$

$$\xi_{j,\tau_0} = \frac{1}{2}(y_j^2 + \nu_j^2(\tau_0;\bar{H})x_j^2) := \bar{\xi}_j \in \mathbb{R}_+,\ j=\overline{1,r}\Big\},$$

і функції $\xi_{j,\tau} \in \mathcal{D}(T^*(\mathbb{R}^r))$, $j=\overline{1,r}$, є функціонально незалежними інваріантами на $T^*(M\times\mathbb{R}^r)$. Оскільки інтегральні многовиди $M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}} \subset T^*(M\times\mathbb{R}^r)$ є лагранжевими [3, 4] для кожного значення $\tau_0 \in \mathbb{S}^1$, позначимо $\tau_0 := \tau \in \mathbb{S}^1$ і за допомогою відповідної породжуючої функції канонічних перетворень на розшаруванні $T^*(M\times \times\mathbb{R}^r) = \bigcup_{(\bar{h},\bar{\xi}_\tau)\in\mathbb{R}^{n+r}} M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}}$ введемо нові канонічні змінні (w_τ,μ_τ) на $T^*(M\times\mathbb{R}^r)$ такі, що

$$\langle p, dq\rangle + \langle y, dx\rangle = \langle w_\tau, d\mu_\tau\rangle + d\bar{S}_\tau(q,x;\mu_\tau) \tag{2.3}$$

для певного відкритого околу, де $U(M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}_\tau}) \subset T^*(M\times\mathbb{R}^r)$,

$$p = \frac{\partial\bar{S}_\tau}{\partial q}, \qquad y = \frac{\partial\bar{S}_\tau}{\partial x}, \qquad w_\tau = -\frac{\partial\bar{S}_\tau}{\partial\mu_\tau}.$$

Змінні $\mu_\tau \in \left(\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}}\mathbb{S}^1_j\right)\times\left(\overset{r}{\underset{j=1}{\otimes}}\mathbb{S}^1_j\right) \simeq \mathbb{T}^n_{\bar{h}}\times\mathbb{T}^r_{\bar{\xi}}$ називаються [1, 3, 4, 11] змінними Гамільтона – Якобі і визначаються спеціальними рівняннями вкладення типу Пікара – Фукса на розшаруванні $T^*(M\times\mathbb{R}^r) \simeq \bigcup_{(\bar{h},\bar{\xi}_\tau)\in\mathbb{R}^{n+r}} M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}}$, дослідженими в [11, 17, 30]. Зауважимо, що згідно з (2.3) симплектична структура $\omega^{(2)} = \langle dp, \wedge dq\rangle + \langle dy, \wedge dx\rangle = \langle dw_\tau, \wedge d\mu_\tau\rangle$, причому з умови відокремлення змінних Гамільтона – Якобі отримуємо, що функція

$$S_\tau(\mu_\tau;\bar{h},\bar{\xi}) = \sum_{j=1}^{n+r}\int\limits_{\mu^{(0)}_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}} w_{j,\tau}(\lambda;\bar{h},\bar{\xi})d\lambda \tag{2.4}$$

є породжуючою для канонічного відображення в околі $U\left(M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}}\right)$

$$\langle w_\tau, d\mu_\tau\rangle + \langle s_\tau, (d\bar{h}, d\bar{\xi})\rangle = dS_\tau(\mu_\tau;\bar{h},\bar{\xi}),$$

де вектор еволюційних параметрів $s_\tau \in \mathbb{R}^{n+r}$ визначається з (2.4):

$$s_{j,\tau} := \sum_{k=1}^{n+r}\int\limits_{\mu^{(0)}_{k,\tau}}^{\mu_{k,\tau}} d\lambda\frac{\partial w_{k,\tau}(\lambda;\bar{h},\bar{\xi})}{\partial\bar{h}_j}$$

для $j = \overline{1,n}$ і

$$s_{j,\tau} := \sum_{k=1}^{n+r} \int\limits_{\mu_{k,\tau}^{(0)}}^{\mu_{k,\tau}} d\lambda \frac{\partial w_{k,\tau}(\lambda; \bar{h}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}_j}$$

для $j = \overline{n+1, n+r}$. Використовуючи той факт, що $M_{\bar{h},\bar{\xi}}^{n+r} \simeq \mathbb{T}_{\bar{h}}^n \times \mathbb{T}_{\bar{\xi}}^r$, можна визначити [10, 11, 20] додатково так званий вектор змінних дії $\gamma_\tau \in \mathbb{R}^{n+r}$, де

$$\gamma_{j,\tau} := \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\sigma_j(\bar{h},\bar{\xi})} d\bar{S}_\tau = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{n+r} m_{j,s}(\tau) \oint\limits_{\sigma_{s,\tau}} w_{s,\tau}(\lambda; \bar{h}, \bar{\xi}) d\lambda, \tag{2.5}$$

причому цикли

$$\sigma_j(\bar{h}, \bar{\xi}) := \sum_{j=1}^{n+r} m_{i,j}(\tau) \sigma_{j,\tau}$$

для певних цілих чисел $m_{j,s}(\tau) \in \mathbb{Z}$, $j, s = \overline{1, n+r}$, утворюють базу одновимірної групи гомологій $H_1(M_{\bar{h},\bar{\xi}}^{n+r}; \mathbb{Z})$. Оскільки величини (2.5) є, очевидно, теж інваріантами розглядуваної редукованої динамічної системи при $\varepsilon = 0$, а відображення $\mathbb{R}^{n+r} \ni (\bar{h}, \bar{\xi}) \to \gamma_\tau \in \mathbb{R}^{n+r}$ — гладким і майже скрізь невиродженим, то породжуюча функція (2.4) дає можливість перейти за допомогою канонічного перетворення

$$\langle w_\tau, d\mu_\tau \rangle + \langle \varphi_\tau, d\gamma_\tau \rangle = d\bar{S}_\tau(\mu_\tau; \bar{h}(\gamma_\tau), \bar{\xi}(\gamma_\tau)) := d\tilde{S}_\tau(\mu_\tau; \gamma_\tau)$$

до нових змінних дія-кут $(\varphi_\tau, \gamma_\tau) \in U(\mathbb{T}_{\bar{h}}^n \times \mathbb{T}_{\bar{\xi}}^r)$ в околі $(n+r)$-вимірного тора $\mathbb{T}_\tau^{n+r} := \mathbb{T}_{\bar{h}}^n \times \mathbb{T}_{\bar{\xi}}^r$, причому величини

$$\varphi_{j,\tau} := \frac{\partial \bar{S}_\tau(\mu_\tau; \bar{h}(\gamma_\tau), \bar{\xi}(\gamma_\tau))}{\partial \gamma_{j,\tau}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \bar{S}_\tau(\mu_\tau; \bar{h}, \bar{\xi})}{\partial \bar{h}_k} \frac{\partial \bar{h}_k(\gamma_\tau)}{\partial \gamma_{j,\tau}} + \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \bar{S}_\tau(\mu_\tau; \bar{h}, \bar{\xi})}{\partial \bar{\xi}_k} \frac{\partial \bar{\xi}_k(\gamma_\tau)}{\partial \gamma_{j,\tau}} :=$$

$$:= \sum_{k=1}^{r+n} s_{k,\tau} \Omega_{k,j}(\tau; \gamma_\tau)$$

для $j = \overline{1, n+k}$ є кутовими змінними на торі $\mathbb{T}_\tau^{n+r} = \mathbb{T}_{\bar{h}}^n \times \mathbb{T}_{\bar{\xi}}^r$ і задовольняють умови

$$\frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\sigma_j(\bar{h},\bar{\xi})} d\varphi_{k,\tau} = \delta_{j,k}$$

для всіх $j, k = \overline{1, n+r}$. Величина

$$\Omega(\tau; \gamma_\tau) := \left\{ \Omega_{kj}(\tau; \gamma_\tau) := \left(\frac{\partial \bar{h}_k(\gamma_\tau)}{\partial \gamma_{j,\tau}} \bigg|_{k=\overline{1,n}}, \ \frac{\partial \bar{\xi}_{k-n}(\gamma_\tau)}{\partial \gamma_{j,\tau}} \bigg|_{k=\overline{n+1,n+r}} \right), \right.$$

$$\left. k, j = \overline{1, n+r}, \ \gamma_\tau \in \mathbb{R}^{n+r} \right\}$$

є так званою матрицею квазічастот і майже скрізь оборотною на інтегральному многовиді $M_\tau^{n+r} \simeq M_{\bar{h},\bar{\xi}}^{n+r} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r)$. У термінах змінних дії $\gamma_\tau \in \mathbb{R}^{n+r}$ відповідні рівняння Пікара – Фукса задаються виразами

$$\frac{\partial \gamma_{j,\tau}}{\partial \bar{h}_k} = \psi_{k,j}(\gamma_\tau; \bar{h}, \bar{\xi})$$

