УДК 517.5

В. Г. Кротов (Белорус. ун-т , Минск)

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ФОРМА C-СВОЙСТВА ЛУЗИНА

We prove the following statement that is a quantitative form of the Lusin theorem on the C-property:

Let (X, d, μ) be a bounded metric space with a metric d and a regular Borel measure μ that are related by the doubling condition. Then for any function f measurable on X, there exist a positive increasing function $\eta \in \Omega$ ($\eta(+0) = 0$ and $\eta(t)t^{-a}$ decreases for some $a > 0$), a nonnegative function g measurable on X, and a set $E \subset X$, $\mu E = 0$, such that

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le \left[g(x) + g(y) \right] \eta\big(d(x, y)\big), \quad x, y \in X \backslash E.$$

If $f \in L^p(X)$, $p > 0$, then it is possible to choose g belonging to $L^p(X)$.

Доведено наступне твердження, яке є кількісною формою теореми Лузіна про C-властивість.

Нехай (X, d, μ) — обмежений метричний простір із метрикою d і регулярною борелевою мірою μ, що пов'язані умовою подвоєння. Тоді для будь-якої вимірної на X функції f існують додатна зростаюча функція $\eta \in \Omega$ ($\eta(+0) = 0$ і $\eta(t)t^{-a}$ спадає при деякому $a > 0$), вимірна на X невід'ємна функція g та множина $E \subset X$, $\mu E = 0$, для яких

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le \left[g(x) + g(y) \right] \eta\big(d(x, y)\big), \quad x, y \in X \backslash E.$$

Якщо $f \in L^p(X)$, $p > 0$, то можна вибрати $g \in L^p(X)$.

1. Введение. Пусть (X, d, μ) — ограниченное[1] метрическое пространство с метрикой d и регулярной борелевской мерой μ. Всюду ниже будем предполагать, что метрика d и мера μ связаны условием удвоения: существует постоянная $c_\mu > 0$ такая, что

$$\mu B(x, 2r) \le c_\mu \mu B(x, r), \qquad x \in X, \quad r > 0. \tag{1}$$

В таком случае тройку (X, d, μ) обычно называют пространством однородного типа [1]. Здесь

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

— шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$.

Для $a > 0$ обозначим через $\Omega(a)$ класс возрастающих функций η: $(0, 2] \to (0, +\infty)$, для которых $\eta(+0) = 0$ и $\eta(t)t^{-a}$ убывает. Кроме того, положим

$$\Omega = \bigcup_{a > 0} \Omega(a).$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любой измеримой на X функции f существуют $\eta \in \Omega$, измеримая на X неотрицательная функция g и множество $E \subset X$, $\mu E = 0$, для которых*

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le \left[g(x) + g(y) \right] \eta\big(d(x, y)\big), \quad x, y \in X \backslash E. \tag{2}$$

Теорема 1 является количественной формой теоремы Лузина в том смысле,

[1] Для упрощения изложения будем считать, что $\operatorname{diam} X = 1$.

что свойства функций g (точнее, свойства ее функции распределения) и η контролируют C-свойство Лузина.

В самом деле, пусть g и E определяются для f по теореме 1, $\lambda > 0$ и

$$E_\lambda = \{x \in X \backslash E : g(x) \le \lambda\}.$$

Тогда из (2) следует неравенство

$$|f(x) - f(y)| \le 2\lambda\eta(d(x, y)), \quad x, y \in E_\lambda,$$

которое означает равномерную непрерывность функции f множестве E_λ, и $2\lambda\eta(\delta)$ является оценкой модуля непрерывности f на этом множестве. При этом меру E_λ можно сделать сколь угодно близкой к мере X за счет выбора λ. Последнее следует из того, что для любой измеримой на X функции g выполнено соотношение

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mu\{|g| > \lambda\} = 0. \tag{3}$$

Опишем кратко структуру работы. В п. 2 приведены некоторые вспомогательные понятия и факты, доказательству теоремы 1 посвящен п. 3. Наконец, в п. 4 будет рассмотрена уточненная версия теоремы 1 (см. теорему 3) для пространств $L^p(X), p > 0$.

