УДК 512.64

В. М. Петричкович, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Паралельні факторизації многочленних матриць

Встановлені умови, при яких передбачувані факторизації многочленних матриць над полем є паралельними до факторизацій їх канонічних діагональних форм. Вказано критерій існування таких факторизацій многочленних матриць та запропоновано метод їх побудови.

Установлены условия, при которых предполагаемые факторизации многочленных матриц над полем являются параллельными факторизациям их канонических диагональных форм. Указан критерий существования таких факторизаций многочленных матриц и предложен метод их построения.

Нехай P — поле, $P_n[x]$ — кільце $n \times n$-матриць над $P[x]$. Через $D^A(x)$ позначимо канонічну діагональну форму матриці $A(x) \in P_n[x]$, тобто $D^A(x) = U(x)A(x)V(x) = \operatorname{diag}(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$, $\mu_i \mid \mu_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n$, $U(x)$, $V(x) \in GL_n(P[x])$. Якщо матриця $B(x) \in P_n[x]$, $\det B(x) \neq 0$ є дільником матриці $A(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \neq 0$ тобто

$$A(x) = B(x) C_1(x) \quad (A(x) = C_2(x) B(x)), \tag{1}$$

то відомо [1], що канонічна діагональна форма $D^B(x)$ матриці $B(x)$ є дільником канонічної діагональної форми $D^A(x)$ матриці $A(x)$, тобто

$$D^A(x) = D^B(x) \Psi(x), \tag{2}$$

де $\Psi(x)$ — деяка діагональна матриця. Отже, факторизації (1) матриці $A(x)$ відповідає факторизація (2) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$ така, що $A(x)$ еквівалентна $D^A(x)$, $B(x)$ еквівалентна $D^B(x)$. По аналогії із [2] введемо таке означення.

Означення. *Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x) \in P_n[x]$ зображається у вигляді добутку*

$$D^A(x) = \Phi(x) \Psi(x), \tag{3}$$

де $\Phi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$, $\varphi_i \mid \varphi_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\Psi(x) = \operatorname{diag}(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x))$. *Факторизацію*

$$A(x) = B(x) C(x), \tag{4}$$

$B(x), C(x) \in P[x]$, *матриці $A(x)$ таку, що $B(x)$ еквівалентна $\Phi(x)$, $C(x)$ еквівалентна $\Psi(x)$, будемо називати паралельною до факторизації* (3) *її канонічної діагональної форми $D^A(x)$.*

Зауважимо, що не для кожної факторизації (4) матриці $A(x)$ існує факторизація (3) її канонічної діагональної форми $D^A(x)$, до якої вона паралельна, що випливає із наступного прикладу:

$$\begin{Vmatrix} x(x-1) & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ t & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} x & 0 & 0 \\ -t & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{Vmatrix},$$

$t \in R$, $t \neq 0$. Матриці розглядаються над кільцем $R[x]$.

В даній роботі досліджуються паралельні факторизації многочленних матриць над довільним полем. Зокрема, вказуються умови існування і метод знаходження паралельних факторизацій многочленних матриць, у яких перший множник — унітальна матриця. Такого типу факторизації многочленних матриць над полем комплексних чисел розглядалися в роботі [3].

Надалі будемо вважати, що P — нескінченне поле.

Лема 1. *Нехай факторизація* (4) *матриці $A(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \neq 0$, паралельна до факторизації* (3) *її канонічної діагональної форми $D^A(x)$. Тоді існують матриці $U(x)$, $V_1(x)$, $V_2(x) \in GL_n(P[x])$ такі, що $U(x) \times A(x) V_1(x) = D^A(x)$, $U(x) B(x) V_2(x) = D^B(x)$, $V_2^{-1}(x) C(x) V_1(x) = \Psi(x)$, тобто із рівності* (4) *одержимо рівність* (3) *за допомогою одних і тих самих лівих і відповідних правих елементарних перетворень над матрицями в обох частинах рівності* (4).

