УДК 517.948

П. І. Каленюк, канд. фіз.-мат. наук (Львів. політехн. ін-т),
З. М. Нитребич, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Схема відокремлення змінних для матричного білінійного функціонального рівняння та її застосування

Наведено необхідні та достатні умови розв'язності матричного білінійного функціонального рівняння, які використані для побудови розв'язків систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Приведены необходимые и достаточные условия разрешимости матричного билинейного функционального уравнения, которые использованы для построения решений систем уравнений в частных производных.

Знаходження точних розв'язків для досить великого класу систем диференціальних рівнянь з частинними похідними пов'язано із знаходженням розв'язків систем білінійних функціональних рівнянь вигляду

$$\sum_{k=1}^{n_s} f_k^s(x)\, g_k^s(y) = 0, \quad s = \overline{1, m}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n_s} f_k^s(x)\, g_k^s(y) + R^s(x, y) = 0, \quad s = \overline{1, m}, \tag{2}$$

де $n_s \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, \ldots, x_\sigma) \in \mathbb{R}^\sigma$, $y = (y_1, \ldots, y_\varkappa) \in \mathbb{R}^\varkappa$, $f_k^s(x)$, $g_k^s(y)$, $k = \overline{1, n_s}$; $s = \overline{1, m}$,— невідомі функції незалежних змінних $x_1, \ldots, x_\sigma$, $y_1, \ldots, y_\varkappa$; $R^s(x, y)$ — задані функції відокремленого вигляду

$$R^s(x, y) = \sum_{k=1}^{\nu_s} R_k^{1s}(x)\, R_k^{2s}(y). \tag{3}$$

В п. 1 статті сформульовані необхідні та достатні умови розв'язності систем білінійних функціональних рівнянь вигляду (1) та (2) (теореми 1 та 2), які по суті дають певну схему відокремлення змінних для систем білінійних рівнянь. На основі цих результатів у наступних пунктах показано спосіб використання схеми для побудови окремих розв'язків деяких загальних систем диференціальних рівнянь, а потім на прикладі конкретної системи диференціальних рівнянь (яка як частковий випадок включає в себе систему рівнянь Дірака) вказано алгоритм побудови розв'язку відповідної задачі Коші.

1. Означення 1. *Розв'язком системи* (1) ((2)) *в області* $G_1 \times G_2 \subset \mathbb{R}^\sigma \times \mathbb{R}^\varkappa$ *будемо називати довільні системи функцій* $f_k^s(x)$, $g_k^s(y)$, $s = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, n_s}$, *визначених в* G_1 *і* G_2 *відповідно, які задовольняють кожне рівняння системи* (1) ((2)) *тотожно по* $(x, y) \in G_1 \times G_2$.

Питання побудови розв'язків одного однорідного білінійного рівняння вивчалося в роботах [1, 2]. Найбільш загальний результат для одного білінійного рівняння, а також для системи білінійних рівнянь (1) та (2) одержано в роботі [3]. Однак в останньому фактично не враховано зв'язки між окремими рівняннями систем (1) і (2). Врахування останніх дає можливість сформулювати потрібний результат в більш оптимальній формі з обчислювальної точки зору.

Сформулюємо припущення відносно систем (1) та (2), яке забезпечить зв'язок між її окремими рівняннями. Припустимо, що задано два розбиття множини індексів

$$S = \{(s, k) \in \mathbb{N}^2 \mid s = \overline{1, m};\ k = \overline{1, n_s}\}: S = \bigcup_{p=1}^{l_1} S_p^1, \quad S = \bigcup_{q=1}^{l_2} S_q^2,$$

де $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$, $l_1, l_2 \leqslant \sum_{s=1}^{m} n_s$; $S_p^i \cap S_q^i = \varnothing$ при $p \neq q$, $i = 1, 2$. Будемо вважати, що всі функції $f_j^i(x)$, для яких (i, j) належить до однієї і тієї самої підмножини S_p^1 при деякому $p \in \{1, 2, \ldots, l_1\}$, рівні між собою, аналогічно всі функції $g_j^i(y)$, для яких (i, j) належить до однієї і тієї самої S_q^2 при деякому $q \in \{1, 2, \ldots, l_2\}$, рівні між собою.

Взявши до уваги зв'язки між окремими рівняннями, системи (1) та (2) можна подати відповідно у вигляді

$$F^\tau(x)\, G(y) = O_{m,k}, \tag{4}$$

$$F^\tau(x)\, G(y) + R_1^\tau(x)\, R_2(y) = O_{m,k}\,, \tag{5}$$

де $F(x)$, $G(y)$ — ненульові матриці розмірів $n \times m$ і $n \times k$, залежні лише від параметрів x та y відповідно; $O_{m,k}$ — нуль-матриця розміру $m \times k$; $m, k, n \in \mathbb{N}$, τ — символ транспонування.