при $j = \overline{1, n+r}$, $k = \overline{1, n}$ і

$$\frac{\partial \gamma_{j,\tau}}{\partial \bar{\xi}_{n-k}} = \psi_{k,j}(\gamma_\tau; \bar{h}, \bar{\xi}) \tag{2.6}$$

при $j = \overline{1, n+r}$, $k = \overline{n+1, n+r}$, де згідно з (2.5)

$$\psi_{kj}(\gamma_\tau; \bar{h}, \bar{\xi}) = \sum_{p=1}^{n+r} m_{j,p}(\tau) \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma_{p,\tau}} \frac{\partial w_{p,\tau}(\lambda; \bar{h}, \bar{\xi}) d\lambda}{\partial \bar{h}_k}$$

для $j = \overline{1, n+r}$, $k = \overline{1, r}$ і

$$\psi_{kj}(\gamma_\tau; \bar{h}, \bar{\xi}) = \sum_{p=1}^{n+r} m_{j,p}(\tau) \frac{1}{2\pi} \oint_{\sigma_{p,\tau}} \frac{\partial w_{p,\tau}(\lambda; \bar{h}, \bar{\xi}) d\lambda}{\partial \bar{\xi}_{k-n}}$$

для $j = \overline{1, n+r}$, $k = \overline{n+1, n+r}$.

При $\varepsilon \neq 0$ лагранжевий інваріантний многовид $\Lambda_\varepsilon^{n+r+1} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r) \times \mathbb{S}^1$ визначається умовою

$$\oint_{\sigma_\varepsilon} (\langle p, dq \rangle + \langle y, dx \rangle - H(\varepsilon s + \tau_0) ds) = 0 \tag{2.7}$$

для кожного кусково-гладкого гомотопного точці циклу $\sigma_\varepsilon \subset \Lambda_\varepsilon^{n+r+1}$. Для кожного значення параметра $\tau_0 \in \mathbb{S}^1$ визначено проекцію $\Lambda_{\varepsilon,\tau_0}^{n+r} := \Lambda_\varepsilon^{n+r+1}|_{T^*(M\times\mathbb{R}^r)} \subset$ $\subset T^*(M \times \mathbb{R}^r)$, яку можна побудувати у вигляді графіка

$$p = \frac{\partial S^{(\varepsilon)}(q, x; s)}{\partial q}, \qquad y = \frac{\partial S^{(\varepsilon)}(q, x; s)}{\partial x},$$

де $S^{(\varepsilon)} : U(\Lambda_{\varepsilon,\tau_0}^{n+r} \times \mathbb{R}^1) \to \mathbb{R}$ — відповідна функція дії, яка задовольняє, згідно із співвідношенням (2.7), рівняння Гамільтона – Якобі

$$\frac{\partial S^{(\varepsilon)}}{\partial s} + H\left(\varepsilon s + \tau_0 | q, \frac{\partial S^{(\varepsilon)}}{\partial q}; x, \frac{\partial S^{(\varepsilon)}}{\partial y}\right) = 0$$

для всіх $(\varepsilon s + \tau_0; q, x) \in \Lambda_\varepsilon^{n+r+1}$.

Щоб вивчити властивості функції дії $S^{(\varepsilon)} : U(\Lambda_{\varepsilon,\tau_0}^{n+r} \times \mathbb{R}^1) \to \mathbb{R}$ при $\varepsilon \to 0$, скористаємося результатами робіт [11, 27]. А саме, нехай функціонал

$$\mathcal{A}_{\varepsilon,\tau_0}^{(\tau)}(\sigma_\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{\tau - \tau_0} \int_{\sigma_\varepsilon} (\mathrm{pr}^*_{M\times\mathbb{R}^r} \alpha^{(1)}(s) - H(\varepsilon s + \tau_0) ds) \tag{2.8}$$

визначено на диференційовних кривих $\sigma_\varepsilon : [0, (\tau - \tau_0)/\varepsilon] \to T^*(M \times \mathbb{R}^r) \times \mathbb{S}^1$ таких, що кінцева точка $\sigma_\varepsilon \left(\dfrac{\tau - \tau_0}{\varepsilon}\right) = \psi_\varepsilon^{\frac{\tau-\tau_0}{\varepsilon}}(\sigma_\varepsilon(0))$ для кожного $\varepsilon \to 0$, де $\psi_\varepsilon^s \in$

$\in \mathrm{Diff}(T^*(M\times\mathbb{R}^r)\times\mathbb{S}^1)$, $s\in\mathbb{R}^1$, є відповідною групою дифеоморфізмів, породженою гамільтоновою системою (2.1) на $T^*(M\times\mathbb{R}^r)\times\mathbb{S}^1$. Очевидно, що відображення $\psi^s_{\varepsilon,\tau_0} := \psi^s_\varepsilon|_{T^*(M\times\mathbb{R}^r)}$ для всіх $s\in\mathbb{R}$ є симплектичним, тобто $\psi^{s,*}_{\varepsilon,\tau_0}\omega^{(2)}=\omega^{(2)}$. Позначимо через Σ_ε множину всіх кривих $\sigma_\varepsilon\subset T^*(M\times\mathbb{R}^r)\times\mathbb{S}^1$, визначених вище. Тоді вираз (2.8) визначає нелінійний гладкий функціонал $\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}:\Sigma_\varepsilon\to\mathbb{R}$, градієнт якого $\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}:\Sigma_\varepsilon\to T(\Sigma_\varepsilon)$ для кожного $\alpha\in T(T^*(M\times\mathbb{R}^r))$ визначається як

$$(\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon),\alpha) := \frac{\varepsilon}{\tau-\tau_0}\int\limits_0^{(\tau-\tau_0)/\varepsilon} ds\langle J(\sigma_\varepsilon)\dot\sigma_\varepsilon(s)+\nabla H(\sigma_\varepsilon;\tau_0+\varepsilon s),\alpha\rangle_J.$$

Тут, за означенням, для будь-яких $\alpha,\eta\in T(T^*(M\times\mathbb{R}^r))$ вираз

$$\langle\alpha,\eta\rangle_J := \omega^{(2)}(\alpha,J\eta) \tag{2.9}$$

є рімановою метрикою на $T^*(M\times\mathbb{R}^r)$ із майже комплексною структурою $J: T^*(M\times\mathbb{R}^r)\to\mathrm{Aut}(T(T^*(M\times\mathbb{R}^r)))$, узгодженою з симплектичною структурою $\omega^{(2)}\in\Lambda^2(T^*(M\times\mathbb{R}^r))$ і $\nabla:\mathcal{D}(T^*(M\times\mathbb{R}^r))\to T(T^*(M\times\mathbb{R}^r))$ — відповідний градієнт, обчислений відносно скалярного добутку (2.9). Очевидно, що критичні криві функціонала (2.8) на Σ_ε задовольняють умову

$$\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon)=0,$$

що еквівалентна гамільтоновому потоку (2.1), орбіти якого лежать на лагранжевій поверхні $\Lambda^{n+r+1}_\varepsilon\subset T^*(M\times\mathbb{R}^r)\times\mathbb{S}^1$.

Введемо наступні означення.

Означення 2.1. *Будемо називати C^1-функціонал $\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}:\Sigma_\varepsilon\to\mathbb{R}$ таким, що задовольняє умову Пале–Смейла, якщо із будь-якої послідовності $\{\sigma_{\varepsilon,n}\in\Sigma_\varepsilon : n\in\in\mathbb{Z}\}$ такої, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+}|\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_{\varepsilon,n})|<\infty$ і слабка границя $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_{\varepsilon,n})=0$, можна вибрати збіжну підпослідовність.*

Означення 2.2. *Множина $Z^d_\varepsilon\subset\Sigma_\varepsilon$ називається регулярною, якщо*:

а) $Z^d_\varepsilon\subset\mathcal{A}^{(\tau),-1}_{\varepsilon,\tau_0}(c)$ *для деякого* $c\in\mathbb{R}$;

б) Z^d_ε *є ізольованою, тобто існує окіл* $U(Z^d_\varepsilon)$ *множини* Z^d_ε *такий, що* $U(Z^d_\varepsilon)\cap\cap(\Sigma_\varepsilon\setminus Z^d_\varepsilon)=\varnothing$.