2. Вспомогательные понятия. Всюду далее через c мы обозначаем различные положительные постоянные, зависящие, возможно, от некоторых параметров, но эти зависимости для нас несущественны.

Кроме того, будем использовать обозначения

$$f_B = \fint_B f\, d\mu = \frac{1}{\mu B}\int_B f\, d\mu$$

для среднего значения функции $f \in L^1(B)$ по шару $B \subset X$. Для любого шара $B \subset X$ через r_B обозначим радиус B.

Если $x \in X$ и $0 < r < 2$, то обозначим

$$\mathcal{B}(x, r) = \{B : x \in B,\ r_B < r\}, \qquad \mathcal{B}(x) = \mathcal{B}(x, 2).$$

Пусть Φ — множество всех четных функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, положительных и возрастающих на $(0, +\infty)$, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0) = \varphi(+0) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = \infty,$$

Φ_1 — подкласс функций из Φ, для которых $\varphi(t)/t$ убывает.

Отметим, что для $\varphi \in \Phi_1$ функция $\varphi^{-1}(t)/t$ возрастает, т. е.

$$\frac{\varphi^{-1}(t)}{t} \le \frac{\varphi^{-1}(s)}{s} \quad \text{при} \quad 0 < t < s. \tag{4}$$

Кроме того, функции класса Φ_1 субаддитивны, т. е. при $\varphi \in \Phi_1$

$$\varphi(t + s) \le \varphi(t) + \varphi(s), \quad t, s > 0. \tag{5}$$

Если $\varphi \in \Phi$, то через $\varphi(L)$ будем обозначать множество измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\int\limits_X \varphi(f)\, d\mu\,.$$

Классы $\varphi(L)$ систематически изучены в работах П. Л. Ульянова (см., например, обзор [2]).

Если $\varphi \in \Phi_1$, то $\varphi(L)$ является (при отождествлении эквивалентных функций) полным метрическим пространством относительно метрики (см. (5))

$$d_{\varphi(L)}(f,\, g) \;=\; \int\limits_X \varphi(f-g)\, d\mu$$

и непрерывные функции плотны в нем (последнее стандартно следует из регулярности меры μ).

Если $0<p<\infty$ и $\varphi(t) = |t|^p$, то $\varphi(L)$ совпадает с обычным пространством $L^p(X)$; в таком случае используем стандартное обозначение для нормы

$$\|f\|_{L^p} \;=\; \|f\|_p \;=\; \left(\int\limits_X |f|^p\, d\mu\right)^{1/p}.$$

При $0<p<1$ эта величина не является нормой, но мы сохраняем обозначение и в этом случае.

Если для $p>0$ обозначить

$$p^* \;=\; \min\{1,\, p\}, \tag{6}$$

то

$$d_{L^p}(f,\, g) \;=\; \|f-g\|_{L^p}^{p^*}$$

является (при отождествлении эквивалентных функций) метрикой на $L^p(X)$.

Для $q>0$ ведем семейство максимальных функций Харди – Литтлвуда

$$M_q f(x) \;=\; \sup_{B\in\mathcal{B}(x)} \left(⨍_B |f|^q\, d\mu\right)^{1/q}.$$

Тогда $M_q f$ определены для каждой функции $f\in L^p_{\mathrm{loc}}(X)$ при $p\ge q$ и для них справедливы следующие оценки:

$$\left\|M_q f\right\|_{L^p(X)} \;\le\; c\|f\|_{L^p(X)}, \quad \text{если} \quad p>q>0. \tag{7}$$

Кроме того, для $f\in L^p(X)$ $M_p f$ не обязана принадлежать $L^p(X)$. Эти свойства являются следствиями свойств стандартной максимальной функции Харди – Литтлвуда M_1 (см., например, [3, с. 10 – 12]).

Отметим, что условие удвоения (1) было использовано нами в работе лишь для того, чтобы обеспечить свойство (7).