Для того щоб сформулювати необхідні та достатні умови (теореми 1 і 2), при яких матриці $F(x)$ і $G(y)$ є розв'язками матричних білінійних рівнянь (4) і (5), нам потрібна додаткова побудова.

Нехай $i^r = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ та $j^r = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-r})$ — цілочислові вектори з $\mathbb{N}^r$ та $\mathbb{N}^{n-r}$ відповідно, координати яких задовольняють наступні умови:

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n, \quad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_{n-r} \leqslant n \tag{6}$$

$(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{n-r})$ — переставлення набору $(1, 2, \ldots, n)$, $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $i^0 = j^n = \varnothing$.

Зауважимо, що із співвідношень (6) випливає, що набір i^r однозначно визначає набір j^r і навпаки. Побудуємо матрицю $C(i^r) = \| c_{ls}(i^r) \|_{l,s=\overline{1,n}}$, що відповідає наборам i^r та j^r (в силу останнього зауваження позначаємо залежність лише від i^r) за правилом

$$c_{ts}(i^r) = \delta_{si_t}, \quad t = \overline{1, r},$$

$$c_{r+p,s}(i^r) = \delta_{sj_p}, \quad p = \overline{1, n-r},$$

де δ_{st} — символ Кронекера.

Легко переконатися, що справедлива така лема.

Л е м а 1. *Матриця $C(i^r)$ — ортогональна, тобто*

$$C(i^r)\, C^\tau(i^r) = E_n,$$

де E_n — одинична матриця розміру $n \times n$.

Надалі нам потрібне буде розбиття матриці $C(i^r)$ на блоки

$$C(i^r) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

де C_1, C_2 — матриці розмірів $r \times n$ і $(n-r) \times n$ відповідно. Згідно з лемою 1 маємо

$$C_1^\tau C_1 + C_2^\tau C_2 = E_n. \tag{7}$$

Зауважимо при цьому, що матриці $C(i^0)$ та $C^n(i\ )$ вироджуються відповідно у C_2 та C_1.

Т е о р е м а 1. *Нехай матриці $F(x)$ та $G(y)$ задовольняють матричне білінійне рівняння (4). Тоді існує $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, набір i^r, постійна матриця Λ розміру $(n-r) \times r$ такі, що $F(x)$ та $G(y)$ задовольняють системи алгебраїчних рівнянь*

$$(-\Lambda \mid E_{n-r})\, C(i^r)\, F(x) = O_{n-r,m},$$

$$(E_r \mid \Lambda^\tau)\, C(i^r)\, G(y) = O_{r,k}. \tag{8}$$

Навпаки, для довільного $r \in \{0, 1, \ldots, n\}$, набору i^r, постійної матриці Λ розміру $(n - r) \times r$ розв'язки $F(x)$, $G(y)$ системи (8) *задовольняють матричне білінійне рівняння* (4).

Доведення. Перш ніж доводити теорему, зробимо пояснення. У випадку, коли $r=0$ і $r=n$ системи (8) вироджуються відповідно у системи $E_nC(i^0)F(x) = O_{n,m}$, $G(y)$ — довільна матриця та $E_nC(i^n)G(y) = O_{n,k}$, $F(x)$ — довільна матриця, що означає рівність тотожно нулю матриць $F(x)$ у випадку $r=0$ та $G(y)$ у випадку $r=n$.

Нехай матриці $F(x)$ та $G(y)$ задовольняють рівняння (4). Якщо хоч одна з них тотожно рівна нулеві, то в силу попередніх зауважень матриці $F(x)$ та $G(y)$ задовольнятимуть систему (8), у якої $r=0$ або $r=n$. Припустимо, що матриці $F(x)$ та $G(y)$ тотожно відмінні від нуля. Позначимо через $F_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, i-й стовпець матриці $F^\tau(x)$. Оскільки $F(x) \not\equiv O_{n,m}$ і $G(y) \not\equiv O_{n,k}$, то існують r, $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, максимально лінійно незалежних рядків $F^\tau_{i_1}(x), \ldots, F^\tau_{i_r}(x)$, причому $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant n$. З цього твердження випливає, що існує постійна матриця Λ розміру $(n-r)\times r$ така, що

$$(F_{j_1}(x) | \ldots | F_{j_{n-r}}(x))^\tau = \Lambda (F_{i_1}(x) | \ldots | F_{i_r}(x))^\tau. \tag{9}$$