Окрім того, вважатимемо далі, що:

i) множина Z^d_0 критичних точок функціонала $\mathcal{A}^{(\tau)}_{0,\tau_0}:\Sigma_0\to\mathbb{R}$ є скінченновимірною і компактною для всіх $\tau_0\in\mathbb{S}^1$ і $\varepsilon>0$;

ii) для всіх $\sigma_0\in Z^d_0$ лінійний оператор $(\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{0,\tau_0})' : T(Z^d_0)\to T(Z^d_0)$ є фредгольмовим;

iii) для всіх $\sigma_0\in Z^d_0$ виконується умова $T_{\sigma_0}(\Sigma_0)=\mathrm{Ker}\left(\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{0,\tau_0}(\sigma_0)\right)'$.

Остання умова означає регулярність відображення $\left(\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{0,\tau_0}\right)' : T(\Sigma_0)\to\to T(\Sigma_0)$ для $\sigma_0\in Z^d_0$, оскільки для всіх таких $\sigma_0\in Z^d_0$ завжди $T_{\sigma_0}(Z^d_0)\subseteq\subseteq\mathrm{Ker}\left(\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{0,\tau_0}(\sigma_0)\right)'$. Тобто якщо якесь $\alpha\in T_{\sigma_0}(\Sigma_0)$ є розв'язком рівняння $\left(\mathrm{grad}\,\mathcal{A}^{(\tau)}_{0,\tau_0}(\sigma_0)\right)'\cdot\alpha=0$, то необхідно $\alpha\in T_{\sigma_0}(Z^d_0)$ для будь-якого $\sigma_0\in Z^d_0$.

Розглянемо тепер задачу існування в околі будь-якої кривої $\sigma_\varepsilon\in Z^d_\varepsilon$ функціонального многовиду Z^d_ε, дифеоморфного до $Z^d_0\subset\Sigma_0$ і такого, що для будь-якої кривої $\sigma_\varepsilon \in Z^d_\varepsilon$ умова $\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}\Big|_{Z_\varepsilon}(\sigma_\varepsilon) = 0$ є еквівалентною умові $\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon) = 0$. З цією метою скористаємося теоремою про неявну функцію Ляпунова – Шмідта [2, 11, 31, 32].

Лема 2.1. *На Z^d_0 існує гладка функція*

$$w_\varepsilon : Z^d_0 \to \Sigma_\varepsilon \tag{2.10}$$

така, що для всіх $\varepsilon > 0$:

1) $w_0(\sigma_0) = \sigma_0$ *для кривої* $w_\varepsilon(\sigma_0) := \sigma_\varepsilon \in \Sigma_\varepsilon$;
2) $\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon) \in T_{\sigma_0}(Z^d_0)$ *для всіх* $\sigma_0 \in Z^d_0$;
3) $(\dot\sigma_\varepsilon, T_{\sigma_0}(Z^d_0)) = 0$ *для всіх* $\sigma_0 \in Z^d_0$ *і* $\dot\sigma_\varepsilon \in T_{\sigma_\varepsilon}(\Sigma_\varepsilon)$.

Доведення. Нехай $\alpha_i(\sigma_0) \in T_{\sigma_0}(Z^d_0)$, $j = \overline{1,d}$, — ортогональний базис в $T_{\sigma_0}(Z^d_0)$. Визначимо з його допомогою наступне відображення:

$$F : Z^d_0 \times (T_{\sigma_0}(\Sigma_0) \times \mathbb{R}^d) \to T_{\sigma_0}(\Sigma_0) \times \mathbb{R}^d, \tag{2.11}$$

де для кожного $\sigma_0 \in Z^d_0$ та $(\dot\sigma_\varepsilon; c) \in T_{\sigma_0}(\Sigma_0) \times \mathbb{R}^d$

$$F_{\sigma_0}(\dot\sigma_\varepsilon; c) := \left(\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon) - \sum_{i=1}^d c_i \alpha_i(\sigma_0); (\dot\sigma_\varepsilon, \alpha_1), (\dot\sigma_\varepsilon, \alpha_2), \ldots, (\dot\sigma_\varepsilon, \alpha_d)\right) :=$$
$$:= \left(F^{(1)}_{\sigma_0}, F^{(2)}_{\sigma_0}\right), \tag{2.12}$$

причому $F^{(1)}_{\sigma_0} = 0$ означає, що $\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon) \in T_{\sigma_0}(Z^d_0)$ і умову 2 виконано; якщо ж $F^{(2)}_{\sigma_0} = 0$, то $(\dot\sigma_\varepsilon, T_{\sigma_0}(\Sigma_0)) = 0$ і умову 3 теж виконано.

Легко зауважити, що $F^{(j)}_{\sigma_0}(0;0) = 0$, $j = \overline{1,2}$, для всіх $\sigma_0 \in Z^d_0$. Зафіксуємо $\bar\sigma_0 \in Z^d_0$ і розглянемо відповідну похідну Фреше $\left(\dfrac{\partial F^{(1)}_{\sigma_0}}{\partial(\dot\sigma_\varepsilon; c)}, \dfrac{\partial F^{(2)}_{\sigma_0}}{\partial(\dot\sigma_\varepsilon; c)}\right)$ відображення (2.11) у точці $(\bar\sigma_0|0;0) \in Z^d_0 \times T_{\sigma_0}(\Sigma_0) \times \mathbb{R}^d$. Тоді легко отримати

$$\begin{gathered}\left\langle \frac{\partial F^{(1)}_{\sigma_0}}{\partial(\dot\sigma_\varepsilon; c)}, (\beta; g)\right\rangle = \left(\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\bar\sigma_0)\right)' \cdot \beta - \sum_{i=1}^d g_i \alpha_i(\bar\sigma_0), \\ \left\langle \frac{\partial F^{(2)}_{\sigma_0}}{\partial(\dot\sigma_\varepsilon; c)}, (\beta; g)\right\rangle = ((\beta, \alpha_1(\bar\sigma_0)), (\beta, \alpha_2(\bar\sigma_0)), \ldots, (\beta, \alpha_d(\bar\sigma_0)))\end{gathered} \tag{2.13}$$

для кожного $(\beta; g) \in T_{\sigma_0}(\Sigma_0) \times T(\mathbb{R}^d)$. Покажемо, що оператор $F'(\bar\sigma_0|0;0)$: $T_{\bar\sigma_0}(\Omega_{t_0}) \times T(\mathbb{R}^d) \to T_{\bar\sigma_0}(\Sigma_0) \times T(\mathbb{R}^d)$ є оборотним. Оскільки оператор $\left(\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\bar\sigma_0)\right)' : T_{\sigma_0}(\Sigma_0) \to T_{\sigma_0}(\Sigma_0)$ є фредгольмовим [27, 31, 32], легко встановити, що ядро оператора F'_{σ_0} є нульовим. Справді, з першого виразу (2.13) отримуємо

$$\left(\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\bar\sigma_0)\right)' \cdot \beta = \sum_{i=1}^d g_i \alpha_i(\bar\sigma_0). \tag{2.14}$$

Беручи тепер скалярний добуток (2.14) з елементами $\alpha_j(\bar\sigma_0) \in T_{\bar\sigma_0}(Z^d_0)$, $j = \overline{1,d}$, маємо

$$\left(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\bar{\sigma}_0)'\cdot\beta,\alpha_j(\bar{\sigma}_0)\right)=\left(\beta,(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\bar{\sigma}_0))'\alpha_j(\bar{\sigma}_0)\right)=g_j \tag{2.15}$$

для всіх $j=\overline{1,d}$; при цьому ми скористалися тим, що $\left(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}\right)'=$ $=\left(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}\right)'^{*}$. Оскільки, за побудовою, $\alpha_j(\bar{\sigma}_0)\in\operatorname{Ker}\left(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\bar{\sigma}_0)\right)'$, $j=$ $=\overline{1,d}$, з (2.15) знаходимо, що $g_j=0$ для всіх $j=\overline{1,d}$. Отже, ми отримали умову, що $\left(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\bar{\sigma}_0)\right)'\cdot\beta=0$. Використовуючи знову умову iii), отримуємо, що $\beta\in T_{\bar{\sigma}_0}(Z_0^d)$. З іншого боку, друга умова в (2.13) означає, що $\left(\beta,T_{\bar{\sigma}_0}(Z_0^d)\right)=0$, тобто $\beta=0$. Тим самим ми встановили оборотність відображення (2.10) в околі точки $\bar{\sigma}_0\in Z_0^d$. Застосовуючи тепер теорему про неявну функцію [2, 31, 32], знаходимо, що існують гладкі відображення $(w_\varepsilon;c):Z_0^d\to\Sigma_\varepsilon\times\mathbb{R}^d$, визначені в деякому околі $U(\bar{\sigma}_0)\subset Z_0^d$ і такі, що для достатньо малих $\varepsilon>0$ виконується рівність

$$F(\sigma_0|\dot{w}_\varepsilon(\sigma_0);c(\sigma_0))=0$$

для всіх $\sigma_\varepsilon\in U(\bar{\sigma}_0)\subset\Sigma_\varepsilon$. Розглянемо тепер відповідне векторне поле $\dfrac{d\tilde{w}_\varepsilon(\bar{\sigma}_0)}{d\tilde{s}}:=$ $:=\dot{\sigma}_\varepsilon(\tilde{w}_\varepsilon(\bar{\sigma}_0))$ для $|\tilde{s}|<\delta(\varepsilon)$, де $\delta(\varepsilon)>0$ — деяке число, для якого існує відповідна траєкторія $\tilde{w}_\varepsilon(\bar{\sigma}_0):[-\delta(\varepsilon),\delta(\varepsilon)]\to\Sigma_\varepsilon$ для всіх $\varepsilon\to 0$. Тоді для всіх $\varepsilon\to 0$ можна визначити відображення $w_\varepsilon(\sigma_0):=\tilde{w}_\varepsilon(\sigma_0)(\delta(\varepsilon))$ для кожної кривої $\sigma_0\in U(\bar{\sigma}_0)\subset$ $\subset Z_0^d$. Оскільки Z_0^d є скінченновимірним компактним многовидом, то функцію w_ε: $U(\bar{\sigma}_0)\to\Sigma_\varepsilon$ можна продовжити на весь компакт Z_0^d, що і доводить лему.