3. Доказательство теоремы 1. Ключевую роль в доказательстве играют некоторые максимальные функции. Пусть $\eta\in\Omega$, $\varphi\in\Phi_1$ и $f\in\varphi(L)$. Тогда обозначим

$$\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,\,r} f(x) \;=\; \sup_{B\in\mathcal{B}(x,\,r)} \frac{1}{\eta(r_B)} ⨍_B \varphi\big(f(x)-f(y)\big)\, d\mu(y), \quad 0<r<2, \tag{8}$$

и $\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,2} = \mathcal{N}^{\varphi}_{\eta}$. В случае $\eta(r) \equiv 1$ вместо $\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,r}$ будем писать $\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r}$.

История подобных максимальных операторов в случае $\varphi(t) = t^q$, $q > 0$, изложена в начале п. 4.

Функция g в теореме 1 будет строиться с помощью операторов (8), поэтому убедимся сначала в том, что $\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,r}f$ является μ-измеримой.

По теореме Н. Н. Лузина для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое измеримое множество $E_n \subset X$, что $\mu(X \backslash E_n) < 2^{-n}$ и сужение $f\big|_{E_n}$ непрерывно на E_n.

Зададим $\lambda > 0$ и покажем, что множество

$$E_n^{\lambda} = \left\{\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,r}f > \lambda\right\} \cap E_n$$

является измеримым. Для этого возьмем точку $x \in E_n^{\lambda}$, найдем шар $B \in \mathcal{B}(x, r)$ со свойством

$$⨍_B \varphi\big(f(x) - f(y)\big)\, d\mu(y) > \lambda\eta(r_B)$$

и положим

$$\varepsilon = \frac{1}{\eta(r_B)} ⨍_B \varphi\big(f(x) - f(y)\big)\, d\mu(y) - \lambda > 0.$$

После этого найдем $\delta > 0$ так, чтобы $B(x, \delta) \subset B$ и

$$\frac{\varphi\big(f(x) - f(z)\big)}{\eta\big(r(B)\big)} < \varepsilon \quad \text{при} \quad z \in B(x, \delta) \cap E_n.$$

Тогда при $z \in B(x, \delta) \cap E_n$ выполняется неравенство (см. также (5))

$$\frac{1}{\eta(r_B)} ⨍_B \varphi\big(f(z) - f(y)\big)\, d\mu(y) \geq \frac{1}{\eta(r_B)} ⨍_B \varphi\big(f(x) - f(y)\big)\, d\mu(y) -$$

$$- \frac{\varphi\big(f(x) - f(z)\big)}{\eta\big(r(B)\big)} > (\lambda + \varepsilon) - \varepsilon = \lambda.$$

Поэтому $B(x, \delta) \cap E_n \subset E_n^{\lambda}$. Это означает, что $E_n^{\lambda} = E_n \cap G$, где G — некоторое открытое множества и E_n^{λ} измеримо.

Осталось заметить, что если

$$E = X \backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

то $\mu E = 0$ и

$$\left\{\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,r}f > \lambda\right\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^{\lambda}\right) \cup \left(E \cap \left\{\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,r}f > \lambda\right\}\right),$$

причем все множества справа измеримы и $\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,r}f$ измерима.

Отметим также следующие простые неравенства:

$$\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r}f(x) \leq 2M_1(\varphi \circ f)(x), \quad \varphi \in \Phi_1, \quad f \in \varphi(L), \quad r > 0, \tag{9}$$

$$\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta,r}f(x) \leq \sup_{0<r<2} \frac{\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r}f(x)}{\eta(r)}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что существует функция $\psi \in \Phi_1$, для которой $f \in \psi(L)$. В самом деле, в силу (3) найдется последовательность $\lambda_k \uparrow \infty$ со свойствами

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_k > 2\lambda_{k-1}, \quad \mu\{|f| > \lambda_k\} < 2^{-k},$$

поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\mu\{|f| > \lambda_k\} < +\infty.$$

Определим функцию $\psi \in \Phi_1$ равенствами $\psi(t) = t$ на $[0, 1]$, $\psi(\lambda_k) = k$ при всех $k \geq 1$ и линейно интерполируем ψ на отрезках $[\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, $k \geq 1$. Тогда

$$\int_X \psi(f)\,d\mu = \left(\int_{\{|f|\leq 1\}} + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{\lambda_k<|f|\leq\lambda_{k+1}\}}\right)\psi(f)\,d\mu \leq$$

$$\leq \mu\{|f| \leq 1\} + \sum_{k=0}^{\infty} \psi(\lambda_{k+1})\mu\left\{\lambda_k < |f| \leq \lambda_{k+1}\right\} < +\infty.$$

Кроме того, из условия $\lambda_k > 2\lambda_{k-1}$ легко вывести, что $\psi \in \Phi_1$.