Рівність (9) по суті співпадає з першим співвідношенням системи (8). Залишається довести, що матриця $G(y)$ задовольняє друге співвідношення системи (8). Справді, згідно з лемою 1 та рівністю (9) справедливий ланцюжок рівностей

$$O_{m,k} = F^\tau(x)G(y) = F^\tau(x)C^\tau(i^r)C(i^r)G(y) =$$

$$= (F_{i_1}(x) | \ldots | F_{i_r}(x) | F_{j_1}(x) | \ldots | F_{j_{n-r}}(x))\ C(i^r)G(y) =$$

$$= (F_{i_1}(x) | \ldots | F_{i_r}(x) | (F_{i_1}(x) | \ldots | F_{i_r}(x))\ \Lambda^\tau)\,C(i^r)G(y) =$$

$$= (F_{i_1}(x) | \ldots | F_{i_r}(x))(E_r | \Lambda^\tau)\,C(i^r)G(y).$$

В силу лінійної незалежності стовпців $F_{i_k}(x)$, $k = \overline{1, r}$, одержуємо

$$(E_r \mid \Lambda^\tau)C(i^r)G(y) = O_{r,k}.$$

Навпаки, для $r=0$ і $r=n$ розв'язки системи (8), очевидно, задовольняють матричне білінійне рівняння (4). Нехай тепер $F(x)$ та $G(y)$ — нетривіальні розв'язки системи (8), а тому $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Використовуючи розбиття матриці $C(i^r)$ на блоки, систему (8) можна записати так:

$$F^\tau(x)C_1^\tau\Lambda^\tau = F^\tau(x)C_2^\tau, \quad C_1G(y) = -\Lambda^\tau C_2G(y). \tag{10}$$

З використанням співвідношень (10) та рівності (7) одержуємо

$$F^\tau(x)G(y) = F^\tau(x)(C_1^\tau C_1 + C_2^\tau C_2)G(y) =$$

$$= F^\tau(x)C_1^\tau C_1G(y) + F^\tau(x)C_2^\tau C_2G(y) =$$

$$= F^\tau(x)C_1^\tau(-\Lambda^\tau C_2G(y)) + (F^\tau(x)C_1^\tau\Lambda^\tau)C_2G(y) = O_{m,k}.$$

А це означає, що матриці $F(x)$ і $G(y)$ задовольняють матричне білінійне рівняння (4). Теорема доведена.

Розглянемо тепер неоднорідне матричне білінійне рівняння (5) з відмінним від тотожного нуля вільним членом. Запишемо його у вигляді

$$(F^\tau(x) | R_1^\tau(x))\begin{pmatrix} G(y) \\ R_2(y) \end{pmatrix} = O_{m,k}, \tag{11}$$

який нагадує запис (4), де $F^\tau(x)$ замінено матрицею $F^\tau(x) \mid R_1^\tau(x))$ розміру $m \times (n+j)$, а $G(y)$ — матрицею $(G(y)/R_2(y))$ розміру $(n+j) \times k$.

Теорема 2. *Нехай матриці $F(x)$ та $G(y)$, не рівні тотожно нульовій матриці для всіх x і y, задовольняють матричне білінійне рівняння*

(11). *Тоді для деякого набору* i^r, $r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, *і деяких постійних матриць* Λ_1 *і* Λ_2 *розмірів* $(n-r) \times r$ *і* $(n-r) \times j$ *відповідно матриці* $F(x)$ *та* $G(y)$ *задовольняють систему алгебраїчних рівнянь:*

$$\begin{gathered}(-\Lambda_1 \mid E_{n-r})\, C(i^r)\, F(x) = \Lambda_2 R_1(x),\\ (E_r \mid \Lambda_1^{\tau})\, C(i^r)\, G(y) = O_{r,k},\\ (O_{j,r} \mid \Lambda_2^{\tau})\, C(i^r)\, G(y) = R_2(y).\end{gathered} \tag{12}$$

Навпаки, для довільних $r = \overline{1, n-1}$, *набору* i^r *та постійних матриць* Λ_1 *та* Λ_2 *розмірів* $(n-r) \times r$ *і* $(n-r) \times j$ *розв'язки* $F(x)$ *і* $G(y)$ *системи алгебраїчних рівнянь* (12) *задовольняють матричне білінійне рівняння* (11).

Доведення, очевидно, випливає з теореми 1.

