

И. О. Баранецкий, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. пробл. механіки і математики АН України, Львів)

Подібні оператори, породжені нелокальними задачами для еліптичних рівнянь другого порядку

Вивчаються спектральні властивості та властивості L^2 -розв'язків нелокальної задачі для лінійних еліптичних рівнянь другого порядку невідвергентного виду, яка є ізоспектральним збуренням задачі Діріхле.

Изучаются спектральные свойства и свойства L^2 -решений нелокальной задачи для линейных эллиптических уравнений второго порядка недивергентного вида, которая является изоспектральным возмущением задачи Дирихле.

Нелокальні еліптичні задачі вивчалися в [1—7]. При цьому в ході досліджень встановлювалося співвідношення між оператором нелокальної задачі (збуреної) та простішої за структурою рівняння, або крайових умов крайової (незбуреної) задачі. В [6] таким співвідношенням було відношення ізоспектральності. В [7] за допомогою методу подібних операторів вивчалися нелокальні задачі для інтегро-диференціальних рівнянь. В даній роботі на основі варіанту методу подібних операторів, який ґрунтується на симетричних властивостях області рівняння та крайових умов [8], вивчаються спектральні властивості та умови розв'язності розв'язків нелокальної задачі.

Нехай Q — обмежена область з \mathbb{R}^{n-1} з межею $\Gamma \in C^\infty$, $\Omega = (0, 1) \times Q \subset \subset \mathbb{R}^n$, $\{\Gamma_p\}_{p=1}^q$ — набір многовидів з $\bar{\Omega}$ дифеоморфних Q ; $a_{i,j}(x)$, $a(x) \in C^\infty(\Omega)$, $a_{i,j} = a_{j,i} \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $i, j = \overline{1, n}$. Припустимо, що поверхня Γ_p задана рівнянням $x_1 = \varphi_p(x')$, $x = (x_1, x')$, $x_1 \in (0, 1)$, $x' \in Q$ і задано

$$b_p(x) \in C^\infty(\bar{\Gamma}_p), \quad b_p(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \cap \Gamma_p, \quad p = \overline{1, q}.$$

Через $H^s(\Omega)$ позначимо простір Соболева ($2s \in \mathbb{Z}_+$, $s \geq 0$). В $H^2(\Omega)$ задаємо норму, індуковану скалярним добутком

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dx_i^2}.$$

Нехай $B: H^2(\Omega) \rightarrow H^{3/2}(Q)$ — оператор вигляду

$$Bu = \sum_{i=1}^q b_i(\gamma_i(x'), x') u(\gamma_i(x'), x'), \quad x' \in \bar{Q}, \quad u \in H^2(\Omega),$$

$$W \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega) \oplus H^{3/2}(S) \oplus H^{3/2}(Q) \oplus H^{3/2}(Q)$$

— гільбертів простір з нормою

$$\|F\|_W^2 = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{H^{3/2}(S)}^2 + \|\varphi_0\|_{H^{3/2}(Q)}^2 + \|\varphi_1\|_{H^{3/2}(Q)}^2,$$

$$F = (f, \varphi, \varphi_0, \varphi_1) \in W, \quad S = (0, 1) \times \partial Q.$$

Розглянемо в області Ω нелокальну задачу

$$\mathcal{L}u \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + a(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$lu \equiv u|_{x \in S} = \varphi, \quad (2)$$

$$l_B u = u|_{x_i=i} + Bu = \varphi_i, \quad x' \in \bar{Q}, \quad i = 0, 1, \quad (3)$$

$$Bu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^q b_j(x)u(x)|_{x \in \mathbf{r}_j}.$$

Розв'язком задачі (1)–(3) будемо називати функцію $u \in H^2(\Omega)$, яка задовольняє рівняння (1) в розумінні рівності функцій в $L^2(\Omega)$, та умови (2), (3) в розумінні рівності функцій $H^{3/2}(S)$ та $H^{3/2}(Q)$ відповідно.