***Зауваження* 2.1.** Функція $w_\varepsilon:Z_0^d\to\Sigma_\varepsilon$, знайдена вище, є гладкою і задовольняє умову $w_\varepsilon(\sigma_0)=\sigma_\varepsilon$ для всіх кривих $\sigma_0\in Z_0^d$.

Побудуємо тепер множину

$$Z_\varepsilon^d:=\left\{\sigma_\varepsilon:=w_\varepsilon(\sigma_0)\in\Sigma_\varepsilon,\ \sigma_0\in Z_0^d\right\}$$

для всіх достатньо малих $\varepsilon>0$. Тоді має місце наступна лема.

Лема 2.2. *Множина $Z_\varepsilon^d\subset\Sigma_\varepsilon$ є d-вимірним компактним многовидом, дифеоморфним многовиду $Z_0^d\subset\Sigma_0$, причому для всіх $\sigma_\varepsilon:=w_\varepsilon(\sigma_0)\in Z_\varepsilon^d$ виконано необхідну умову: якщо $\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}\Big|_{Z_\varepsilon^d}(\sigma_\varepsilon)=0$, то $\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon)=0$.*

Доведення. Нехай $\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}\Big|_{Z_\varepsilon^d}(\sigma_\varepsilon)=0$ для деякого елемента $\sigma_\varepsilon\in Z_\varepsilon^d$. Тоді, очевидно, вектор $\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(\sigma_\varepsilon)$ є ортогональним до $T_{\sigma_\varepsilon}(Z_\varepsilon^d)$, оскільки діаграма

$$\begin{array}{ccc} T(Z_0^d) & \xrightarrow{w_{\varepsilon,*}} & T(Z_\varepsilon^d) \\ \operatorname{pr}_{Z_0^d}\downarrow & & \downarrow\operatorname{pr}_{Z_\varepsilon^d} \\ Z_0^d & \xrightarrow{w_\varepsilon} & Z_\varepsilon^d \end{array}$$

за побудовою є комутативною. Зокрема, відображення $w_{\varepsilon,*}:T(Z_0^d)\to T(Z_\varepsilon^d)$ є локальним ізоморфізмом, і нехай для будь-якого $\alpha_\varepsilon:=w_{\varepsilon,*}\cdot\alpha\in T(Z_\varepsilon^d)$, де $\alpha\in T(Z_0^d)$,

$$\left(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(w_\varepsilon(\sigma_0),\alpha_\varepsilon)\right)\equiv\left(\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(w_\varepsilon(\sigma_0),w_{\varepsilon,*}\alpha)\right)=$$

$$=\left(w_\varepsilon^*\operatorname{grad}\mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}\Big|_{Z_\varepsilon^d}(\sigma_\varepsilon),\alpha\right)=0. \tag{2.16}$$

З іншого боку, використовуючи (2.12), маємо

$$\operatorname{grad} \mathcal{A}^{(\tau)}_{\varepsilon,\tau_0}(w_\varepsilon(\sigma_0)) = \sum_{i=1}^{d} c_i(\sigma_0)\alpha_i(\sigma_0) \tag{2.17}$$

для всіх $\sigma_0 \in Z_0^d$. Підставляючи (2.17) в (2.16), для кожного $\alpha := \alpha_j(\sigma_0) \in T_{\sigma_0}(Z_0^d)$, $j = \overline{1,d}$, отримуємо

$$\sum_{i=1}^{d} c_i(\sigma_0)(\alpha_i(\sigma_0), w_{\varepsilon,*}\alpha_j(\sigma_0)) = 0, \tag{2.18}$$

або $\hat{W} \cdot c = 0$, де $\hat{W} := \Big\{(\alpha_i(\sigma_0), w_{\varepsilon,*}\alpha_j(\sigma_0)) : i,j = \overline{1,d}\Big\}$ — невироджена матриця, оскільки відображення $w_{\varepsilon,*} : T(Z_0^d) \to T(Z_\varepsilon^d)$ є ізоморфізмом дотичних просторів. Справді, за лемою 2.1 існує таке $\delta_{\varepsilon_0} > 0$, що $\|w_{\varepsilon,*} - \mathbf{1}\| < \delta_{\varepsilon_0}$ для всіх $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, тоді для $i,j = \overline{1,d}$

$$\big|(\alpha_i, (w_{\varepsilon,*} - \mathbf{1})\alpha_j)\big| < \|\alpha_i\|\,\|\alpha_j\|\delta_{\varepsilon_0} = \delta_{\varepsilon_0}.$$

З іншого боку,

$$\big|(\alpha_i, (w_{\varepsilon,*} - \mathbf{1})\alpha_j)\big| = \big|(\alpha_i, w_{\varepsilon,*}\alpha_j) - \delta_{ij}\big| = |\hat{W}_{ij} - \delta_{ij}| < \delta_{\varepsilon_0}$$

для всіх $i,j = \overline{1,d}$, тобто матриця $\hat{W} \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^d$, оскільки вона близька до одиничної. Як висновок, отримуємо, що вектор $c \in \mathbb{R}^d$ в (2.18) дорівнює нулю, що з урахуванням (2.17) доводить лему.

***Зауваження* 2.2.** Оскільки відображення $w_\varepsilon : Z_0^d \to Z_\varepsilon^d$ є локальним дифеоморфізмом для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$, то важливим є питання про те, коли його можна продовжити до глобального дифеоморфізму і тим самим однозначно визначити компактний многовид $Z_\varepsilon^d \subset \Sigma_\varepsilon$.

З огляду на цю проблему може бути корисною наступна теорема [33].

Теорема 2.1. *Нехай Z_0^d та Z_ε^d — метричні простори, причому Z_0^d є лінійно зв'язним, а Z_ε^d — однозв'язним. Тоді відображення $w_\varepsilon : Z_0^d \to Z_\varepsilon^d$ буде гомеоморфізмом Z_0^d на Z_ε^d тоді і тільки тоді, коли виконано наступні умови*:

i) *$w_\varepsilon : Z_0^d \to Z_\varepsilon^d$ є локальним гомеоморфізмом*;

ii) *прообраз будь-якої компактної підмножини в Z_ε^d є компактним у Z_0^d, тобто відображення $w_\varepsilon : Z_0^d \to Z_\varepsilon^d$ є власним.*

Покладемо далі, що відображення $w_\varepsilon : Z_0^d \to Z_\varepsilon^d$, побудоване вище, є локальним дифеоморфізмом, який задовольняє умови теореми 2.1. Тоді отримуємо, що множина Z_ε^d, як образ відображення $w_\varepsilon : Z_0^d \to \Sigma_\varepsilon$ для всіх достатньо малих $\varepsilon > 0$, є глобально дифеоморфною множині $Z_0^d \subset \Sigma_0$. Оскільки для функціонала (2.5) критична множина Z_ε^d є лагранжевою поверхнею $\Lambda_\varepsilon^{n+r+1} \subset \Sigma_\varepsilon$, на ній можна задати координати, індуковані відображенням $w_\varepsilon : \Lambda_0^{n+r+1} \to \Lambda_\varepsilon^{n+r+1}$, які побудуємо новим методом „віртуальних" канонічних перетворень, що узагальнює підхід А. М. Самойленка та Дж. Бургейна [8, 15, 34].