2. Нехай оператор $L = (L_{sk})$, $s = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, h}$, визначений на деякій множині $D(L)$ вектор-функцій

$$U(x, y) = (U_1(x, y), \ldots, U_h(x, y))^{\tau}$$

змінних $x = (x_1, \ldots, x_\sigma) \in \mathbb{R}^\sigma$, $y = (y_1, \ldots, y_\varkappa) \in \mathbb{R}^\varkappa$ і

$$LU(x, y) = \Big(\sum_{k=1}^{h} L_{1k} U_k(x, y), \ldots, \sum_{k=1}^{h} L_{mk} U_k(x, y)\Big)^{\tau}.$$

Означення 2. *Будемо говорити, що оператор* L *допускає відокремлення змінних в системі координат* (x, y) *на множині* $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^\sigma \times \mathbb{R}^\varkappa$, *якщо існують сукупності операторів* $L^i_{sk,x}$, $L^i_{sk,y}$ $(s = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, h}$; $i = \overline{1, \theta_{sk}}$, $\theta_{sk} \in \mathbb{N})$ *такі, що* $L^i_{sk,x}$ *залежать лише від змінної* $x \in \Omega_1$, $L^i_{sk,y}$ *залежать лише від змінної* $y \in \Omega_2$ *і функціональна невироджена в* Ω *матриця* $l(x, y)$ *розміру* $m \times m$ *така, що для всіх вектор-функцій відокремленого вигляду*

$$U(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{l} X_{1i}(x) Y_{1i}(y), \ldots, \sum_{i=1}^{l} X_{hi}(x) Y_{hi}(y)\Big)^{\tau} \tag{13}$$

в області визначення оператора L *виконується рівність*

$$\begin{gathered}l(x, y)\, LU(x, y) = \Big(\sum_{k=1}^{h} \sum_{i=1}^{\theta_{1k}} L^i_{1k,x}(X_{k1}(x), \ldots, X_{kl}(x)) \times \\ \times L^i_{1k,y}(Y_{k1}(y), \ldots, Y_{kl}(y)), \ldots, \sum_{k=1}^{h} \sum_{i=1}^{\theta_{mk}} L^i_{mk,x}(X_{k1}(x), \ldots \\ \ldots X_{kl}(x))\, L^i_{mk,y}(Y_{k1}(y), \ldots, Y_{kl}(y))\Big)^{\tau}.\end{gathered}$$

Прикладом оператора, що допускає відокремлення змінних, є диференціальний оператор $L = (L_{sk})_{s=\overline{1,m};k=\overline{1,h}}$, у якого оператори L_{sk} мають вигляд

$$L_{sk} = \sum_{|i+j| \leq n} \Big(\sum_{p=1}^{l_{ij}} a^p_{ijsk}(x_1, \ldots, x_\sigma)\, b^p_{ijsk}(y_1, \ldots, y_\varkappa) \times \frac{\partial^{i+j}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_\sigma^{i_\sigma} \partial y_1^{j_1} \ldots \partial y_\varkappa^{j_\varkappa}}.$$

Розглянемо для оператора L, що допускає відокремлення змінних, однорідне рівняння

$$LU(x, y) = O_{h,1} \tag{14}$$

та відповідне йому неоднорідне рівняння

$$LU(x, y) + R(x, y) = O_{h,1}, \tag{15}$$

де вільний член $R(x, y) = (R^1(x, y), \ldots, R^m_{\,}(x, y))^{\tau}$ — відома вектор-функція, причому $R^s(x, y)$, $s = \overline{1, m}$, мають вигляд (3).

Підставивши функції вигляду (13) в рівняння (14) та (15), одержимо відповідно системи білінійних функціональних рівнянь, які слід записати у вигляді матричних рівнянь (4) та (5). Скориставшись теоремами 1 та 2, можна виписати всі «відокремлені» системи операторних рівнянь, зв'язаних між собою параметрами відокремлення.

Зауважимо, що у випадку багатьох змінних ($\sigma, \varkappa > 1$) для деяких класів рівнянь змінні можна відокремити повністю, що у випадку диференціальних систем приводить до систем звичайних диференціальних рівнянь, зв'язаних між собою лише параметрами.

Означення 3. *Будемо говорити, що вектор-функція* $U(z) = (U_1(z), \dots, U_h(z))^{\tau}$ *змінних* $z_1 = (z_1 \dots, z_r) \in \mathbb{R}^r$ *допускає повне відокремлення змінних, якщо її компоненти допускають повне відокремлення змінних, тобто якщо* $U(z)$ *можна подати у вигляді*

$$U(z) = \Big(\sum_{i=1}^{l} \prod_{j=1}^{r} Z^1_{ij}(z_j), \dots, \sum_{i=1}^{l} \prod_{j=1}^{r} Z^h_{ij}(z_j) \Big)^{\tau}. \tag{16}$$