Обозначим теперь $\varphi(t) = \sqrt{\psi(t)}$, тогда $\varphi \in \Phi_1$ и

$$\mathcal{N}^{\varphi}_0 f(x) = \mathcal{N}^{\sqrt{\psi}}_0 f(x) \leq 2M_1(\varphi \circ f)(x)$$

почти всюду на X. Поскольку $\varphi \circ f = \sqrt{\psi} \circ f \in L^2(X)$, в силу неравенств (9) и (7) при $q = 1$ и $p = 2$

$$\left\|\mathcal{N}^{\varphi}_0 f\right\|_{L^2(X)} \leq c\|\varphi \circ f\|_{L^2(X)} = \|\psi \circ f\|^{1/2}_{L^1(X)}. \tag{11}$$

Используя это неравенство, покажем, что

$$\lim_{r\to+0}\left\|\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r} f\right\|_{L^2(X)} = 0. \tag{12}$$

Действительно, так как непрерывные функции плотны в $\psi(L)$ вследствие регулярности меры μ, для $\varepsilon > 0$ можно записать f в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in C(X)$ и $\|\psi \circ f_2\|_{L^1} < \varepsilon$. Тогда, используя (5) и (11), получаем

$$\varlimsup_{r\to+0}\left\|\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r}f\right\|_{L^2(X)} \leq \left(\varlimsup_{r\to+0}\left\|\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r}f_1\right\|_{L^2(X)} + \varlimsup_{r\to+0}\left\|\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r}f_2\right\|_{L^2(X)}\right) =$$

$$= \varlimsup_{r\to+0}\left\|\mathcal{N}^{\varphi}_{0,r}f_2\right\|_{L^2(X)} \leq c\|(\psi \circ f_2)\|^{1/2}_{L^1(X)} \leq c\sqrt{\varepsilon},$$

откуда и следует (12).

Используя (12), построим по индукции последовательность $t_n \downarrow 0$. Положим $t_0 = 2$ и если $t_0, \ldots, t_{n-1}$ уже определены, то выберем $t_n < t_{n-1}$ таким образом, чтобы

$$\left\| \mathcal{N}^{\varphi}_{0,t_n} f \right\|_{L^2(X)} < 2^{-n}. \tag{13}$$

Определим теперь функцию $\mathcal{X}$ равенством $\mathcal{X}(0) = 1$ и

$$\mathcal{X}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \quad \text{при} \quad t = t_n, \\ \text{линейна и непрерывна на} \quad [t_n, t_{n-1}], \end{cases} \qquad n \geq 1. \tag{14}$$

Тогда функция $\mathcal{X}$ возрастает, $\mathcal{X}(+0) = 0$ и $\mathcal{X} \in C(0, 1]$.

В качестве искомой функции η можно взять выпуклую мажоранту равномерного модуля непрерывности для $\mathcal{X}$ (см. [4, с.153, 154]), тогда $\eta \in \Omega(1) \subset \Omega$ и $\eta(t) \geq \mathcal{X}(t)$.

Далее определим нужные g и E. Используя неравенство (10), а также (13), получаем

$$\left\| \mathcal{N}^{\varphi}_{\eta} f \right\|_{L^2(X)} \leq \left\| \max_{n \geq 0} \sup_{t_{n+1} < t \leq t_n} \frac{\mathcal{N}^{\varphi}_{0,t} f}{\eta(r)} \right\|_{L^2(X)} \leq \left\| \max_{n \geq 0} \frac{\mathcal{N}^{\varphi}_{0,t_n} f}{\eta(t_{n+1})} \right\|_{L^2(X)} \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}^{\varphi}_{0,t_n} f}{\eta(t_{n+1})} \right\|_{L^2(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left\| (n+1)\, \mathcal{N}^{\varphi}_{0,t_n} f \right\|_{L^2(X)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, 2^{-n}.$$

Итак, $\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta} f \in L^2(X)$.