Через L_B позначимо оператор задачі (1)–(3), $L_B u \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}u$, $u \in D(L) = = \{v \in H^2(R) : lv = 0, l_B v = l'v = 0\}$.

Власним значенням L_B будемо називати таке число $\lambda \in \mathbb{C}$, при якому існує негрівіальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = \lambda u$ з $D(L_B)$, а сам розв'язок — власна функція.

Через $\sigma(L_B)$ позначимо множину власних значень занумерованих в порядку неспадання абсолютних значень $|\lambda_m|$, через $v(L_B)$ — систему власних функцій оператора L_B .

Легко бачити, що при $b_j \equiv 0$, $\bar{j} = \overline{1, q}$, тобто $B = 0$, однорідні умови (2), (3) є умовою Діріхле

$$u|_{x \in \partial\Omega} = \bar{\varphi}. \quad (4)$$

Оператор задачі Діріхле (1), (4) позначимо через L_0 .

Система функцій $(h_m)_{m=1}^\infty \subset L^2(\Omega)$ називається базою Ріса цього простору, якщо знайдеться лінійний оператор $\Phi : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, неперервний разом з оператором Φ^{-1} такий, що $(\Phi h_m)_{m=1}^\infty$ є ортонормованою базою в $L_2(\Omega)$.

Наведемо припущення, при яких будуть сформульовані основні результати роботи:

А) рівняння (1) рівномірно еліптичне

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \right| \geq \text{const} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 > 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \xi_i, \xi_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

В) $a_{i,j}(x_1, x') \equiv a_{i,j}(1 - x_1, x')$, $a(x_1, x') \equiv a(1 - x_1, x')$, $b_p(x_1, x') \equiv b_p(1 - x_1, x')$, $\gamma_p(x_1, x') \equiv 1 - \gamma_{q+1-p}(x_1, x')$, $i, j = \overline{1, n}$; $p = \overline{1, q}$, $a(x) > 0$.

Теорема 1. Нехай виконуються припущення А, В. Тоді для довільних $f \in L^2(\Omega)$, $\varphi \in H^{3/2}(S)$, $\varphi_0, \varphi_1 \in H^{3/2}(Q)$ існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3) і виконується нерівність

$$c_{1,B} \|F\|_W \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_{2,B} \|F\|_W, \quad (5)$$

$$F = (f, \varphi, \varphi_0, \varphi_1) \in W.$$

Теорема 2. В умовах теореми 1 власні значення операторів L_B та L_0 співпадають: $\sigma(L_B) = \sigma(L_0)$ і система $V(L_B)$ оператора L_B утворює базу Ріса простору $L^2(\Omega)$.

Доведемо теорему 1. З припущень на коефіцієнти рівняння $\mathcal{L}u = f$ випливає, що оператор L_0 ($b_p \equiv 0$, $p = \overline{1, q}$) самоспряжений і тому з результатів [9, 11] випливає така лема

Лема 1. Нехай $b_p \equiv 0$, $p = \overline{1, q}$, і виконуються умови 2, А. Тоді для задачі (1) — (3) справедливе твердження теореми 1.

У цьому випадку позначимо відповідно через $c_{1,0}$, $c_{2,0}$ константи в нерівності (5).

Нехай E — тотожний оператор, $Jv(x_1, x') \equiv v(1 - x_1, x')$; $\pi_{\pm}v(x) = \frac{1}{2}(E \pm J)v(x)$ — ортопроектори в $L^2(\Omega)$, тобто $\pi_{+}\pi_{-} = \pi_{-}\pi_{+} = 0$, $\pi_{+} + \pi_{-} = E$. Ці ортопроектори індукують розклади

$$H^2(\Omega) = H^2_{+}(\Omega) \oplus H^2_{-}(\Omega), \quad L^2(\Omega) = L^2_{+}(\Omega) \oplus L^2_{-}(\Omega), \quad L^2(S) = L^2_{+}(S) \oplus L^2_{-}(S),$$