Означення 4. *Будемо говорити, що оператор* $L = (L_{sk})$, $s = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, h}$, *визначений на деякій множині* $D(L)$ *вектор-функцій змінних* $z_1, \dots, z_r$, *допускає повне відокремлення змінних в системі координат* $(z_1, \dots, z_r)$ *на множині* $\Omega = \Omega_1 \times \dots \Omega_r \subseteq \mathbb{R}^r$, *якщо існують сукупності операторів* $L_{sk,ij}$ ($s = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, h}$; $j = \overline{1, r}$; $i = \overline{1, \theta_{sk}}$; $\theta_{sk} \in \mathbb{N}$) *таких, що при кожному фіксованому* j *оператори* $L_{sk,ij}$ *залежать лише від змінної* $z_j \in \Omega_j \subseteq \mathbb{R}$ *і функціональна невироджена в* Ω *матриця* $l(z)$ *розміру* $m \times m$ *така, що для всіх вектор-функцій вигляду* (16) *з області визначення оператора* L *виконується рівність*

$$l(z)\, LU(z) = (f^1(z), \dots, f^m(z))^{\tau}, \tag{17}$$

де $f^s(z) = \sum_{k=1}^{h} \sum_{i=1}^{\theta_{sk}} \prod_{j=1}^{r} L_{sk,ij}(Z^k_{1j}(z_j), \dots, Z^k_{lj}(z_j))$, $s = \overline{1, m}$.

Як приклад оператора, що допускає повне відокремлення змінних, наведемо оператор $L = (L_{sk})$, $s = \overline{1, m}$; $k = \overline{1, h}$, де

$$L_{sk} = \sum_{|\alpha| \le n_{sk}} A^{\alpha}_{sk}(z) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_r^{\alpha_r}}, \quad n_{sk} \in \mathbb{N}.$$

а функції $A^{\alpha}_{sk}(z)$ допускають повне відокремлення змінних.

Нехай тепер в системах

$$LU(z) = O_{m,1}, \tag{18}$$

$$LU(z) + R(z) = O_{m,1}, \tag{19}$$

де $R(z) = \Big(\sum_{i=1}^{\gamma_1} \prod_{j=1}^{r} R^1_{ij}(z_j), \dots, \sum_{i=1}^{\gamma_m} \prod_{j=1}^{r} R^m_{ij}(z_j) \Big)^{\tau}$ — відома вектор-функція, оператор L допускає повне відокремлення змінних.

Позначимо через $x = z_1$, $y = (z_2, \dots z_r)$,

$$L^i_{sk,y} = \prod_{j=2}^{r} L_{sk,ij}(Z^k_{1j}(z_j), \dots, Z^k_{lj}(z_j)),$$

$$L^i_{sk,x}(x) = L_{sk,i1}(Z^k_{11}(z_1), \dots, Z^k_{l1}(z_1)).$$

Тоді при підстановці (16) у (18) ((19)) згідно з (17) одержимо білінійну функціональну систему вигляду (1) ((2)). Використовуючи результати п. 1, можна відокремити змінну z_1. При цьому системи, які містять змінні $z_2, \dots, z_r$, знову будуть мати вигляд (1) ((2)). Продовжуючи цей процес, ми зможемо відокремити змінні $z_1, \dots, z_r$ повністю.

Розглянемо тепер рівняння (14) більш конкретного вигляду

$$(E_h \otimes L_x - M_y) U(x, y) = O_{h,1}, \tag{20}$$

де $U(x, y) = (U_1(x, y), \ldots, U_h(x, y))^\tau$, L_x — диференціальний оператор, що діє лише по змінній x, M_y — матриця розміру $h \times h$, елементи якої є диференціальними операторами, що діють лише по змінній y, $\otimes$ — символ тензорного добутку.

Будемо шукати розв'язок системи (20) у вигляді

$$U(x, y) = Y(y) X(x), \tag{21}$$

де $Y(y)$ — невідома матриця розміру $h \times t$, залежна лише від змінної y, $X(x)$ — невідомий вектор-стовпець ($t \times 1$), залежний лише від x. При підстановці вектор-функції вигляду (21) в систему диференціальних рівнянь (20) одержуємо рівняння

$$(-M_y Y(y) \mid Y(y)) \begin{pmatrix} X(x) \\ (E_t \otimes L_x) X(x) \end{pmatrix} = O_{h,1}, \tag{22}$$

яке по суті має вигляд матричного білінійного рівняння (4), у якого

$$F(x) = \begin{pmatrix} X(x) \\ (E_t \otimes L_x) X(x) \end{pmatrix}, \quad G(y) = (-M_y Y(y) \mid Y(y))^\tau. \tag{23}$$

На основі теореми 1 одержуємо такий результат.