Положим

$$g = \varphi^{-1}\left(2\, \mathcal{N}^{\varphi}_{\eta} f(x)\right), \quad E = \{g = +\infty\}$$

и покажем, что построенные функции η, g и множество E являются искомыми.

Пусть $x, y \in X \setminus E$ и $r > d(x, y)$, тогда шар $B = B(x, r) \subset X$ содержит обе эти точки. Для любого z запишем очевидное неравенство (см. (5))

$$\varphi(|f(x) - f(y)|) \leq \varphi(|f(x) - f(z)|) + \varphi(|f(y) - f(z)|)$$

и проинтегрируем его по $z \in B$:

$$\varphi(|f(x) - f(y)|) \leq \fint_B \varphi(|f(x) - f(z)|) + \fint_B \varphi(|f(y) - f(z)|) \leq$$

$$\leq \eta(r)\left(\frac{1}{\eta(r)} \fint_B \varphi(|f(x) - f(z)|) + \frac{1}{\eta(r)} \fint_B \varphi(|f(y) - f(z)|) \right) \leq$$

$$\leq \eta(r)\left[\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta} f(x) + \mathcal{N}^{\varphi}_{\eta} f(y) \right].$$

Таким образом,

$$\varphi(|f(x) - f(y)|) \leq \eta(d(x, y))\left[\mathcal{N}^{\varphi}_{\eta} f(x) + \mathcal{N}^{\varphi}_{\eta} f(y) \right].$$

Применим к обеим частям этого неравенства обратную функцию φ^{-1} и используем неравенства (4):

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\le \varphi^{-1}\Big(\eta(d(x,y))\big[\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x)+\mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)\big]\Big) \le \\ &\le \eta(d(x,y))\,\varphi^{-1}\Big(\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x)+\mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)\Big) \le \\ &\le \eta(d(x,y))\,\varphi^{-1}\Big(2\max\big\{\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x),\,\mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)\big\}\Big) \le \\ &\le \eta(d(x,y))\Big[\varphi^{-1}\Big(2\,\mathcal{N}_\eta^\varphi f(x)\Big)+\varphi^{-1}\Big(2\,\mathcal{N}_\eta^\varphi f(y)\Big)\Big].\end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

4. Теорема Лузина в пространствах L^p, $p>0$. В этом пункте мы покажем, что для функций из $L^p(X)$, $p>0$, функция g в теореме 1 может быть выбрана в $L^p(X)$.

Здесь нам также понадобятся максимальные операторы, подобные $\mathcal{N}_\eta^\varphi$. Введем обозначения[2]

$$\mathcal{N}_{\eta,r}^q f(x) = \sup_{B\in\mathcal{B}(x,r)} \frac{1}{\eta(r_B)}\left(\,\fint_B |f(x)-f(y)|^q\,d\mu(y)\right)^{1/q}, \quad 0<r\le 2,$$

и $\mathcal{N}_{\eta,2}^q = \mathcal{N}_\eta^q$. В случае $\eta(r)\equiv 1$ вместо $\mathcal{N}_{\eta,r}^q$ будем писать $\mathcal{N}_{0,r}^q$. Измеримость $\mathcal{N}_{\eta,r}^q f$ доказывается точно так же, как и для $\mathcal{N}_{\eta,r}^\varphi f$.

При $q=1$ указанные операторы впервые появились в работах А. Кальдерона [5] и А. Кальдерона, Р. Скотта [6] в случае $X=\mathbb{R}^n$ для $\eta(t)=t^\alpha$, $0<\alpha\le$ ≤ 1. В [5, 6] рассматривались также более общие операторы, когда $\alpha>0$ и в определении $\mathcal{N}_\eta$ вместо $f(x)$ вычитается некоторый многочлен, степень которого зависит от α. Систематическому изучению максимальных функций такого вида на $\mathbb{R}^n$ посвящена монография [7].

Отметим также, что в неявном виде максимальные операторы $\mathcal{N}_\eta^1$ использовались также в работе К. И. Осколкова [8], которая посвящена изучению задачи П. Л. Ульянова о количественных оценках C-свойства Лузина для функций с заданной мажорантой L^p-модуля непрерывности.