3. Метод віртуальних канонічних перетворень і критерій адіабатичної стабільності для проблеми Мельникова – Самойленка. Породжуюча функція (2.4) при $\varepsilon = 0$ задає канонічне перетворення симплектичної структури $\omega^{(2)} \in \Lambda^2(M \times \mathbb{R}^r)$, яка в координатах розшарування $\bigcup\limits_{(\bar{h},\bar{\xi})\in\mathbb{R}^{n+r}} M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}} = T^*(M \times \mathbb{R}^r)$ в околі

$U(M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}})$ інтегрального многовиду $M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}}$ має вигляд $\omega^{(2)} = \sum_{j=0}^{n+r} dw_{j,\tau} \wedge d\mu_{j,\tau}$. Якщо ж тепер покласти $\varepsilon > 0$, то відповідний розширений лагранжевий многовид $\Lambda_0^{n+r+1} = M^{n+r}_{\bar{h},\bar{\xi}} \times \{\tau_0\} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r) \times \mathbb{S}^1$ буде деформуватися, згідно з результатами попереднього пункту, в лагранжевий многовид $\Lambda_\varepsilon^{n+r+1} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r) \times \mathbb{S}^1$, на якому буде виконано умову (2.7) для кожного замкненого шляху $\sigma_\varepsilon \subset \Lambda_\varepsilon^{n+r+1}$, гомотопного точці. Використавши теорему 2.1, позначимо відповідні координати на збуреному лагранжевому многовиді як $(w_\varepsilon; \mu_\varepsilon|\tau) \in U(\Lambda^{n+r}_{\varepsilon,\tau_0}) \times \mathbb{S}^1$, де многовид $\Lambda^{n+r}_{\varepsilon,\tau_0} := \Lambda_\varepsilon^{n+r+1}\big|_{T^*(M\times\mathbb{R}^r)}$ і $U(\Lambda^{n+r}_{\varepsilon,\tau_0}) \times \mathbb{S}^1$ — деякий його відкритий окіл. Тоді, виходячи з умови канонічності підінтегральної 1-форми Пуанкаре – Картана в (2.7), можемо записати рівність

$$-\langle \varphi_\tau, d\gamma_\tau\rangle - H' dt = \langle w_\tau, d\mu_\tau\rangle - \tilde{H}(\varepsilon t + \tau_0)dt - d\tilde{S}_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau), \tag{3.1}$$

де $\tilde{S}_\tau : \mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}$ — відповідна породжуюча функція, причому ми припустили, що „віртуальний” тороїдальний інтегральний многовид $\mathbb{T}_\tau^{n+r}$ при $\tau := \varepsilon t + \tau_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ є гладко деформованим в тороїдальний многовид $\mathbb{T}_\varepsilon^{n+r} \subset$ $\subset \Lambda^{n+r+1}_{\varepsilon,\tau_0}$, а також позначили $\tilde{S}_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau) := \bar{S}_\tau(\mu_\tau;\bar{h}(\gamma_\tau),\bar{\xi}(\gamma_\tau))$, $H(\varepsilon t + \tau_0) :=$ $:= H(\tau|q(\tau|\mu_\tau;w_\tau), p(\tau|\mu_\tau;w_\tau))|_{\tau:=\varepsilon t+\tau_0}$ для всіх $\tau_0 \in \mathbb{S}^1$ і $t \in \mathbb{R}$. Канонічне перетворення (3.1) визначає нову так звану „віртуальну” функцію Гамільтона $\tilde{H}$: $\mathbb{S}^1 \times U(\mathbb{T})_\tau^{n+r} \to \mathbb{R}$, яка визначається з рівності

$$\tilde{H}(t|\varphi_\tau;\gamma_\tau) = H(\varepsilon t + \tau_0)|_{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} + \left(\frac{\partial \tilde{S}_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\mathbb{T}_\tau^{n+r}}, \tag{3.2}$$

де $(\mu_\tau; w_\tau) \in U(\mathbb{T}_\tau^{n+r})$, $\gamma_\tau \in \mathbb{R}^{n+r}$ і параметр $\tau := \tau_0 + \varepsilon t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Відповідні рівняння Гамільтона в околі $U(\mathbb{T}_\tau^{n+r})$ віртуального тора $\mathbb{T}_\tau^{n+r} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r)$ мають вигляд

$$\frac{d\mu_\tau}{ds} = \frac{\partial H(\tau)}{\partial w_\tau}, \qquad \frac{dw_\tau}{ds} = -\frac{\partial H(\tau)}{\partial \mu_\tau}, \tag{3.3}$$

причому $\dfrac{d\tau}{ds} = \varepsilon$ для всіх $s \in \mathbb{R}$. У термінах неавтономних змінних „дія-кут” на віртуальному торі $\mathbb{T}_\tau^{n+r} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r)$ рівняння (3.3) наберуть вигляду

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi_\tau}{ds} = \Omega_1(\tau;\gamma_\tau) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \gamma_\tau}\left(\frac{\partial \tilde{S}_\tau}{\partial \tau}\bigg|_{\mathbb{T}_\tau^{n+r}}\right), \\ \frac{d\gamma_\tau}{ds} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial \varphi_\tau}\left(\frac{\partial \tilde{S}_\tau}{\partial \tau}\bigg|_{\mathbb{T}_\tau^{n+r}}\right), \quad \frac{d\tau}{ds} = \varepsilon,\end{gathered} \tag{3.4}$$

для всіх $(\varphi_\tau; \gamma_\tau) \in U(\mathbb{T}_\tau^{n+r})$.

Наведемо пояснення отриманого результату. Динамічна система (3.4) має стандартну форму М. М. Боголюбова [7, 12], для якої можна ефективно застосувати метод усереднення та прискореної збіжності [1, 12, 35] канонічного перетворення до нових змінних на збуреному торі $\mathbf{T}_{\varepsilon}^{n+r} \subset \Lambda_{\varepsilon,\tau_0}^{n+r}$, у термінах яких еволюція динамічної системи (3.4) цілком відокремлюється для часу $s \in [0, 1/\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, стаючи квазілінійною функцією з високою точністю $O(\varepsilon^p)$, де $\mathbf{Z}_+ \ni p \to \infty$. Таким чином, ми отримали зображення адіабатичної збуреної динамічної системи (2.1) в околі незбуреного тороїдального інтегрального многовиду $M_{\bar{h},\bar{\xi}_\tau}^{n+r}$ за допомогою системи віртуальних координат на добутку $\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}} \mathbf{S}_j^1\right) \times \left(\overset{r}{\underset{j=1}{\otimes}} \mathbf{S}_j^1\right) \simeq \mathbf{T}_{\bar{h}}^n \times \mathbf{T}_{\bar{\xi}}^r$, які в невиродженому випадку забезпечують зведення рівнянь при $\varepsilon \to 0$ до слабко збуреного потоку на торі $\mathbf{T}_{\gamma}^{n+r}$ у канонічній формі Боголюбова. Як відомо з загальної теорії такого типу динамічних систем на квазіінваріантному торі $\mathbf{T}_{\gamma}^{n+r}$, побудованої в перших працях А. М. Колмогорова, В. І. Арнольда і Ю. Мозера [1, 3, 35 – 37] та розвиненої у працях М. М. Боголюбова, Ю. О. Митропольського і А. М. Самойленка [8, 9, 12, 34, 38, 39], збурений потік (3.4) на торі $\mathbf{T}_{\tau}^{n+r}$ при $\varepsilon \to 0$ допускає глобальну лінеаризацію на дифеоморфному торі $\mathbf{T}_{\gamma,\varepsilon}^{n+r}$ при таких необхідних умовах на матрицю квазічастот:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{i,j=\overline{1,n}} |\Omega_{ij}(\gamma;\varepsilon) - \bar{\Omega}_{ij}(\gamma;\varepsilon)| \to 0,$$

$$\det \left\| \frac{\partial \Omega_{ij}(\gamma;\varepsilon)}{\partial \gamma_j} \right\|_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$$

для усіх $i, j = \overline{1,n}$ і усіх $\gamma \in U(\gamma_\tau)$ з певного відкритого зв'язного околу $U(\gamma_\tau)$ точки $\gamma_\tau \in \mathbf{R}^n$, $\tau \in [0, 2\pi]$.

З урахуванням особливостей КАМ-методу [1, 35] побудови вказаного вище дифеоморфізму торів $\mathbf{T}_{\gamma}^n$ і $\mathbf{T}_{\gamma,\varepsilon}^n$ при $\varepsilon \to 0$, що ґрунтується на швидкій збіжності ньютонівських ітерацій, які приводять до компенсації впливу малих знаменників у гомологічних рівняннях на торі $\mathbf{T}_{\gamma}^n$, в останні роки у працях [15, 21 – 24, 34, 40 – 42] були зроблені спроби глибшого аналізу цього факту. Зокрема, було встановлено, що подолання особливостей малих знаменників за допомогою методу Ньютона не дає повного розуміння природи дифеоморфізму торів $\mathbf{T}_{\gamma}^n$ і $\mathbf{T}_{\gamma,\varepsilon}^n$, оскільки при цьому завуальовується топологічна структура проблеми, яка в багатьох випадках дає можливість оминути ряд невластивих перешкод при глобальному аналізі процесу канонічних перетворень.