Доведення. На основі результатів роботи [4] існують матриці $Q \in GL_n(P)$, $R_1(x)$, $R_2(x) \in GL_n(P[x])$ такі, що

$$T^A(x) = QA(x) R_1(x) = \begin{Vmatrix} \mu_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(x) & \mu_2(x) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \ldots & \mu_n(x) \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

де $\deg a_{ij} < \deg \mu_i$, якщо $\deg \mu_i > 0$, і $a_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $\deg \mu_i = 0$, тобто $\mu_i(x) = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$ і

$$T^B(x) = QB(x) R_2(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \ldots & \varphi_n(x) \end{Vmatrix}$$

такого ж виду (5). Тоді із (4) одержуємо $QA(x)R_1(x) = QB(x)R_2(x) \times \times R_2^{-1}(x)C(x)R_1(x)$. тобто

$$T^A(x) = T^B(x)C_1(x), \tag{6}$$

$$C_1(x) = R_2^{-1}(x)C(x)R_1(x) = \left\| \begin{matrix} \psi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21}(x) & \psi_2(x) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}(x) & c_{n2}(x) & \ldots & \psi_n(x) \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки матриця $C(x)$ еквівалентна діагональній матриці $\Psi(x)$, а тому і $C_1(x)$ еквівалентна $\Psi(x)$, тобто $S(x)C_1(x)W(x) = \Psi(x)$, $S(x)$, $W(x) \in GL_n(P[x])$, то в множинах перетворюючих матриць $\{S(x)\}$ і $\{W(x)\}$ існують нижні унітрикутні матриці $S_1(x)$, $W_1(x)$ [5] такі, що $S_1(x)C_1(x) \times \times W_1(x) = \Psi(x)$. Тому із (6) одержуємо $T^A(x)W_1(x) = T^B(x)S_1^{-1}(x)S_1(x) \times \times C_1(x)W_1(x)$, або $T_1^A(x) = T_1^B(x)\Psi(x)$, де $T_1^A(x)$ і $T_1^B(x)$ вигляду (5) Оскільки $\mu_j | a_{ij}$, $\varphi_j | b_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, то останню рівність можна записати так: $U(x)D^A(x) = U_1(x)\Phi(x)\Psi(x)$, де $U(x)$ і $U_1(x)$— нижні унітрикутні матриці. Звідси маємо $U(x) = U_1(x)$ і $D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x)$. Крім того, $V_1(x) = R_1(x)W_1(x)$, $V_2(x) = R_2(x)S_1^{-1}(x)$. Лема доведена.

Лема 2. *Нехай $C(x) = \| c_{ij}(x) \|_1^n$, $c_{ij}(x) \in P[x]$ — нижня трикутна матриця, тобто $c_{ij}(x) \equiv 0$ для всіх $i < j$, $i, j = 1, \ldots n$. Якщо $\delta_{jk} | c_{ij}$ для всіх $k = i$, $i+1, \ldots, n$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, де $\delta_{ij}(x) = (c_{ii}(x), c_{jj}(x))$, то матриця $C(x)$ еквівалентна діагональній матриці* $\operatorname{diag}(c_{11}(x), \ldots, c_{nn}(x))$.

Доведення. На основі теореми Рота [6] і результатів роботи [5] одержуємо, що матриця $C(x)$ еквівалентна матриці $\operatorname{diag}(c_{11}(x), \ldots, c_{nn}(x))$ тоді і тільки тоді, коли система рівнянь

$$c_{ii}(x)t_{ij}(x) - \sum_{k=j}^{i-1} c_{kj}(x)z_{ik}(x) = c_{ij}(x), \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i > j \tag{7}$$

має розв'язки. Розв'язування цієї системи рівнянь зводиться до послідовного знаходження розв'язків рівнянь вигляду $a(x)t(x) - b(x)z(x) = c(x)$, яке має розв'язки тоді і тільки тоді, коли $(a(x), b(x)) | c(x)$ [7]. При виконанні умов леми 2 система рівнянь (7) має розв'язки. Лема доведена.