Для любой функции $\eta\in\Omega(1)$ операторы $\mathcal{N}_\eta^1$ в случае $X=[0,1]^n$ впервые изучал В. И. Коляда [9, 10]. Мотивировкой для рассмотрения такого спектра характеристик η было расширение возможностей для более тонкой классификации функций по их локальной гладкости. Как показывает неравенство

$$|f(x)-f(y)| \le \big[\mathcal{N}_\eta^1 f(x)+\mathcal{N}_\eta^1 f(y)\big]\eta(d(x,y)), \quad x,y\in X, \tag{15}$$

$\mathcal{N}_\eta^1 f$ измеряет локальную гладкость функции f.

В случае общего метрического пространства X пространства функций, определяемые в терминах $\mathcal{N}_\eta^1$, изучались в работах [11] (в степенном случае $\eta(t)=t^\alpha$, $\alpha>0$) и в [12, 13]. Операторы $\mathcal{N}_\eta^q$ при любом $q>0$ рассматривались в [14].

---

[2] Эти обозначения отличаются от использованного выше для $\mathcal{N}_\eta^\varphi$ для степенных функций φ. Но так как п. 4 не зависит от предыдущих, это не должно привести к путанице.

Использование параметра q в определении $\mathcal{N}_\eta^q f$ дает возможность согласовать это определение с заданной степенью суммируемости f.

Для операторов $\mathcal{N}_\eta^q$ также выполняются неравенства локальной гладкости вида (2)

$$|f(x) - f(y)| \le c\left[\mathcal{N}_\eta^q f(x) + \mathcal{N}_\eta^q f(y)\right]\eta(d(x, y)), \quad x, y \in X. \tag{16}$$

Теорема 2. *Если* $f \in L^p(X)$ *и* $0 < q < p$, *то существует* $\eta \in \Omega$, *для которой* $\mathcal{N}_\eta^q f \in L^p(X)$.

Доказательство. Нам понадобятся следующие очевидные неравенства:

$$\mathcal{N}_{0,r}^q f(x) \le c\, M_q f(x), \tag{17}$$

$$\mathcal{N}_\eta^q f(x) \le \sup_{0<r<2} \frac{\mathcal{N}_{0,r}^q f(x)}{\eta(r)}. \tag{18}$$

Отметим, что для любой функции $f \in L^p(X)$

$$\lim_{r\to+0} \left\| \mathcal{N}_{0,r}^q f \right\|_{L^p(X)} = 0. \tag{19}$$

Это следует из неравенств (17), (7) и из того, что непрерывные функции плотны в $L^p(X)$ вследствие регулярности меры μ. В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и запишем f в виде $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in C(X)$ и $\|f_2\|_{L^p} < \varepsilon$. Тогда

$$\overline{\lim_{r\to+0}} \left\| \mathcal{N}_{0,r}^q f \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le c\left(\overline{\lim_{r\to+0}} \left\| \mathcal{N}_{0,r}^q f_1 \right\|_{L^p(X)}^{p^*} + \overline{\lim_{r\to+0}} \left\| \mathcal{N}_{0,r}^q f_2 \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \right) =$$

$$= c\, \overline{\lim_{r\to+0}} \left\| \mathcal{N}_{0,t}^q f_2 \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le c \left\| M_q f_2 \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le c \left\| f_2 \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le c\varepsilon^{p^*},$$

откуда и следует (19).

Использовав (19), построим по индукции последовательность $t_n \downarrow 0$. Положим $t_0 = 1$, и если $t_0, \ldots, t_{n-1}$ уже определены, то выберем $t_n < t_{n-1}$ таким образом, чтобы

$$\sup_{f\in K} \left\| \mathcal{N}_{0,t_n}^q f \right\|_{L^p(X)} < 2^{-n}. \tag{20}$$

Определим теперь функцию η так, как это было сделано в доказательстве теоремы 1 (см. равенство (14) и следующий за ним абзац).