При дослідженні певного класу динамічних систем, які моделюють класичну проблему Мельникова – Самойленка для двох слабко зв'язаних інтегровних потоків, у праці [15] було показано на основі варіанту методу Ляпунова – Шмідта [31, 32], що збіжність ньютонівських ітерацій при побудові відповідного дифеоморфізму торів несуттєво залежить від проблеми малих знаменників, а більше визначається структурою матриці частот $\{\Omega_{ij}(\gamma;\varepsilon) : \ i, j = \overline{1, n+s}\}$, зокрема її аналітичною невиродженістю. Наведемо таке означення аналітичної невиродженості.

Означення 3.1. *Нехай $U(\gamma)$, $\gamma_\tau \in \mathbf{R}^{n+s}$, є відкритим зв'язним околом в $\mathbf{R}$, а відображення $(\Omega(\varepsilon)\cdot z) : U(\gamma_\tau) \to \mathbf{R}^{n+s}$ є дійсною гладкою функцією класу C^{n+s+1} для кожного вектора $z \in \mathbf{R}^{n+s}$. Будемо називати її аналітично невиродженою, якщо образ $\mathrm{Im}(\Omega(\varepsilon)\cdot z) \subset \mathbf{R}^{n+s}$, $z \in \mathbf{R}^{n+s}/\{0\}$, не належить $(n+s-1)$-вимірному лінійному підпростору $\mathbf{R}^{n+s}$, і говорити, що матриця $\Omega \in \mathrm{Aut}(\mathbf{R}^{n+s})$ є виродженою.*

Легко переконатися, що достатнім критерієм аналітичної невиродженості вектора частот $\Omega\cdot z : U(\gamma_\tau)+(0,\varepsilon_0)\to\mathbf{R}^{n+s}$, $z\in\mathbf{R}^{n+s}$, є

$$\det\left\{\left\|\left(\frac{\partial^{|\beta|}(\Omega(\gamma_\tau;\varepsilon)\cdot z)}{\partial\gamma_\tau^\beta}\right)^T\left(\frac{\partial^{|\alpha|}(\Omega(\gamma_\tau;\varepsilon)\cdot z)}{\partial\gamma_\tau^\alpha}\right)\right\|\right\}\neq 0 \tag{3.5}$$

для всіх $z\in\mathbf{R}^{n+s}/\{0\}$.

При умові типу (3.5) у працях [8, 9, 34, 40] було встановлено існування дифеоморфізму торів $\mathbf{T}^n_\gamma$ і $\mathbf{T}^n_{\gamma,\varepsilon}$ при $\varepsilon\to 0$ для досить широкого класу канонічних потоків на торі $\mathbf{T}^n_\gamma$, зануреного у відповідний $2(n+s)$-вимірний фазовий простір $M^{2(n+s)}$.

Аналізуючи методику праць [8, 9, 34, 40] у порівнянні зі схемою побудови канонічної системи рівнянь (3.4) в термінах віртуальних координат на сепарабельному торі $\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}}\mathbf{S}^1_j\right)\times\left(\overset{r}{\underset{j=1}{\otimes}}\mathbf{S}^1_j\right)\simeq\mathbf{T}^n_{\bar h}\times\mathbf{T}^r_{\bar\xi}$, отримуємо еквівалентну умову аналітичної невиродженості матриці частот (3.5). Тобто умова (3.5) в певному сенсі є еквівалентною умові топологічної сепарабельності тора $\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\otimes}}\mathbf{S}^1_j\right)\times\left(\overset{r}{\underset{j=1}{\otimes}}\mathbf{S}^1_j\right)\simeq$ $\simeq\mathbf{T}^n_{\bar h}\times\mathbf{T}^r_{\bar\xi}$, про що раніше стверджувалося у працях [15, 41, 42] в дещо інших термінах.

Права частина гамільтонової системи (3.4) аналітично записується як

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi_{j,\tau}}{ds}=\Omega_{1,j}(\tau;\gamma_\tau)+\varepsilon\sum_{k=1}^{n+r}\varphi_{k,\tau}\left(\Omega^{-1}(\tau;\gamma_\tau)\frac{\partial\Omega(\tau;\gamma_\tau)}{\partial\tau}\right)_{kj}+\\+\varepsilon\sum_{k=1}^{n+r}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(w_{k,\tau}\frac{\partial\mu_{k,\tau}}{\partial\bar h_i}\Omega_{i,j}(\tau;\gamma_\tau)\right)+\\+\varepsilon\sum_{k=1}^{n+r}\sum_{i=n+1}^{n+r}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(w_{k,\tau}\frac{\partial\mu_{k,\tau}}{\partial\bar\xi_{i-n}}\Omega_{i,j}(\tau;\gamma_\tau)\right),\\ \frac{d\gamma_{j,\tau}}{ds}=\varepsilon\sum_{k=1}^{n+r}\frac{\partial}{\partial\tau}\Big[(\Omega^{-1}(\tau;\gamma_\tau)F(\tau;\mu_\tau))_{jk}w_{k,\tau}\Big],\end{gathered}\tag{3.6}$$

де $j=\overline{1,n+r}$, $\tau:=\tau_0+\varepsilon s\in\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ і $F^{-1}(\tau;\mu_\tau):=\left\{\left(\frac{\partial w_{k,\tau}}{\partial\bar h_j},\frac{\partial w_{k,\tau}}{\partial\bar\xi_s}\right): k=\right.$ $\left.=\overline{1,n+r},\ j=\overline{1,n},\ s=\overline{1,r}\right\}$, причому мають місце вирази

$$\frac{\partial\mu_{k,\tau}}{\partial\bar h_i}=-\sum_{s,j=1}^{n+r}F_{ks}(\tau;\mu_\tau)\int\limits_{\mu^{(0)}_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}}d\lambda\left(\left.\frac{(F^{-1}_{i,j}(\tau;\lambda))}{\partial\bar h_s}\right|_{s=\overline{1,n}},\left.\frac{(F^{-1}_{i,j}(\tau;\lambda))}{\partial\bar\xi_{n-s}}\right|_{s=\overline{n+1,n+r}}\right)$$

для $k=\overline{1,n+r}$, $i=\overline{1,n}$ і

$$\frac{\partial\mu_{k,\tau}}{\partial\bar\xi_i}=-\sum_{s,j=1}^{n+r}F_{ks}(\tau;\mu_\tau)\int\limits_{\mu^{(0)}_{j,\tau}}^{\mu_{j,\tau}}d\lambda\left(\left.\frac{(F^{-1}_{i,j}(\tau;\lambda))}{\partial\bar\xi_s}\right|_{s=\overline{1,n}},\left.\frac{(F^{-1}_{i,j}(\tau;\lambda))}{\partial\bar\xi_{n-s}}\right|_{s=\overline{n+1,n+r}}\right)$$

для $k = \overline{1, n+r}$, $i = \overline{1, r}$. Система рівнянь (3.6) має досить спеціальну форму, яка дає можливість застосувати для дослідження її стійкості на неавтономному віртуальному торі $\mathbb{T}_\tau^{n+r}$ як узагальнений метод В. К. Мельникова [14], так і метод послідовних нестаціонарних канонічних перетворень [1, 11, 12]. У випадку останнього задамо нове канонічне перетворення таким чином:

$$\langle \gamma_\tau, d\varphi_\tau \rangle - \tilde{H}|_{U(\mathbb{T}_\tau^{n+r})} dt = -\langle \varphi_\varepsilon, d\gamma_\varepsilon \rangle - H^{(\varepsilon)} dt + d\Phi^{(\varepsilon)}(t|\varphi_\tau; \gamma_\varepsilon), \qquad (3.7)$$

де $\tau := \varepsilon t + \tau_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, і, за визначенням, нова функція Гамільтона $H^{(\varepsilon)}\colon \mathbb{R} \times U(\mathbb{T}_\tau^{n+r}) \to \mathbb{R}$ не залежить явно від кутових змінних $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{T}_\tau^{n+r} \subset \Lambda_{\varepsilon,\tau_0}^{n+r}$ при умові, що для породжуючої функції $\Phi^{(\varepsilon)} : \mathbb{R} \times (\mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r}) \to \mathbb{R}$ при $\varepsilon \to 0$ має місце асимптотичний розклад

$$\Phi^{(\varepsilon)} = \langle \varphi_\tau, \gamma_\varepsilon \rangle + \varepsilon \Phi_1(t|\varphi_\tau; \gamma_\varepsilon) + \varepsilon^2 \Phi_2(t|\varphi_\tau; \gamma_\varepsilon) + O(\varepsilon^3), \qquad (3.8)$$