де

$$H^2_{\pm}(\Omega) = \pi_{\pm}H^2(\Omega), \quad L^2_{\pm}(\Omega) = \pi_{\pm}L^2(\Omega), \quad L^2_{\pm}(S) = \pi_{\pm}L^2(S).$$

Зведемо умови (3) до еквівалентних

$$\tilde{I}_B^0 u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(I_B^0 + I_B^1)u = \tilde{\varphi}_1^0 \tilde{I}_B^1 u = \frac{1}{2}(I_B^0 - I_B^1)u = \tilde{\varphi}^1, \quad (6)$$

$$\tilde{I}_B^1 u = \frac{1}{2}(u|_{x_1=0} + u|_{x_1=1}) + Bu, \quad \tilde{I}_B^0 u = \frac{1}{2}(u|_{x_1=0} - u|_{x_1=1}).$$

З припущення В випливає

$$\mathcal{L}H^2_{\pm}(\Omega) \subset L^2_{\pm}(\Omega), \quad IH^2_{\pm} \subset L^2_{\pm}(S), \quad BH^2_{\pm}(\Omega) = 0.$$

Тому, підставляючи в (1), (2), (6) розклади $u = u_{+} \oplus u_{-}$, $f = f_{+} \oplus f_{-}$, $\varphi = \varphi_{+} \oplus \varphi_{-}$, отримуємо дві задачі вигляду

$$\mathcal{L}u_{-} = f_{-}, \quad Iu_{-} = \varphi_{-}, \quad u_{-}|_{x_1=0} + u_{-}|_{x_1=1} = 0, \quad u_{-}|_{x_1=0} - u_{-}|_{x_1=1} = \tilde{\varphi}', \quad (7_1)$$

$$\mathcal{L}u_{+} = f_{+}, \quad Iu_{+} = \varphi_{+}, \quad u_{+}|_{x_1=0} + u_{+}|_{x_1=1} = \tilde{\varphi}^0 - Bu_{-}, \quad u_{+}|_{x_1=0} - u_{+}|_{x_1=1} = 0. \quad (7_2)$$

В силу співвідношень (6) кожна з цих задач еквівалентна задачі Діріхле, тому з леми 1 випливає існування та єдність розв'язків задач (7₁), (7₂), а отже і (1) — (3) та нерівності (5) при $c_{L,B} = c_{1,0}$, $u = u_{\pm}$, $F = F_{\pm}$,

$$F_{-} \stackrel{\text{def}}{=} (f_{-}, \tilde{\varphi}_{-}, 0, \tilde{\varphi}'), \quad F_{+}(f_{+}, \tilde{\varphi}_{+}, \tilde{\varphi}^0 - Bu_{-}, 0)$$

$$c_{1,0} \|F_{\pm}\|_W \leq \|u_{\pm}\|_{H^2(\Omega)} \leq c_{2,0} \|F_{\pm}\|_W. \quad (8)$$

Враховуючи припущення А та В, можна показати, що

$$\|Bu\|_{H^{3/2}(Q)} \leq c(B) \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (9)$$

Використовуючи нерівності (8), (9), одержуємо нерівність (5) при $c_{1,B} = c_{1,0}(1 + c(B))$, $c_{2,B} = c_{2,0}(1 + c_{2,0}c(B))$. Теорема доведена.

Для доведення теореми 2 розглянемо допоміжну нелокальну задачу

$$-\Delta v = g, \quad Iv = \psi, \quad I_P v \equiv v|_{x_1=t} + Pv = \psi^t, \quad (10)$$

де $P: H^2(\Omega) \rightarrow L^2(Q)$.

