К О Р О Т К І П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 519.21

В. О. Коваль (Житомир. технол. ун-т)

ОБМЕЖЕНИЙ ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ МАРТИНГАЛІВ, НОРМОВАНИХ МАТРИЦЯМИ

We investigate a bounded law of the iterated logarithm for matrix-normalized weighted sums of martingale differences in R^d. We consider the normalization by the square roots of matrices inverse to covariance matrices of these sums. We use this result to prove the bounded law of the iterated logarithm for martingales with arbitrary matrix normalization.

Досліджується обмежений закон повторного логарифма для матрично нормованих зважених сум мартингал-різниць в R^d. Розглянуто нормування квадратними коренями з матриць, обернених до коваріаційних матриць цих сум. Даний результат використовується для доведення обмеженого закону повторного логарифма для мартингалів з довільними матричними нормуваннями.

Закон повторного логарифма (ЗПЛ) для матрично нормованих сум незалежних випадкових векторів встановлено в роботі [1]. Для зважених сум багатовимірних мартингал-різниць ЗПЛ у дещо іншій формі, ніж в [1], доведено в [2]. Тут накладались жорсткі обмеження на вагові коефіцієнти. В даній роботі досліджується обмежений ЗПЛ для зважених сум багатовимірних мартингал-різниць, нормованих матрицями. При цьому використовується підхід, запропонований в [1].

Нехай R^d — евклідів простір вектор-стовпців і $(Z_n, n \geq 1)$ — мартингал-різниця в R^d відносно фільтрації $(\mathcal{F}_n, n \geq 1)$. Покладемо

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} D_i Z_i, \quad B_n = \sum_{i=1}^{n} D_i D_i^T, \quad n \geq 1,$$

де $(D_i, i \geq 1)$ — послідовність невипадкових матриць розміру $d \times d$; T — знак транспонування. Зауважимо, що коли $\mathrm{E}\left(Z_n Z_n^T\right) = I$, $n \geq 1$, де I — одинична матриця, то B_n — коваріаційна матриця вектора S_n. Будемо припускати, що при деякому $n_0 \geq 1$ матриця B_{n_0} є невиродженою. Тоді при всіх $n \geq n_0$ визначено обернені матриці B_n^{-1}. Позначимо через $B_n^{-1/2}$ квадратний корінь з B_n^{-1}. Для евклідової норми вектора або матриці використовуємо позначення $\|\cdot\|$, а для визначника матриці A — $|A|$. Покладемо

$$t_n = (\ln_+ \ln_+ \|B_n\|)^{1/2}, \quad n \geq 1, \quad \text{де} \quad \ln_+ x = \ln \max\{x, e\}, \quad x \geq 0.$$

Теорема 1. *Припустимо, що* $\mathrm{E}\|Z_n\|^p < \infty$, $n \geq 1$, *при деякому* $p > 2$ *і виконуються наступні умови*:

$$\sup_{n \geq 1} \left(\mathrm{E}\|Z_n\|^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_{n-1} \right) < \infty \quad \textit{м.н.}; \tag{1}$$

$$\|B_n\| \to \infty, \quad n \to \infty; \tag{2}$$

при деякому $\tau > p - 2$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left\| B_n^{-1/2} D_i Z_i \right\|^p = O\left(\left(t_n^{\tau} \ln \|B_n\| \right)^{-1} \right), \quad n \to \infty. \tag{3}$$

© В. О. КОВАЛЬ, 2006

Тоді

$$\limsup_{n\to\infty} t_n^{-1} \left\| B_n^{-1/2} S_n \right\| < \infty \quad м.н. \tag{4}$$

Доведення. З умови (2) та теореми 3.6.3 [3] випливає, що послідовність $(|B_n|, n \geq 1)$ монотонно зростає до нескінченності. Тому згідно з лемою 3.3 [4] знайдеться строго зростаюча послідовність натуральних чисел $(n_j, j \geq 1)$ така, що

$$2\left|B_{n_j}\right| \leq \left|B_{n_{j+1}}\right| \leq 8\left|B_{n_j+1}\right|, \quad j \geq 1. \tag{5}$$

Будемо припускати (не обмежуючи загальності), що $n_1 \geq n_0$. Згідно з лемою Бореля – Кантеллі для доведення (4) потрібно показати, що

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(\max_{n_j < n \leq n_{j+1}} t_n^{-1} \left\| B_n^{-1/2} S_n \right\| > M \right) < \infty, \tag{6}$$

де M — деяка скінченна майже напевно випадкова величина.