де функції $\Phi_j : \mathbb{R} \times (\mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r}) \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,2}$, є періодичними за змінною $\varphi_\tau \in \mathbb{T}_\tau^{n+r}$. Із (3.7) та (3.8) випливає

$$\gamma_\tau = \gamma_\varepsilon + \frac{\varepsilon \partial \Phi_1}{\partial \varphi_\tau} + \frac{\varepsilon^2 \partial \Phi_2}{\partial \varphi_\tau} + O(\varepsilon^3),$$

$$\varphi_\tau = \varphi_\varepsilon - \frac{\varepsilon \partial \Phi_1}{\partial \gamma_\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2 \partial \Phi_2}{\partial \gamma_\varepsilon} + O(\varepsilon^3)$$

при $\varepsilon \to 0$. При цьому для функції Гамільтона $H^{(\varepsilon)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}$ при $\varepsilon \to 0$ покладаємо, що існує асоційований з (3.8) асимптотичний розклад

$$H^{(\varepsilon)}(t|\gamma_\varepsilon) = H^{(0)}(t|\gamma_\varepsilon) + \varepsilon H^{(1)}(t|\gamma_\varepsilon) + \varepsilon^2 H^{(2)}(t|\gamma_\varepsilon) + O(\varepsilon^3)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$ та $(\varphi_\varepsilon; \gamma_\varepsilon) \in U(\mathbb{T}_\varepsilon^{n+r})$. Як результат зображень (3.2) і (3.7) знаходимо

$$H^{(0)}(t|\gamma_\varepsilon) = \bar{h}_{1,\tau}(\gamma_\tau)|_{\gamma_\tau = \gamma_\varepsilon},$$

$$H^{(1)}(t|\gamma_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n+r} \Omega_{1,j}(\tau; \gamma_\tau) \frac{\partial \Phi_1(t|\varphi_\varepsilon; \gamma_\varepsilon)}{\partial \varphi_{j,\varepsilon}} + \frac{\partial \tilde{S}_\tau(\varphi_\varepsilon; \gamma_\varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial \Phi_1(t|\varphi_\varepsilon; \gamma_\varepsilon)}{\partial t}, \qquad (3.9)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

де $\tau := \varepsilon t + \tau_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Оскільки функція $H^{(1)}\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}$ не залежить від кутової змінної $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{T}_\varepsilon^{n+r}$, то після усереднення по цій змінній отримуємо співвідношення

$$H^{(1)}(t|\gamma_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n+r} \Omega_{1,j}(\tau; \gamma_\tau) \left\langle \frac{\partial \Phi_1(t|\varphi_\varepsilon; \gamma_\varepsilon)}{\partial \varphi_{\varepsilon,j}} \right\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial \Phi_1(t|\varphi_\varepsilon; \gamma_\varepsilon)}{\partial t} \right\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} + \left\langle \frac{\partial \tilde{S}_\tau(\varphi_\varepsilon; \gamma_\varepsilon)}{\partial \tau} \right\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}}, \qquad (3.10)$$

де, за визначенням, для будь-якої функції $g \in L_1(\mathbb{T}_\tau^{n+r}; \mathbb{R})$

$$\langle g(\varphi_\varepsilon) \rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} := \frac{1}{(2\pi)^{n+r}} \int\limits_{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} g(\varphi_\varepsilon) d\varphi_\varepsilon.$$

Внаслідок періодичності функції $\Phi_1 : \mathbb{R} \times (\mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r}) \to \mathbb{R}$ за змінною $\varphi_\varepsilon \in \mathbb{T}_\tau^{n+r}$ з (3.10) маємо

$$H^{(1)}(t|\gamma_\varepsilon) = \left\langle \frac{\partial \tilde{S}_\tau(\varphi_\varepsilon;\gamma_\varepsilon)}{\partial \tau} \right\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} + \left\langle \frac{\partial \Phi_1(t;\varphi_\varepsilon;\gamma_\varepsilon)}{\partial t} \right\rangle.$$

Кутові змінні φ_τ належать $\mathbb{T}_\tau^{n+r}$, і завдяки ізоморфізму Гамільтона – Якобі $\mathbb{T}_\tau^{n+r} \simeq \simeq \bigotimes_{j=1}^{n+r} \mathbb{S}_j^1$ на підставі теореми Біркгофа – Хінчина [25, 26] можемо записати, що

$$\langle g(\varphi_\varepsilon)\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} = \frac{1}{\bar{K}_\tau} \oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau g(\varphi_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau)) \left| \frac{\partial \varphi_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau)}{\partial \mu_\tau} \right|, \tag{3.11}$$

де $\bar{K}_\tau := \oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau \left| \frac{\partial \varphi_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau)}{\partial \mu_\tau} \right|$ і

$$\sigma_\tau := \left\{ \bigotimes_{j=1}^{n+r} \sigma_{j,\tau} \in H_1(\mathbb{T}_\tau^{n+r};\mathbb{Z}) \right\},$$

є базисом одновимірної групи гомологій $H_1(\mathbb{T}_\tau^{n+r};\mathbb{Z})$ віртуального тора $\mathbb{T}_\tau^{n+r} \subset \subset T^*(M \times \mathbb{R}^n)$. Оскільки невироджений якобіан переходу має вигляд

$$\left| \frac{\partial \varphi_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau)}{\partial \mu_\tau} \right| = \det F(\tau;\mu_\tau) \det \Omega(\tau;\gamma_\tau),$$

де, як і раніше, вважаємо, що $\det F(\tau;\mu_\tau) \neq 0$ і $\det \Omega(\tau;\gamma_\tau) \neq 0$ для всіх $\tau \in \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, операцію усереднення (3.11) на торі $\mathbb{T}_\tau^{n+r}$ можемо записати як

$$\langle g(\varphi_\varepsilon)\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} = \frac{1}{K_\tau} \oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau g(\phi_\tau(\mu_\tau;\gamma_\tau)) \det F(\tau;\mu_\tau),$$

де $K_\tau := \oint_{\sigma_\tau} d\mu_\tau \det F(\tau;\mu_\tau)$. Зокрема, для усереднення величини $\langle \tilde{S}_\tau(\varphi_\varepsilon;\gamma_\varepsilon)\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}}$ в (3.10) можна отримати вираз [11]

$$\left\langle \tilde{S}_\tau(\varphi_\varepsilon;\gamma_\varepsilon) \right\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} =$$

$$= \left\langle \sum_{j=1}^{n+r} \int_{\mu_{j,\tau}^{(0)}}^{\mu_{j,\tau}(\varphi_\tau;\gamma_\tau)} w_{j,\tau}(\lambda;\bar{h}(\gamma_\tau),\bar{\xi}(\gamma_\tau)) \right\rangle^{\mathbb{T}_\tau^{n+r}} = K_\tau^{-1} \sum_{s=1}^{n+r} K_{s,\tau},$$

де для $s = \overline{1, n+r}$ ми поклали

$$K_{s,\tau} := \det \left[\oint_{\sigma_{k,\tau}} d\mu_\tau F_{jk}(\tau;\mu_\tau) \int_{\mu_{k,\tau}^{(0)}}^{\mu_{k,\tau}} d\lambda w_{k,\tau}(\lambda;\bar{h}(\gamma_\tau),\bar{\xi}(\gamma_\tau))(1-\delta_{ks}) \right]_{j,k=\overline{1,n+r}}.$$

З іншого боку, функцію $\Phi_1 : \mathbb{R} \times (\mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r}) \to \mathbb{R}$ можна визначити методом характеристик із другого рівняння (3.9):

$$\Phi_1(t|\varphi_\varepsilon;\gamma_\varepsilon) = \int\limits_0^t H^{(1)}(s|\gamma_\varepsilon)ds -$$

$$-\int\limits_0^t ds \frac{\partial \tilde{S}_\tau(\varphi_\tau^{(0)} + \int_0^s dt\Omega_1(\varepsilon t + \tau_0;\gamma_\tau);\gamma_\varepsilon)}{\partial \tau} + \bar{\Phi}_1(\varphi_\tau^{(0)};\gamma_\varepsilon), \tag{3.12}$$

де

$$\varphi_\tau^{(0)} := \varphi_\tau - \int\limits_0^t ds\Omega_1(\varepsilon s + \tau_0;\gamma_\tau), \tag{3.13}$$

$\tau := \varepsilon t + \tau_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ і $\bar{\Phi}_1 : \mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}$ — деяка довільна гладка функція. При інтегруванні в (3.12) по параметру $s \in [0,t)$ необхідно в остаточному виразі покласти замість величини $\varphi_\tau^{(0)} \in \mathbb{T}_\tau^{n+r}$ її значення (3.13).