Лема 2. Нехай $P: H^2(\Omega) \rightarrow H^{3/2}(Q)$ — неперервний оператор і $PH^2_{+}(\Omega) = 0$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (10) і справедлива априорна оцінка при $\Psi = (g, \psi, \psi^0, \psi^t) \in W$

$$c_{1,P} \|\Psi\|_W \leq \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c_{2,P} \|\Psi\|_W. \quad (11)$$

Доведення умови теореми 1 на коефіцієнти рівняння (10) виконується автоматично. В доведенні теореми 1 для задачі (1)–(3) умови 3 та В використувались, щоб одержати ті властивості оператора B , які для оператора P ми припускаємо. Тому можна повторити для доведення леми 2 всі міркування теореми 1.

Нехай $A_P(A_0)$ — оператор задачі (10) (відповідно при $P=0$).

Т е о р е м а 3. *Нехай оператор P задовольняє умову леми 2. Тоді оператор A має такі ж власні значення, що й оператор A_0 :*

$$\mu_{m,k} = \pi^2 m^2 + \xi_k, \quad m, k = \overline{1, \infty}, \quad (12)$$

де $\xi_k > 0$ — власні значення оператора $C: Ch = -\Delta h, h \in D(C) = \{h \in L^2(Q), h|_{\partial Q} = 0\}$. Система $V(A_P)$ власних функцій цього оператора утворює базу Ріса в просторі $L^2(\Omega)$.

Д о в е д е н н я. Неважко показати, що оператор A_0 має власні значення (12) та відповідні власні функції

$$v_{m,k}(A_0) = \sqrt{2} \sin \pi m x_1 \cdot g_k(x'), \quad m, k = \overline{1, \infty},$$

де $g_k(x')$ — власна функція, яка відповідає власному значенню ξ_k оператора задачі Діріхле

$$-\sum_{j=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} g(x') = \lambda g(x'), \quad g|_{\partial G} = 0.$$

При цьому $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ пронумеровані в порядку неспадання.

Система $V(A_0)$ є об'єднанням $V_+(A_0)$ та $V_-(A_0)$, які є ортонормованими базами відповідно в $L_+^2(\Omega)$ та $L_-^2(\Omega)$

$$V_-(A_0) = \{v_{2l,k}(A_0) \in V(A_0), \quad l, k = \overline{1, \infty}\},$$

$$V_+(A_0) = \{v_{2l-1,k}(A_0) \in V(A_0), \quad l, k = \overline{1, \infty}\}.$$

З умов на оператор P випливає, що функції з $V_+(A_P)$ належать $D(A_0)$, тобто $V_+(A_P) = V_+(A_0)$. Функції з $V_-(A_P)$ шукаємо у вигляді

$$v_{2l,k}(A_P) = v_{2l,k}(A_0) + c_{l,k}(x') \sqrt{2} \cos 2\pi l x_1 g_k(x'),$$

де параметри $c_{l,k}(x')$ визначаються з умов $l_P v_{2l,k} = 0$. Після обчислень одержимо

$$c_{l,k}(x') = -\sqrt{2} B \sin 2\pi l x_1, \quad x' \in Q, \quad l, k = \overline{1, \infty}.$$

Отже,

$$v_{m,k}(A_P) = \begin{cases} v_{2l-1,k}(A_0), & m = 2l - 1, \quad l, k = \overline{1, \infty}; \\ v_{2l,k}(A_0) - \sqrt{2}(B \sin 2\pi l x_1) \cos 2\pi l x_1 g_k(x'); & \\ m = 2l, \quad l, k = \overline{1, \infty}. \end{cases} \quad (13)$$

Для закінчення доведення теореми 3 треба показати, що система $V(A_P)$ — база Ріса в $L^2(\Omega)$.

Лема 3. Система $V(A_P)$ повна та мінімальна в $L^2(\Omega)$.

Покажемо повноту (тотальність) $V(A_P)$, оскільки в гільбертовому просторі ці означення співпадають.