Используя неравенство (18), а также (20), получаем (см. (6))

$$\left\| \mathcal{N}_\eta^q f \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le \left\| \max_{n\ge0} \sup_{t_{n+1}<r\le t_n} \frac{\mathcal{N}_{0,r}^q f}{\eta(r)} \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le \left\| \max_{n\ge0} \frac{\mathcal{N}_{0,t_n}^q f}{\eta(t_{n+1})} \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le$$

$$\le \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{N}_{0,t_n}^q f}{\eta(t_{n+1})} \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le \sum_{n=0}^{\infty} \left\| (n+1)\, \mathcal{N}_{0,t_n}^q f \right\|_{L^p(X)}^{p^*} \le \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p^*} 2^{-np^*}.$$

Теорема 2 доказана. При $p > q = 1$ она доказана в [15] другим способом.

Доказанное утверждение показывает, в частности, что максимальные операторы $\mathcal{N}_\eta^q$ дают полную классификацию функций из $L^p(X)$ по их локальной гладкости (см. неравенство (16)). Действительно, если обозначить

$$C_\eta^{p,q}(X) = \left\{f \in L^p(X) : \mathcal{N}_\eta^q f \in L^p(X)\right\},$$

то при любых $p > q > 0$

$$L^p(X) = \bigcup_{\eta \in \Omega} C_\eta^{p,q}(X).$$

Отметим, что при $q = p$ теорема 3 теряет силу. В самом деле, если функция f такова, что $f \in L^p(X)$, а $M_p f \notin L^p(X)$, то в силу неравенства

$$\mathcal{N}_\eta^p f(x) \geq \frac{cM_p f(x) - |f(x)|}{\eta(2)}$$

максимальная функция $\mathcal{N}_\eta^p f$ не принадлежит $L^p(X)$.

Следующее утверждение является непосредственным следствием теоремы 2 (см. еще неравенство (16)) и уточняет теорему 1 для функций из пространств $L^p(X)$.

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in L^p(X)$, $p > 0$, *существуют* $\eta \in \Omega$, *неотрицательная функция* $g \in L^p(X)$ *и множество* $E \subset X$, $\mu E = 0$, *для которых справедливо* (2).

1. *Coifman R. R., Weiss G.* Analyse harmonique non-commutative sur certain espaces homogenés // Lect. Notes Math. – 1971. – **242**. – P. 1 – 176.
2. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи мат. наук. – 1972. – **27**, № 2. – С. 3 – 52.
3. *Heinonen J.* Lectures on analysis on metric spaces. – New York: Springer, 2001.
4. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977.
5. *Calderon A. P.* Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions // Stud. Math. – 1972. – **44**. – P. 561 – 582.
6. *Calderon A. P., Scott R.* Sobolev type inequalities for $p > 0$ // Ibid. – 1978. – **62**. – P. 75 – 92.
7. *DeVore R., Sharpley R.* Maximal functions measuring local smoothness // Mem. Amer. Math. Soc. – 1984. – **47**. – P. 1 – 115.
8. *Осколков К. И.* Аппроксимативные свойства суммируемых функций на множествах полной меры // Мат. сб. – 1977. – **103**, № 4. – С. 563 – 589.
9. *Коляда В. И.* Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью // Докл. АН СССР. – 1987. – **293**, № 4. – С. 534 – 537.
10. *Kolyada V. I.* Estimates of maximal functions measuring local smoothness // Anal. math. – 1999. – **25**. – P. 277 – 300.
11. *Yang D.* New sharacterization of Hajłasz – Sobolev spaces on metric spaces // Sci. China. Ser. 1. – 2003. – **46**, № 5. – P.675 – 689.
12. *Иванишко И. А.* Оценки максимальных функций Кальдерона – Коляды на пространствах однородного типа // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2004. – **12**, № 1. – С. 64 – 67.
13. *Кротов В. Г.* Весовые L^p -неравенства для шарп-максимальных функций на метрических пространствах с мерой // Изв. НАН Армении. Математика. – 2006. – **41**, № 2. – С. 27 – 42.
14. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Обобщенное неравенство Пуанкаре – Соболева на метрических пространствах // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. – 2006. – **14**, № 1. – С. 51 – 61
15. *Иванишко И. А., Кротов В. Г.* Компактность вложений соболевского типа на метрических пространствах с мерой // Мат. заметки. – 2009. – **86**, № 6. – С. 829 – 844.

Получено 19.10.09