Враховуючи праву нерівність в (5), дістаємо

$$t_{n_j+1} \sim t_{n_{j+1}}, \quad j \to \infty.$$

Тому знайдеться $j_1 \geq 1$ таке, що при всіх $j \geq j_1$

$$t_{n_j+1} > (1/\sqrt{2})\, t_{n_{j+1}}. \tag{7}$$

При всіх $m \leq n$ має місце нерівність [1] (лема 1)

$$\left\| B_m^{-1/2} B_n^{-1/2} \right\| \leq \sqrt{d}\,(|B_n|/|B_m|)^{1/2}.$$

Враховуючи дану нерівність, праву нерівність в (5) та (7), отримуємо

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}\left(\max_{n_j < n \leq n_{j+1}} t_n^{-1} \left\| B_n^{-1/2} S_n \right\| > M \right) \leq \\
&\leq \mathrm{P}\left(\max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \left\| B_n^{-1/2} B_{n_{j+1}}^{1/2} \right\| \max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \left\| B_{n_{j+1}}^{-1/2} S_n \right\| > M\, t_{n_j+1} \right) \leq \\
&\leq \mathrm{P}\left(\sqrt{d}\, 2\sqrt{2} \max_{n_j < n \leq n_{j+1}} \left\| B_{n_{j+1}}^{-1/2} S_n \right\| > (1/\sqrt{2})\, M\, t_{n_{j+1}} \right) \leq \\
&\leq \mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq n_{j+1}} \left\| B_{n_{j+1}}^{-1/2} S_n \right\| > (M/4\sqrt{d})\, t_{n_{j+1}} \right), \quad j \geq j_1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Нехай A_n — будь-який рядок матриці $B_n^{-1/2}$, $n \geq n_0$. Для довільного фіксованого $N \geq n_0$ та $i = 1, 2, \ldots, N$ покладемо

$$U_i = A_N D_i Z_i,$$

$$Y_i = U_i I(|U_i| \leq (1/2t_N)) - \mathrm{E}\left[U_i I(|U_i| \leq (1/2t_N)) \mid \mathcal{F}_{i-1}\right],$$

де $I(\cdot)$ — індикатор випадкової події.

Розглянемо одновимірний мартингал $\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i,\ 1 \leq n \leq N \right)$ відносно фільтрації $(\mathcal{F}_n, 1 \leq n \leq N)$. Оскільки це мартингал з нульовим середнім та $|Y_i| \leq 1/t_N$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то, використовуючи відповідну нерівність Колмогорова (див., наприклад, [5, с. 209]), для будь-якого $\alpha > 0$ та $\lambda > 0$ такого, що $\lambda \leq t_N$, маємо

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} Y_i \right| > \frac{\lambda}{2}\left(1 + \frac{\lambda}{t_N}\right) \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\left(Y_i^2 \mid \mathcal{F}_{i-1}\right) + \alpha \right) \leq 2e^{-\alpha\lambda}. \tag{9}$$

Згідно з умовою (1) випадкові величини $\mathrm{E}\left(\|Z_i\|^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}\right)$, $i \geq 1$, обмежені скінченною майже напевно випадковою величиною L. Тоді

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\left(Y_i^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}\right) \leq \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\left[(A_N D_i Z_i)^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}\right] \leq \sum_{i=1}^{N} \|A_N D_i\|^2 \mathrm{E}\left(\|Z_i\|^2 \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}\right) \leq$$

$$\leq L \sum_{i=1}^{N} \left\| B_N^{-1/2} D_i \right\|^2 = L \operatorname{tr}\left(B_N^{-1/2} \sum_{i=1}^{N} D_i D_i^T B_N^{-1/2} \right) = Ld,$$

де $\operatorname{tr}(\cdot)$ — слід матриці.

Враховуючи дану нерівність, а також покладаючи в (9) $\lambda = t_N$, $\alpha = 2t_N$ і позначаючи $M' = Ld + 2$, отримуємо

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} Y_i \right| > M' t_N \right) \leq 2\exp\left(-2t_N^2\right). \tag{10}$$

Покладемо

$$\overline{Y}_i = U_i - Y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Враховуючи, що $\mathrm{E}\left(U_i \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}\right) = 0$ майже напевно, маємо

$$\overline{Y}_i = U_i I(|U_i| > (1/2t_N)) - \mathrm{E}\left[U_i I(|U_i| > (1/2t_N)) \,\middle|\, \mathcal{F}_{i-1}\right].$$

Оскільки послідовність $\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i,\ 1 \leq n \leq N \right)$ утворює мартингал з нульовим середнім, то, використовуючи нерівність Колмогорова та виконуючи нескладні оцінки, дістаємо