Нехай $h \in L^2(\Omega)$ задовольняє співвідношення

$$(h, v_{m,k}(A_P))_{L^2(\Omega)} = 0. \quad (14)$$

З повноти (тотальності) системи $V_+(A_0)$ в $L_+^2(\Omega)$ та зображень (13) маємо $h \in L_-^2(\Omega)$. Але тоді

$$(h, v_{2l,k}(A_P))_{L^2(\Omega)} = (h, v_{2l,k}(A_0))_{L^2(\Omega)}, \quad l, k = \overline{1, \infty}.$$

Тому, із співвідношення (14) та властивостей $V_-(A_0)$ в $L^2_-(\Omega)$ маємо $h(x) \equiv 0$.

Для доведення мінімальності побудуємо систему $G(A_p)$ функцій, бі-ортогональну системі $V(A_p)$, в розумінні

$$(g_{r,s}(A_p), v_{m,k}(A_p))_{L^2(\Omega)} = \delta_{r,m} \delta_{s,k}, \quad r, s, m, k = \overline{1, \infty}. \quad (15)$$

Елементи цієї системи шукаємо у вигляді

$$g_{r,s}(A_p) = v_{r,s}(A_0) + \sum_{j,p=1}^{\infty} c_{r,s}^{j,p} \cos \pi(2j-1)x_1 g_p(x'), \quad (16)$$

$$r, m, k, s = \overline{1, \infty}.$$

Підставляючи (16) в (15), одержуємо

$$c_{r,s}^{j,p} = \begin{cases} 0, & r = 2i; \\ \alpha_{l,r,j} \int_Q \overline{c_l(x')} g_p(x') g_s(x') dx', & r = 2i - 1, \end{cases}$$

$$\alpha_{l,r,j} = \frac{2r-1}{2l} \frac{4l^2 - (2j-1)^2}{(2r-1)^2 - 4l^2}, \quad i, l, p, s = \overline{1, \infty}.$$

Лема 3 доведена.

Покажемо, що система $V(A_p)$ утворює базу Ріса.

Зауважимо, що елементи $v_{2l,k}(A_0)$ та $c_l(x') \cos \pi 2j x_1 g_r(x')$ ортогональні. Більше того, оператор $U_p: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, визначений співвідношенням

$$U_p v_{m,k}(A_0) = v_{m,k}(A_p), \quad m, k = \overline{1, \infty},$$

є сумою оператора тотожного перетворення E в $L^2(\Omega)$ та оператора F_p , $U_p = E + F_p$, де $F_p: L^2_+(\Omega) \rightarrow 0$, $F_p: L^2_-(\Omega) \rightarrow L^2_+(\Omega)$, тобто $FF = 0$, $U_p = E - F_p$.

Тому для доведення факту, що $V(A_p)$ — база Ріса в $L^2(\Omega)$, в силу теореми Н. К. Барі [11] досить показати, що $U^* = E + F^*$ — обмежений оператор в $L^2(\Omega)$. Отже,

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} |(U_p^* f, v_{l,k}(A_0))_{L^2(\Omega)}|^2 = \sum_{l,k=1}^{\infty} |(f, v_{l,k}(A_p))_{L^2(\Omega)}|^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 +$$

$$+ \sum_{l,k=1}^{\infty} \left| \int_Q f_l(x') \overline{c_l(x')} \overline{g_k(x')} dx' \right|^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \max_l \|c_l(x')\|_{L^2(\Omega)}^2 \times$$

$$\times \sum_{l,k=1}^{\infty} \int_Q |f_l(x') g_k(x')|^2 dx' \leq (1 + \max_l \|c_l(x')\|_{L^2(\Omega)}^2) \sum_{l=1}^{\infty} \|f_l\|_{L^2(\Omega)}^2 \stackrel{\text{df}}{=} c(P) \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Тут $f_l(x') = \int_0^1 f(x) \sqrt{2} \cos 2\pi l x_1 dx_1 \in L^2(Q)$, $l = \overline{1, \infty}$. Теорема 3 доведена повністю. Будемо говорити, що оператори L_0 та L_B подібні, якщо існує неперервний разом з оберненим оператор $U_B: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, $U_B D(L_0) = D(L_B) \subset H^2(\Omega)$ такий, що $L_B = U_B L_0 U_B^{-1}$.