Теорема 1. *Нехай канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \not\equiv 0$, і матриця $A(x)$ зображаються у вигляді добутків* (3), (4). *Якщо $(\varphi_i(x)/\varphi_j(x), \delta_{ij}(x)) = 1$ для всіх $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, де $\delta_{ij}(x) = (\psi_i(x), \psi_j(x))$, то факторизація* (4) *матриці $A(x)$ паралельна факторизації* (3) *її канонічної діагональної форми $D^A(x)$.*

Доведення. Нехай матриця $A(x)$ зображається у вигляді добутку (4). Тоді, як і при доведенні леми 1, застосовуючи одночасно до обох частин рівності (4) півскалярні еквівалентні перетворення, одержуємо рівність (6) (6) $T^A(x) = T^B(x)C_1(x)$, з якої маємо

$$\sum_{k=1}^{i} b_{ik}(x)c_{kj}(x) = a_{ij}(x), \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad i > j,$$

при цьому покладаємо $b_{ii}(x) = \varphi_i(x)$, $c_{ii}(x) = \psi_i(x)$. Оскільки $\mu_j | a_{ij}$, $\varphi_j | b_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, то з цих рівностей при умові теореми 1 одержуємо $\delta_{jk} | c_{ij}$, $k = i$, $i+1, \ldots, n$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$. Тоді на основі леми 2 матриця $C_1(x)$ еквівалентна діагональній матриці $\Psi(x)$. Оскільки матриця $C(x)$ із (4) еквівалентна матриці $C_1(x)$, то $C(x)$ еквівалентна $\Psi(x)$. Теорема доведена.

Наслідок 1. *Нехай $[\varepsilon_i(x)]^{m_i}$, $i = 1, \ldots, r$, — елементарні дільники неособливої матриці $A(x) \in P_n[x]$. Якщо $m_i = 1$, $i = 1, \ldots, r$, то кожна факторизація матриці $A(x)$ є паралельною до факторизації її канонічної діагональної форми $D^A(x)$.*

Наслідок 2. *Кожна факторизація неособливої многочленної матриці простої структури є паралельною до факторизації її канонічної діагональної форми.*

Нехай $T^A(x) = QA(x)R(x)$, $Q \in GL_n(P)$, $R(x) \in GL_n(P[x])$ — трикутна форма вигляду (5) матриці $A(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \not\equiv 0$. Нехай далі канонічна діагональна форма $D^A(x)$ матриці $A(x)$ зображається у вигляді добутку

$$D^A(x) = \Phi(x)\Psi(x) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))\operatorname{diag}(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)), \tag{8}$$

$$\varphi_i \mid \varphi_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \sum_{i=1}^{n} \deg \varphi_i = sn.$$

Матрицю $T^A(x)$ зобразимо так:

$$T^A(x) = U(x)D^A(x), \tag{9}$$

$U(x) \in GL_n(P[x])$. Запишемо нижню унітрикутну матрицю:

$$K(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} k_{21}(x) & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\mu_n(x)}{\mu_1(x)} k_{n1}(x) & \frac{\mu_n(x)}{\mu_2(x)} k_{n2}(x) & \ldots & 1 \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

де $k_{ij}(x) = k_{ij}^{(r_{ij})} x^{r_{ij}} + k_{ij}^{(r_{ij}-1)} x^{r_{ij}-1} + \ldots + k_{ij}^{(0)}$, $r_{ij} = \deg \varphi_i - \deg \varphi_j - 1$, якщо $\psi_j \nmid \psi_i$, $i > j$, і $k_{ij}(x) \equiv 0$, якщо $\psi_j \mid \psi_i$, $k_{ij}^{(r_{ij})}$ — незалежні змінні, тобто $K(x)$ — матриця над кільцем $P(k)[x]$, де $P(k)$ — розширення поля P, одержане шляхом приєднання $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, до поля P. Тепер розглянемо добуток матриць $U(x)K(x)\Phi(x)$. Правими елементарними перетвореннями зведемо цю матрицю до вигляду (5), тобто для деякої матриці $S(x) \in GL_n(P(k)[x])$ $T(x) = U(x)K(x)\Phi(x)S(x) = T_0x^m + T_1x^{m-1} + \ldots + T_m$ — трикутна матриця вигляду (5) з головною діагоналлю $\Phi(x)$. Через M_T позначимо матрицю

$$M_T = \begin{Vmatrix} T_0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_1 & T_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ T_s & T_{s-1} & \cdots & T_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ T_m & T_{m-1} & \cdots & T_{m-s} \end{Vmatrix}.$$