Для того щоб відповідні рівняння для кутової змінної $\varphi_\varepsilon \in \Lambda_{\varepsilon,\tau_0}^{n+r}$ при $\varepsilon \to 0$ мали вигляд

$$\frac{d\varphi_\varepsilon}{ds} = \Omega_1(\tau;\gamma_\tau) + O(\varepsilon^2)$$

для всіх $\tau = \varepsilon s + \tau_0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, покладемо, за визначенням, $H^{(1)} = 0$. Тоді, завдяки (3.12), функція $\Phi_1 : \mathbb{R} \times (\mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r}) \to \mathbb{R}$ визначається з точністю до довільної гладкої функції $\bar{\Phi}_1 : \mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}$, причому відповідне рівняння для змінної $\gamma_\varepsilon \in \mathbb{R}^{n+r})$ при $\varepsilon \to 0$ має вигляд

$$\frac{d\gamma_\varepsilon}{ds} = O(\varepsilon^2)$$

для всіх $s \in \mathbb{R}$. Підібравши далі відповідним чином функцію Φ_2: $\mathbb{R} \times (\mathbb{T}_\tau^{n+r} \times \mathbb{R}^{n+r}) \to \mathbb{R}$ в (3.8), можна досягти, що для всіх $s \in \mathbb{R}$ при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{d\varphi_\varepsilon}{ds} = \Omega_1(\tau;\gamma_\tau) + O(\varepsilon^3), \qquad \frac{d\gamma_\varepsilon}{ds} = O(\varepsilon^3),$$

де $\tau = \tau_0 + \varepsilon s \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, і т. д. Це означає, що інваріантний тор $\mathbb{T}_{\tau_0}^{n+r} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r)$ залишається при $\varepsilon \to 0$ стабільним, деформуючись в інваріантний тор $\mathbb{T}_\varepsilon^{n+r} \subset T^*(M \times \mathbb{R}^r)$ з довільним степенем точності, причому рух на ньому залишається квазілінійним із вектором частот $\Omega_1(\tau;\gamma_\tau) \in \mathbb{R}^{n+r}$ для усіх $\tau \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. У розглядуваному випадку гамільтонового потоку (2.1) із функцією Гамільтона осциляторного типу (2.2) при певних обмеженнях алгебраїчного типу на частотні функції $\nu_j : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $j = \overline{1,r}$, які аналогічні обмеженням у роботах [5, 6, 15], встановлено вказану стійкість інваріантного тора при $\varepsilon \to 0$ довільного порядку, що розв'язує адіабатичну проблему стійкості Мельникова – Самойленка. При цьому актуальним є також дослідження адіабатичної стійкості інваріантного тора на основі відомого підходу [14], який узагальнює класичну конструкцію В. К. Мельникова на випадок гіперболічного квазіперіодичного руху і, тим самим, опис необхідних та достатніх умов адіабатичної стійкості в проблемі Мельникова – Самойленка для широкого класу збурень осциляторного типу.

Автор щиро вдячний проф. А. М. Самойленку за корисні поради та обговорення результатів роботи.

1. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической небесной механики. – М.: УРСС, 2002. – 414 с.
2. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – М.: ИКИ, 2002. – 560 с.
3. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.
4. *Abraham R., Marsden J.* Foundations of mechanics. – New York: Commings, 1978. – 414 p.
5. *Мельников В. К.* О некоторых случаях сохранения условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. – 1965. – **165**, № 6. – С. 1245 – 1248.
6. *Мельников В. К.* Об одном семействе условно-периодических решений системы Гамильтона // Там же. – 1968. – **30**, № 5. – С. 3121 – 3133.
7. *Samoilenko A. M.* Perturbation theory of smooth invariant tori of dynamical systems // Nonlinenar Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 1997. – **30**, № 5. – P. 3121 – 3133.
8. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 240 с.
9. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky Ya. A.* A method of investigating adiabatic invariants of slowly perturbed Hamiltonian systems // Nonlinear Oscillations. – 1999. – **2**, № 1. – P. 20 – 28.
10. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Дослідження інваріантних деформацій інтегральних многовидів адіабатично збурених цілком інтегровних гамільтонових систем. II // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – Р. 1513 – 1528.
11. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Алгебраїчно-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **41**. – 236 с.
12. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 244 с.
13. *Graff S. M.* On the conservation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems // J. Different. Equat. – 1974. – **15**, № 1. – P. 1 – 69.
14. *Meyer K. R., Sell G. R.* Melnikov transforms Bernoulli bundles, and almost periodic perturbations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – **314**, № 1. – P. 63 – 105.
15. *Bourgain J.* On Melnikov's persistence problem // Math. Res. Lett. – 1997. – **4**. – P. 445 – 458.
16. *Samoilenko A. M., Prykarpatsky A. K., Samoilenko V. Gr.* The Lyapunov – Schmidt approach to studing homoclinic splitting in weakly perturbed Lagrangian and Hamiltonian systems // Ukr. Math. J. – 2003. – **55**, № 1. – P. 82 – 92.
17. *Prykarpatsky Ya. A., Samoilenko A. M., Blackmore D. L.* Embedding of integral submanifolds and associated adiabatic invariants of slowly perturbed integrable Hamiltonian systems // Rept. Math. Phys. – 1999. – **44**, № 1-2. – P. 171 – 182.
18. *Yamashita M.* Melnikov vector in higher dimension // Nonlinenar Anal.: Theory, Meth. and Appl. – 1992. – **18**, № 7. – P. 657 – 670.
19. *Gruendler J.* The existence of homoclinic orbits and the method of Melnikov for systems in $\mathbb{R}^n$ // SIAM J. Math. Anal. – 1985. – **16**, № 5. – P. 907 – 931.
20. *Самойленко А. М., Прикарпатський Я. А.* Дослідження інваріантних деформацій інтегральних многовидів адіабатично збурених цілком інтегровних гамільтонових систем. I // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1379 – 1390.
21. *Aubry S., Le Deeron P. Y.* The discrete Frenkel – Kontorova model and its extensions. I // Physica D. – 1983. – **8**. – P. 381 – 422.
22. *Herman M. R.* Sur les courbes invariantes par les diffeomorphismes de l'anneau. – Paris: Soc. Math. France, 1983. – Vol. 1. – 221 p.
23. *Katok A.* Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems // Ergodic Theory and Dynam. Syst. – 1982. – **2**, № 2. – P. 185 – 194.
24. *Mather J. N.* Existence of quasi-periodic orbit for twist homeomorphisms of the annulus // Topology. – 1982. – **21**, № 2. – P. 457 – 467.
25. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
26. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
27. *Прикарпатський Я. А.* Симплектичний метод побудови ергодичних мір на інваріантних підмноговидах неавтономних гамільтонових систем: лагранжеві многовиди, їх структура та гомології Мазера // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 5. – С. 675 – 691.

28. *Фоменко А. Т.* Симплектическая геометрия. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 414 с.
29. *Wiggins S.* Global dynamics, phase space transport, orbits homoclinic, and applications. – New York: Amer. Math. Soc., 1993. – 155 p.
30. *Prykarpatsky Ya. A., Samoilenko A. M., Blackmore D. L., Prykarpatsky A. K.* Integrability by quadratures of Hamiltonian systems and Picard – Fuchs type equations: The modern differential-geometric aspects // Miskolc Math. Notes. – 2005. – **6**, № 1. – P. 65 – 103.
31. *Ниренберг Л.* Нелинейный функциональный анализ. – М.: Мир, 1986. – 232 с.
32. *Schwartz J. T.* Nonlinear functional analysis. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1969. – 236 p.
33. *Красносельский М. А., Опойцев В. И.* Теорема о глобальном гомеоморфизме // Теория функций, функцион. анализ и его прил. – 1978. – **20**. – С. 83 – 85.
34. *Самойленко А. М., Петришин Р. І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 473 с.
35. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 431 с.
36. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. – М.: Мир, 1973. –127 с.
37. *Мозер Ю.* Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 109 – 151.
38. *Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н., Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. – Киев: Наук. думка, 1987. – 267 с.
39. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
40. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Метод усреднения в многочастотных системах с медленно меняющимися параметрами // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 4. – С. 453 – 501.
41. *Russmann H.* Invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems // Regular and Chaotic Dynamics. – 2001. – **6**, № 2. – P. 119 – 204.
42. *Russmann H.* Addendum to invariant tori in non-degenerate nearly integrable Hamiltonian systems // Ibid. – 2005. – **10**, № 1. – P. 21 – 32.

Одержано 15.12.2004,
після доопрацювання — 15.12.2005