Лема 4. Твердження теореми 2 справедливе тоді і лише тоді, коли оператори L_B та L_0 подібні.

Доведення. Необхідність. Покладемо

$$U_B v_{m,k}(L_0) \stackrel{\text{df}}{=} v_{m,k}(L_B), \quad m, k = \overline{1, \infty}.$$

Тоді в силу теореми Н. К. Барі [11] U_B, U_B^{-1} — неперервні перетворення простору $L^2(\Omega)$ і $U_B: D(L_0) \rightarrow D(L_B)$.

В просторі $H^2(\Omega)$ за допомогою операції \mathcal{L} можна вибрати скаляр-

ний добуток $\langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \langle \mathcal{L}u, \mathcal{L}v \rangle_{L^2(\Omega)}$, еквівалентний вихідному $\langle u, v \rangle_{H^2(\Omega)}$. При цьому системи $V(L_0), V(L_B)$ стануть безумовними базами в $D(L_0)$ та $D(L_B)$ і в силу теореми Лорча [11] одночасним стиском (множенням функцій $v_{m,k}(L_0)$ та $v_{m,k}(L_B)$ відповідно на $\lambda_{m,k}^{-1}$) можна перейти до баз Ріса $\hat{V}(L_0)$ в $D(L_0)$ та $\hat{V}(L_B)$ в $D(L_B)$; $U_B: \hat{V}(L_0) = V(L_B)$. Отже, U_B — перетворення подібності операторів L_0 та L_B .

Достатність випливає з означення подібності, визначення оператора $U_B: V(L_0) \rightarrow V(L_B)$, самоспряженості L_0 та теореми Н. К. Барі [11]. Як наслідок з цієї леми та теореми 3 випливає така лема.

Лема 5. *Твердження теореми 3 справедливе тоді і лише тоді, коли A_p та A_0 подібні.*

Знайдемо зв'язок між операторами A_0 та L_0 . Оскільки $D(A_0) = D(L_0) \subset H^2(\Omega)$, системи $V(A_0), V(L_0)$ є ортонормованими базами в $L^2(\Omega)$, безумовними базами в $D(L_0) \subset H^2(\Omega)$, $0 < \text{const} < \lambda_{m,k}/\mu_{m,k} < \text{const} < \infty$, то оператор $Z: Zv_{m,k}(L_0) = v_{m,k}(A_0)$ є неперервним в нормі просторів $L^2(\Omega)$ та $H^2(\Omega)$, $m, k = \overline{1, \infty}$.

Продовжимо Z з $D(L_0)$ на $H^2(\Omega)$ враховуючи, що на довільній $h \in H^2(\Omega)$ задано як на функції з $L^2(\Omega)$. Визначимо також оператор $R: D(A_p) \rightarrow D(A_0); L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

$$Rv_{m,k}(A_0) = \lambda_{m,k} \mu_{m,k}^{-1} v_{m,k}(A_0).$$

Тоді

$$\begin{aligned} L_0 v_{m,k}(L_0) &= \lambda_{m,k} v_{m,k}(L_0) = Z^{-1} \lambda_{m,k} v_{m,k}(A_0) = Z^{-1} R \mu_{m,k} v_{m,k}(A_0) = \\ &= Z^{-1} R A_0 v_{m,k}(A_0) = Z^{-1} R A_0 Z v_{m,k}(A_0). \end{aligned}$$

Отже,

$$L_0 = Z^{-1} R A_0 Z. \quad (16')$$

Зауважимо, що в силу умови B підпростори $H_{\pm}^2(\Omega)$ є інваріантними для кожного з операторів Z, R, L_0, A_0 .