Теорема 2. *Матриця* $A(x) \in P_n[x]$, $\det A(x) \not\equiv 0$ *має факторизацію*

$$A(x) = (Ix^s + B_1x^{s-1} + \ldots + B_s)C(x), \tag{11}$$

де $B_i \in P_n$, $i = 1, \ldots, n$, I — *одинична матриця, паралельна факторизації її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$ *тоді і тільки тоді, коли існують такі* $k_{ij}^{(r_{ij})} \in P$, $i, j = 1, \ldots, n$, $i > j$, *що* $\operatorname{rang} M_T = (s+1)n$.

Доведення. Необхідність. Для матриць $A(x)$ і $B(x)$ із (11) існують матриці $Q_1 \in GL_n(x)$ і $R_1(x)$, $R_2(x) \in GL_n(P[x])$ такі, що $Q_1A(x) \times R_1(x) = T_1^A(x)$, $Q_1B(x)R_2(x) = T_1^B(x)$, і з (11) одержуємо $Q_1A(x)R_1(x) = Q_1B(x)R_2(x)R_2^{-1}(x)C(x)R_1(x)$, тобто $T_1^A(x) = T_1^B(x)C_1(x)$, або

$$U_1(x)D^A(x) = U_2(x)\Phi(x)C_1(x), \tag{12}$$

де $U_1(x)$ і $U_2(x)$ — унітрикутні матриці. Оскільки матриця $C_1(x)$ трикутна і еквівалентна діагональній матриці $\Psi(x)$, то [5] існують унітрикутні матриці $G(x) = \| g_{ij}(x) \|_1^n$ і $F(x) = \| f_{ij}(x) \|_1^n$, $g_{ij}(x) = 0$, $f_{ij}(x) = 0$, $i < j$, $g_{ii}(x) = 1$, $f_{ii}(x) = 1$ такі, що $F(x) C_1(x) G(x) = \Psi(x)$. Тоді $U_1(x) D^A(x) \times G(x) = U_2(x) \Phi(x) F^{-1}(x) F(x) C_1(x) G(x)$, або $U_1(x) G_1(x) D^A(x) = U_2(x) \times \Phi(x) F^{-1}(x) \Psi(x)$,

$$G_1(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} g_{21}(x) & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu_n(x)}{\mu_1(x)} g_{n1}(x) & \frac{\mu_n(x)}{\mu_2(x)} g_{n2}(x) & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Скорочуючи останню рівність на $\Psi(x)$, матимемо $U_1(x) G_1(x) \Phi(x) = U_2(x) \Phi(x) F^{-1}(x)$. Оскільки матриця $B(x)$ із (11) унітальна, то $U_1(x) G_1(x) \Phi(x)$ правоеквівалентна до унітальної матриці. Неважко бачити [3], що матриці $U(x)$ із (9) і $U_1(x)$ із (12) зв'язані співвідношенням $U_1(x) = U(x) H(x)$, де

$$H(x) = \begin{Vmatrix} h_{11}(x) & h_{12}(x) & \dots & h_{1n}(x) \\ \frac{\mu_2(x)}{\mu_1(x)} h_{21}(x) & h_{22}(x) & \dots & h_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mu_n(x)}{\mu_1(x)} h_{n1}(x) & \frac{\mu_n(x)}{\mu_2(x)} h_{n2}(x) & \dots & h_{nn}(x) \end{Vmatrix}.$$