Теорема 3. *Нехай вектор-функція $U(x, y)$ вигляду* (21) *є розв'язком системи диференціальних рівнянь* (20). *Тоді існує $r \in \{0, 1, \ldots, 2t\}$, постійна матриця Λ розміру $(2t - r) \times r$ такі, що матриці $F(x)$ та $G(y)$ вигляду* (23) *задовольняють систему*

$$\begin{gathered} (-\Lambda \mid E_{2t-r}) C(i^r) F(x) = O_{2t-r,1}, \\ (E_r \mid \Lambda^\tau) C(i^r) G(y) = O_{r,h}. \end{gathered} \tag{24}$$

Навпаки, для довільного $r \in \{0, 1, \ldots, 2t\}$, набору i^r, постійної матриці Λ розміру $(2t - r) \times r$ розв'язки $X(x)$, $Y(y)$ системи (24) *визначають за формулою* (21) *розв'язок рівняння* (20).

Розглянемо одну з систем (24) при $r = t$, $i^r = (1, 2, \ldots, t)$:

$$\begin{gathered} (E_t \otimes L_x) X(x) = \Lambda X(x), \\ M_y Y(y) = Y(y) \Lambda, \end{gathered} \tag{25}$$

де Λ — довільна постійна матриця розміру $t \times t$. Легко показати (див., наприклад, [4]), що в системі (25), не зменшуючи загальності, можна вважати, що Λ — жорданова клітина вигляду $\| \lambda \delta_{ij} + \delta_{i,j+1} \|_{i,j=\overline{1,t}}$, λ — довільний параметр. Тоді систему (25) можна записати у вигляді

$$\begin{gathered} L_x X_i = \lambda X_i + (1 - \delta_{it}) X_{i+1}, \\ M_y Y_i = \lambda Y_i + (1 - \delta_{i1}) Y_{i-1}, \quad i = \overline{1, t}, \end{gathered} \tag{26}$$

де Y_i — i-й стовбець матриці $Y(y)$, X_i — i — компонента вектор-стовбця $X(x)$. Остання система означає, що X_t — власна функція, а $X_{t-1}, \ldots, X_1$ — приєднані функції оператора L_x, тоді як Y_1 — власна вектор-функція оператор-матриці M_y, а $Y_2, \ldots, Y_t$ — приєднані до неї вектор-функції.

Очевидно, що розв'язки системи диференціальних рівнянь (26) залежать від параметра λ:

$$X_i = X_i(x, \lambda), \quad Y_i = Y_i(y, \lambda), \quad i = \overline{1, t}.$$

Припустивши, що $X_t(x, \lambda)$ та $Y_1(y, \lambda)$ — розв'язки відповідного рівняння та системи рівнянь

$$L_x X_t(x, \lambda) = \lambda X_t(x, \lambda), \quad M_y Y_1(y, \lambda) = \lambda Y_1(y, \lambda),$$

знаходимо розв'язок системи (26) за формулами

$$X_i(x, \lambda) = \frac{1}{(t-i)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{t-i} X_t(x, \lambda),$$

$$Y_{i+1}(y, \lambda) = \frac{1}{i!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{i} Y_1(y, \lambda), \quad i = \overline{1, t-1}.$$

Отже, шуканий розв'язок системи (20) вигляду (21) можна подати таким чином:

$$U(x, y) = \frac{1}{(t-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^{t-1} [X_t(x, \lambda)\, Y_1(y, \lambda)].$$

Зауважимо, що в квадратних дужках останнього виразу міститься розв'язок системи (20) класично відокремленого вигляду. Одержаний результат дає підставу сподіватися, що справедлива і більш загальна теорема.

Т е о р е м а 4. *Нехай $U(x, y, \lambda)$ — розв'язок системи диференціальних рівнянь (20) відокремленого вигляду, λ — параметр відокремлення, R_λ — довільний оператор, що діє за змінними x, y і параметром відокремлення λ. Якщо при всіх λ оператор $E_h \otimes R_\lambda$ переставний з оператором $E_\lambda \otimes L_x - M_y$ і $R_\lambda(0) = 0$, то результат дії оператора $E_h \otimes R_\lambda$ на розв'язок $U(x, y, \lambda)$ системи (20) також є розв'язком системи рівнянь (20).*

Д о в е д е н н я. Нехай $U(x, y, \lambda)$ — розв'язок системи рівнянь (20) відокремленого вигляду, де λ — параметр відокремлення, і R_λ — оператор, описаний в умовах теореми. Тоді

$$(E_h \otimes L_x - M_y)(E_h \otimes R_\lambda)\, U(x, y, \lambda) =$$
$$= (E_h \otimes R_\lambda)(E_h \otimes L_x - M_y)\, U(x, y, \lambda) = (E_h \otimes R_\lambda)\, O_{h,1} = O_{h,1}.$$

Теорема доведена.