Лема 6. *Оператор Z відображає множину $\text{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_{m,k})$ в $\text{Ker}(-\Delta - \mu_{m,k}) \subset H^2$, $m, k = \overline{1, \infty}$.*

Доведення. Нехай $h \in \text{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_{m,k})$. Зобразимо $h = h_1 + h_2 + h_3$, де $h_3 \in \text{Ker} \mathcal{L}$, $h_1 \in S_{m,k}^L$ — власний простір, який відповідає $\lambda_{m,k}$, $h_2 \in D(L_0) \ominus \ominus \text{Ker} \mathcal{L} \ominus S_{m,k}^L$. За означенням оператора $Z \forall f \in \text{Ker} L \exists \omega(f) \in \text{Ker}(-\Delta)$, що $Zf = \omega(f)$, $ZS_{m,k}^L = S_{m,k}^A$, $m, k = \overline{1, \infty}$.

Нехай $h_2 = \sum_{p,r=1}^{\infty} h_{p,r} v_{p,r}(L_0)$, де штрих означає сумування по p, r , при яких $\lambda_{p,r} \neq \lambda_{m,n}$. Тоді

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - \lambda_{m,k}) h_2 &= (L_0 - \lambda_{m,k}) h_2 = \sum_{p,r=1}^{\infty} (\lambda_{p,r} - \lambda_{m,k}) h_{p,r} v_{p,r}(L_0) = (A_0 - \mu_{m,k}) Z^{-1} f, \\ f &= \sum_{p,r=1}^{\infty} (\lambda_{p,r} - \lambda_{m,n}) (\mu_{p,r} - \mu_{m,n})^{-1} h_{p,r} v_{p,r}(A_0). \end{aligned}$$

Побудуємо систему власних функцій $V(L_B) = \{v_{m,k}(L_B)\}_{m,k=1}^{\infty} \subset H^2(\Omega)$ оператора L_B , де

$$v_{m,k}(L_B) = v_{m,k}(L_0) + \hat{v}_{m,k}(L_B), \quad m, k = 1, 2, \dots \quad (17)$$

При $m = 2j - 1$ функції $v_{m,k}(L_0)$ задовольняють однорідні умови (2), (3), тому покладемо

$$\begin{aligned} \lambda_{m,k}(L_B) &\stackrel{\text{df}}{=} \lambda_{m,k}(L_0), \\ v_{m,k}(L_B) &\stackrel{\text{df}}{=} v_{m,k}(L_0), \quad m = 2j - 1, \quad j, k = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Нехай $w_{m,k,r}(x_1) = (\exp \gamma_{m,k}^r x_1 + \exp \gamma_{m,k}^r (1 - x_1)) g_k(x')$, де $\gamma_{m,k}^r$ — ко-

рiнь рiвняння $-\gamma^2 + \xi_k = \lambda_{m,k}$ з пiвплощинами

$$\operatorname{Re} \gamma \leq 0, \quad h_{m,k,r}(x) \stackrel{\text{df}}{=} Z^{-1} \omega_{m,k,r}(x), \quad m, k, r = \overline{1, \infty}.$$

З леми 6 випливає $h_{m,k,r} \in \operatorname{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_{m,k})$. Тому функцію $\hat{v}_{m,k}(L_B)$ шукаємо у вигляді ряду

$$\hat{v}_{m,k}(L_B) = \sum_{r=1}^{\infty} c_{m,k}^r h_{m,k,r}(x), \quad m = 2j, \quad j, k = \overline{1, \infty}. \quad (18)$$

Пiдставляючи (17), (18) в однорiднi умови (3), знаходимо

$$c_{m,k}^r = (1 + \exp \gamma_{m,k}^r)^{-1} (Bv_{m,k}(L_0), Z^{-1}g_r(x'))_{L^2(Q)}. \quad (19)$$

Використовуючи асимптотику $\gamma_{m,k}^r$ при $r \rightarrow \infty$, можна показати, що $\hat{v}_{m,k}(L_B)$ належить $H^2(\Omega)$, отже $v_{m,k}(L_B)$ є власною функцією цього оператора і $\sigma(L_B) = \sigma(L_0)$.