Тоді $U_1(x) G_1(x) \Phi(x) = U(x) H(x) G_1(x) \Phi(x)$. На основі твердження 3 [3] існує матриця $R(x) \in GL_n(P[x])$ така, що $H(x) G_1(x) \Phi(x) R(x) = D(x) \Phi(x)$, де матриця $D(x)$ має вигляд (10). За допомогою правих елементарних перетворень над стовпцями матриці $D(x) \Phi(x)$ одержимо $D(x) \times \Phi(x) R_1(x) = D_1(x) \Phi(x)$, $R_1(x) \in GL_n(P[x])$, де в матриці $D_1(x)$ елементи $d_{ij}(x)$ дорівнюють нулю, якщо $\psi_j | \psi_i$ і $\deg d_{ij} = \deg \varphi_i - \deg \varphi_j - 1$, якщо $\psi_j \nmid \psi_i$, $i, j = 1, \dots, n$, $i > j$. Матриця $U(x) D_1(x) \Phi(x)$ правоеквівалентна унітальній матриці. Тому, покладаючи в матриці $K(x)$ $k_{ij}(x) = d_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $i > j$, одержуємо, що матриці $U(x) K(x) \Phi(x)$ і $T(x) = U(x) \times K(x) \Phi(x) S(x)$ правоеквівалентні унітальній матриці. Тому на основі леми 1 із роботи [4] маємо rang $M_\tau = (s+1)n$. Необхідність теореми доведена.

Достатність. Якщо rang $M_\tau = (s+1)n$, то матриця $T(x)$ правоеквівалентна унітальній матриці, тобто $L(x) = T(x) R(x) = Ix^s + L_1 x^{s-1} + \dots + L_s$, $R(x) \in GL_n(P(k)[x])$ і $R(x) = R_0 x^s + R_1 x^{s-1} + \dots + R_s$. Коефіцієнти R_i, $i = 0, 1, \dots, n$, знаходяться як розв'язки рівняння

$$M_\tau \begin{Vmatrix} R_0 \\ R_1 \\ \vdots \\ R_s \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ I \end{Vmatrix}.$$

Тоді $Q^{-1} L(x) Q = B(x)$ є лівим дільником матриці $A(x)$, тобто $A(x) = B(x) C(x)$ [4]. Матриця $B(x)$ залежить від змінних $k_{ij}^{(r_{ij})}$, $i, j = 1, \dots n$, $i > j$. Тому, надаючи їм допустимих значень із поля P, будемо одержувати дільники і факторизації матриці $A(x)$.

Враховуючи результати робіт [8, 9] одержуємо такий наслідок.

Наслідок 3. *Факторизація* (11) *матриці* $A(x) \in P_n[x]$ (P — *нескінченне поле*), *паралельна факторизації* (8) *її канонічної діагональної форми* $D^A(x)$, *єдина тоді і тільки тоді, коли у* (8) $\Psi(x)$ — *d-матриця, тобто* $\psi_i | \psi_{i+1}$, $i, j = 1, \dots, n-1$.

Якщо P — скінченне поле, то сформульовані вище результати справедливі для многочленних матриць, які півскалярними еквівалентними перетвореннями зводяться до трикутної форми (5); умови такої звідності многочленних матриць наведені в роботі [4].

1. *Newman M.* On the Smith normal form // J. Res. Bur. Stand. Sect.— 1971.— **75**.— P. 81—84.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники.— К. : Наук. думка, 1981.— 224 с.
3. *Зелиско В. Р.* О строении одного класса обратимых матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля.— 1980.— Вып. 12.— С. 14—21.
4. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация многочленных матриц // Укр. мат. журн.— 1990.— **42**, № 5.— С. 644—649.
5. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Bur. Stand. Sect.— 1976.— **80**, N 1.— P. 89—97.
6. *Roth W. E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc.— 1952.— N 3 — P. 392—396.
7. *Kucera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for siude-variable systems // Kybernetica.— 1973.— **9**, N 2.— P. 94—107.
8. *Боревич З. И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеалов // Тез. докл. III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей (Тарту, сент. 1976 г.).— Тарту: Тарт. ун-т, 1976.— С. 19.
9. *Казімірський П. С., Зеліско В. Р.* Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з наперед заданою формою Сміта // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь.— К. : Наук. думка, 1977.— С. 52—61.

Одержано 06.03.92