Н а с л і д о к. *Якщо R_λ — лінійний оператор, що діє лише по параметру відокремлення λ, а $U(x, y, \lambda)$ — розв'язок системи (20) відокремленого вигляду, то $(E_h \otimes R_\lambda)\, U(x, y, \lambda)$ — також розв'язок цієї системи.*

3. В попередніх роботах авторів на основі узагальненого методу відокремлення змінних було запропоновано новий ефективний метод побудови розв'язків деяких багатоточкових задач [5] та задачі Коші для одного диференціального рівняння з частинними похідними [6]. В даному пункті вкажемо аналогічний спосіб побудови розв'язку задачі Коші

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} = M\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) U(x, y), \tag{27}$$

$$U(0, y) = \Phi(y), \tag{28}$$

де

$$U(x, y) = (U_1(x, y), \ldots, U_h(x, y))^\tau, \quad \Phi(y) = (\Phi_1(y), \ldots, \Phi_h(y))^\tau,$$

$M\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ — матриця, оператор-елементами якої є диференціальні оператори $m_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $i, j = \overline{1, h}$, з постійними коефіцієнтами та цілими символами $m_{ij}(\lambda)$, порядок зростання яких не перевищує $p \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$. Очевидно, що система (27) частинний випадок системи (20).

Введемо в розгляд такі класи функцій:

A — клас аналітичних в $\mathbb{R}$ функцій;

A_p — клас функцій $\varphi(x) \in A$, які допускають для достатньо великих $|x|$ оцінку

$$|\varphi(x)| \leqslant c \exp[\alpha |x|^p], \tag{29}$$

де $c, \alpha, p \in \mathbb{R}_+$;

Γ — клас функцій $\varphi(x) \in A$, які допускають для досить великих $|x|$ і деякого $p \in \mathbb{R}_+$ оцінку (29);

$$D_p = \begin{cases} A_{p'-\varepsilon}, \quad p' = p/(p-1), \quad \varepsilon > 0, \quad 1 < p < \infty; \\ \Gamma, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p = 1, \\ A, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leqslant p < 1; \\ A_1, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p = \infty. \end{cases} \tag{30}$$

Позначимо через $p_0 \leqslant p$ так званий зведений порядок системи (27), який значно точніше характеризує властивості системи, ніж її звичайний порядок (максимальний з порядків диференціальних операторів, що входять в матрицю $M(\partial/\partial y)$). Зведений порядок є в деякому розумінні істинний порядок і, як показано в роботі [7], довільну систему з (цілим) зведеним порядком p_0 можна звести до системи, у якої звичайний порядок буде рівний p.

Теорема 5. *Нехай для всіх* $i = \overline{1, h}$ $\Phi_i(y)$ *належать множині* D_{p_0}, *що визначається рівністю* (30). *Тоді в класі вектор-функцій, компоненти яких при кожному фіксованому* $t \geqslant 0$ *належать* D_{p_0}, *існує єдиний розв'язок задачі* (27), (28), *який можна подати у вигляді*

$$U(x, y) = \left\{\varphi^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\{\exp[M(\lambda)x + \lambda E_h y]\}^\tau\right\}^\tau\Bigg|_{\lambda=0}. \tag{31}$$

Доведення. Той факт, що $U(x, y)$ вигляду (31) задовольняє систему рівнянь (27), випливає з наслідку теореми 4. Крім того, очевидно, що функція $U(x, y)$ вигляду (31) задовольняє початкові умови (28). Далі для доведення теореми слід зауважити, що порядок зростання елементів матриці $\exp[M(\lambda)x]$ по λ не перевищує p_0-зведений порядок системи (27).

Припустивши, що $\Phi_i(y)$ — аналітичні в $\mathbb{R}$ функції, визначаємо для них оператори безмежного порядку шляхом формальної заміни y на $\partial/\partial\lambda$. Для збіжності одержаних рядів в (31) досить вимагати [8], щоб $\Phi_i(y) \in D_{p_0}$ для $i = \overline{1, h}$, де D_{p_0} — множина вигляду (30).

З формули (31) розв'язку задачі (27), (28) видно, що як тільки $\Phi_i(y) \in D_{p_0}$, $i = \overline{1, h}$, то розв'язком задачі буде вектор-функція, компоненти якої при фіксованому $t \geqslant 0$ належать D_{p_0}. А тому клас таких вектор-функцій є класом існування розв'язку задачі Коші (27), (28). Крім того, відомо [9], що згаданий вище клас вектор-функцій є класом єдиності розв'язку задачі Коші. Теорема доведена.