Аналогічно доведенню теореми 3 доводиться, що система $V(L_B)$ повна та мінімальна в $L^2(\Omega)$. Запишемо зображення (18), (19) в iншому вигляді. Можна переконатися, що функція $v_{m,k}(L_B)$ вигляду (17) при

$$v_{m,k}(L_0) = c_{m,k}^{B_1}(x') h_{m,k,k}(x'), \quad m = 2j, \quad (20)$$

де $c_{m,k}^B = -h_{m,k,k}^{-1}(0, x') Bv_{m,k}(L_0)$ належить $D(L_B) \cap \operatorname{Ker}(\mathcal{L} - \lambda_{m,k})$, тобто є власною функцією оператора L_B .

Для повного доведення теореми 2 залишилось показати, що $V(L_B)$ — база Ріса в $L^2(\Omega)$.

Покладемо в (10) $P = BZ^{-1}$ і по аналогії з (16') побудуємо зображення $L_B = \tilde{Z}^{-1} \tilde{R} A_P \tilde{Z}$, де $L_B = U_B L_0 U_B^{-1}$, $A_P = U_P A_0 U_P^{-1}$.

Поклавши $\tilde{Z} = Z$, одержуємо $\tilde{R}_B = U_P R_P U_P^{-1}$,

$$U_B = Z^{-1} U_P Z. \quad (21)$$

Цей оператор в силу властивостей операторів Z та U_P є неперервним разом з U_B^{-1} в $L^2(\Omega)$. Тому, застосовуючи теорему Н. К. Барі [11], маємо $V(L_B)$ — база Ріса в $L^2(\Omega)$. Теорема 2 доведена.

З а у в а ж е н н я. Аналогічно при певних обмеженнях на коефіцієнти вивчаються властивості оператора M_B , породженого в $H^1(\Omega)$ рiвнянням

$$M u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u + \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} u + a_0 u = f$$

та умовами (3).

1. Антоневич А. Б., Добрушкін В. А. Общія краевая задача для эллиптических систем с отклоняющимся аргументом // Докл. АН БССР. — 1973. — 17, № 6. — С. 491—493.
2. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. — 1969. — 185, № 4. — С. 739—740.
3. Кордадзе Р. А. Общія краевая задача со сдвигом для эллиптического уравнения второго порядка // Там же. — 1964. — 155, № 4. — С. 739—742.
4. Carleman T. Sur la theorie des equations integrales et ses applications // Verh. Intern. Math. Kongr. — Zurich, 1932. — P. 135—151.
5. Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // Мат. сб. — 1982. — 117, № 1. — С. 548—558.
6. Баранецкий Я. Е. Краевая задача для дифференциально-операторных уравнений четного порядка // Методы исслед. дифференц. и интегр. операторов. — Киев, 1989. — С. 13—18.
7. Баскаков А. Г., Кацаран Г. К. Спектральный анализ интегродифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. — 1988. — 24, № 8. — С. 1424—1433.
8. Бассоти Л. Линейные операторы, T-инвариантные относительно некоторой группы гооморфизмов // Успехи мат. наук. — 1988. — 43, № 1. — С. 57—85.
9. Лионс Ж.-Л., Маженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

10. Горбачук В. Н., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.
11. Гохберг Н. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1965.— 448 с.
12. Brouder R. F. Non-local elliptic boundary value problems // Amer. J. Math.— 1964.— 86, N 4.— P. 735—758.

Одержано 17.06.92