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i \right| > M' t_N \right) \leq \mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i \right| > t_N \right) \leq t_N^{-2} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\,\overline{Y}_i^{\,2} \leq$$

$$\leq t_N^{-2} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\left[U_i^2 I(|U_i| > (1/2t_N))\right] \leq t_N^{-2} (2t_N)^{p-2} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}|U_i|^p =$$

$$= 2^{p-2} t_N^{p-4} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}|A_N D_i Z_i|^p \leq 2^{p-2} t_N^{p-4} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}\left\| B_N^{-1/2} D_i Z_i \right\|^p =: g(N). \tag{11}$$

З нерівностей (10) та (11) випливає

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} |A_N S_n| > 2M' t_N \right) = \mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} U_i \right| > 2M' t_N \right) \leq$$

$$\leq \mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} Y_i \right| > M' t_N \right) + \mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{Y}_i \right| > M' t_N \right) \leq$$

$$\leq 2\exp\left(-2t_N^2\right) + g(N). \tag{12}$$

Покладемо $M = 8dM'$ і позначимо через $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, \ldots, A_n^{(d)}$ відповідні рядки матриці $B_n^{-1/2}$. Тоді на підставі (12) отримаємо

$$\mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left\| B_N^{-1/2} S_n \right\| \geq \left(M/4\sqrt{d}\,\right) t_N \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{d} \mathrm{P}\left(\max_{1 \leq n \leq N} \left| A_N^{(k)} S_n \right| > 2M' t_N \right) \leq 2d\exp\left(-2t_N^2\right) + d\,g(N).$$

На основі даної нерівності та нерівності (8) робимо висновок, що

$$\mathrm{P}\left(\max_{n_{j-1}<n\le n_j} t_n^{-1}\left\|B_n^{-1/2}S_n\right\| > M\right) \le 2d\exp\left(-2t_{n_j}^2\right) + d\,g(n_j). \qquad (13)$$

Використовуючи ліву нерівність в (6), при всіх $j \ge 1$ дістаємо

$$\left\|B_{n_j}\right\| \ge \left(\left|B_{n_1}\right|/2\right)^{1/d} \cdot 2^{j/d}. \qquad (14)$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{j=1}^{\infty}\exp\left(-2t_{n_j}^2\right) < \infty. \qquad (15)$$

Використовуючи (3), маємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} g\left(n_j\right) = 2^{p-2}\sum_{j=1}^{\infty} t_{n_j}^{p-4}\sum_{i=1}^{n_j}\mathrm{E}\left\|B_{n_j}^{-1/2}D_iZ_i\right\|^p \le$$

$$\le C2^{p-2}\sum_{j=1}^{\infty}\left(t_{n_j}^{p-4-\tau}\Big/\ln\left\|B_{n_j}\right\|\right) < \infty \qquad (16)$$

на підставі нерівності (14) та умови $p-\tau<2$ (C — скінченна стала з умови (3)). Зі співвідношень (13), (15) та (16) випливає (6).

Теорему 1 доведено.

Нехай $(A_n, n \ge 1)$ — довільна послідовність матриць розміру $k \times d$ ($A_n \ne 0$, $n \ge 1$). Позначимо через $\|\cdot\|_2$ спектральну норму матриці.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* (1) – (3), *то*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\|A_nS_n\|}{\left\|A_nB_nA_n^T\right\|_2^{1/2} t_n} < \infty \quad \text{м.н.}$$

Доведення випливає з теореми 1 з урахуванням нерівності

$$\|A_nS_n\| \le \left\|A_nB_n^{1/2}\right\|_2 \left\|B_n^{-1/2}S_n\right\|$$

та тотожності $\left\|A_nB_n^{1/2}\right\|_2 = \left\|A_nB_nA_n^T\right\|_2^{1/2}$.

Зауважимо, що коли $\mathrm{E}\left(Z_nZ_n^T\right) = I$, $n \ge 1$, то $A_nB_nA_n^T$ — коваріаційна матриця вектора A_nS_n.

1. *Koval V.* A new law of the iterated logarithm in R^d with application to matrix-normalized sums of random vectors // J. Theor. Probab. – 2002. – **15**, № 1. – P. 249 – 257.
2. *Lai T. L.* Some almost sure convergence properties of weighted sums of martingale difference sequences // Almost Everywhere Convergence, II. – Boston: Acad. Press, 1991. – P. 179 – 190.
3. *Ланкастер П.* Теория матриц: Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 280 с.
4. *Wittmann R.* A general law of iterated logarithm // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1985. – **68**, № 4. – S. 521 – 543.
5. *Duflo M.* Random iterative models. – Berlin: Springer, 1997. – 385 p.

Одержано 13.01.2005