Зауваження. Для випадку кількох просторових змінних ($y = (y_1, \ldots, y_s) \in \mathbb{R}^s$) у задачі (27), (28), її розв'язок матиме вигляд

$$U(x, y) = \left\{\Phi^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\{\exp[M(\lambda)x + E_h\lambda \cdot y]\}^\tau\right\}^\tau\Bigg|_{\lambda=0}, \tag{32}$$

де $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{C}^s$, $\lambda \cdot y = \sum_{i=1}^{s} \lambda_j y_i$, $\frac{\partial}{\partial\lambda} = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\lambda_s}\right)$.

Приклад. Розглянемо задачу Коші для системи рівнянь Дірака, тобто задачу (27), (28), у якої $y = (y_1, y_2, y_3)$, $h = 4$,

$$M\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \begin{pmatrix} -imE_2 & D \\ D & imE_2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} -\frac{\partial}{\partial y_3} & -\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2} \\ -\frac{\partial}{\partial y_1} - i\frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \end{Vmatrix}.$$

На основі формули (32) одержуємо наступне зображення розв'язку задачі Коші:

$$U^\tau(x, y) = \Phi^\tau\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\{\exp[M(\lambda)x + E_4\lambda \cdot y]\}^\tau|_{\lambda=0},$$

де $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, $\partial/\partial\lambda = (\partial/\partial\lambda_1, \partial/\partial\lambda_2, \partial/\partial\lambda_3)$.

Одержана формула не зовсім зручна в користуванні, оскільки наявність в ній матричної експоненти не дозволяє явно знайти компоненти $U_i(x,$

y) розв'язку задачі Коші. Однак в даному випадку матричну експоненту можна «розкрити». Легко переконатися, що

$$\exp[M(\lambda)x] = \begin{pmatrix} (H'_x - imH)E_2 & F \\ F & (H'_x + imH)E_2 \end{pmatrix},$$

$$\text{де } H \equiv H(\lambda, x) = \frac{\operatorname{sh}[\sqrt{|\lambda|^2 - m^2}x]}{\sqrt{|\lambda|^2 - m^2}}, \quad |\lambda|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$F \equiv F(\lambda, x) = \begin{pmatrix} -\lambda_3 & -\lambda_1 + i\lambda_2 \\ -\lambda_1 - i\lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} H(\lambda, x).$$

В результаті одержуємо, що компоненти $U_i(x, y)$ шуканого розв'язку виражаються як сума виразів, кожен з яких є результатом дії оператора $\Phi_j(\partial/\partial\lambda)$, $j = \overline{1, 4}$, на цілі функції параметрів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, порядок зростання яких за кожним параметром λ_m, $m = 1, 2, 3$, не вище першого. Це дає підставу стверджувати, що існування і єдиність розв'язку задачі Коші для системи рівнянь Дірака мають місце для довільних аналітичних початкових функцій без жодних обмежень на порядок зростання.

1. *Aczel J.* Sur une classe d'equations fonctioneles bilineaires a plusieurs fonctions inconnues // Publ. Electrotehn. fac. Univ. Beogradu Ser. Mat. i fiz.— 1961.— N 61—64.— P. 12—30.
2. *Martin M. N.* A generalization of the method of separation of variables // J. Ration. Mech. and Anal.— 1953.— 2, N 2.— P. 315—327.
3. *Каленюк П. І., Скоробогатько В. Я.* Якісні методи теорії диференціальних рівнянь.— К.: Наук. думка, 1977.— 123 с.
4. *Каленюк П. И., Нитребич З. Н.* Многопараметрический аналог системы М. В. Келдыша, определяющей цепочки собственных и присоединенных к ним векторов операторных пучков, ассоциированных с операторно-дифференциальными уравнениями // Методы исслед. дифференц. и интегр. операторов.— Киев : Наук. думка, 1989.— С. 80—86.
5. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Побудова розв'язків деяких крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що допускають відокремлення змінних // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями.— Чернівці, 1990.— С. 62—71.
6. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Побудова розв'язку задачі Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними // Вісн. Львів. політехн. ін-ту.— 1991.— № 251.— С. 54—56.
7. *Борок В. М.* Классы единственности решений краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Мат. сб.— 1969.— **79**, № 2.— С. 293—304.
8. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент.— М. : Наука, 1983.— 176 с.
9. *Гельфанд И. М., Шилов Е. Г.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М. : Физматгиз, 1958.— 274 с.

Одержано 02.03.92