УДК 517.946

І. М. Конет

Інтегральні зображення розв'язків стаціонарних задач теплопровідності для обмежених багатошарових циліндричних тіл

(Представлено членом-кореспондентом НАН України М. О. Перестюком)

The exact analytical solution of a stationary heat problem for limited multilayer cylindrical solids is constructed by the method of integral transformations.

Стаціонарні крайові задачі феноменологічної теорії теплопровідності для багатошарових (кусково-однорідних) середовищ становлять значний теоретичний та практичний інтерес [1–4]. Питанням побудови методом інтегральних перетворень точних аналітичних розв'язків згаданих задач у декартовій, сферичній та циліндричній системах координат присвячені монографії [5–7]. Зокрема, в [7] розглянуто необмежені, напівобмежені та обмежені багатошарові за радіальною координатою циліндрично-кругові тіла. Стаціонарні температурні поля в необмежених кусково-однорідних за декартовою координатою циліндричних тілах побудовано в працях [8, 9].

Задача про структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$-шаровому циліндрично-круговому тілі математично зводиться до побудови обмеженого в області

$$D = \Bigg\{(r,\varphi,z)\colon r\in(0;R),\ R<\infty;\ \varphi\in[0;2\pi);\ z\in I_n^+=\bigcup_{j=1}^{n+1} I_j\equiv\bigcup_{j=1}^{n+1}(l_{j-1};l_j);\ l_0\geqslant 0;$$
$$l_k<l_{k+1};\ k=\overline{1,n};\ l_{n+1}\equiv l<\infty\Bigg\}$$

2π-періодичного щодо φ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь Пуассона [7]

$$\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]T_j-\chi_j^2T_j=-f_j(r,\varphi,z);\quad z\in I_j;\quad j=\overline{1,n+1},\quad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)T_1\Big|_{z=l_0}=g^0(r,\varphi),\qquad \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{22}^{n+1}\right)T_{n+1}\Big|_{z=l}=g^1(r,\varphi), \quad (2)$$

$$T_j(r,\varphi,z)\big|_{r=0}<\infty,\qquad \left(\frac{\partial}{\partial r}+\gamma h_r\right)T_j\Big|_{r=R}=h_rT_{jr}^c(\varphi,z)\equiv g_j(\varphi,z); \quad (3)$$

$$z\in I_j;\qquad j=\overline{1,n+1},$$

та умовами неідеального теплового контакту [10]

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(R_k \dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right) T_k - T_{k+1}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial T_k}{\partial z} - \nu_k^* \dfrac{\partial T_{k+1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0, \qquad k = \overline{1,n}, \qquad \nu_k^* = \dfrac{\nu_{k+1}}{\nu_k}. \end{array} \right. \tag{4}$$

Фізико-механічний зміст параметрів і функцій, які беруть участь у формулюванні задачі, розкрито в [7, 10].

Застосуємо до задачі (1)–(4) скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [7]. Інтегральний оператор Фур'є періодичній крайовій задачі (1)–(4) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого в області $D' = \{(r,z)\colon r \in (0;R); z \in I_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\right) + a_j^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] T_{jm} - \overline{\chi}_j^2 T_{jm} = -\overline{f}_{jm}(r,z); \quad z \in I_j; \quad j = \overline{1,n+1}, \tag{5}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right) T_{1m}\Big|_{z=l_0} = g_m^0(r), \qquad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right) T_{n+1,m}\Big|_{z=l} = g_m^1(r), \tag{6}$$

$$T_{jm}(r,z)\big|_{r=0} < \infty, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial r} + h\right) T_{jm}\Big|_{r=R} = g_{jm}(z); \tag{7}$$

$$z \in I_j; \qquad j = \overline{1,n+1}; \qquad h = \gamma h_r,$$

та умовами спряження

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(R_k \dfrac{\partial}{\partial z} + 1\right) T_{km} - T_{k+1,m}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\dfrac{\partial T_{km}}{\partial z} - \nu_k^* \dfrac{\partial T_{k+1,m}}{\partial z}\right)\Big|_{z=l_k} = 0, \qquad k = \overline{1,n}, \end{array} \right. \tag{8}$$

де $a_j^2 = a_{rj}^{-2} a_{zj}^2$, $\overline{\chi}_j^2 = a_{rj}^{-2} \chi_j^2$, $\overline{f}_{jm}(r,z) = a_{rj}^{-2} f_{jm}(r,z)$; $j = \overline{1,n+1}$.

До задачі (5)–(8) застосуємо інтегральне перетворення Ганкеля 1-го роду щодо радіальної змінної r [7]. Інтегральний оператор Ганкеля 1-го роду крайовій задачі (5)–(8) ставить у відповідність задачу про структуру обмеженого на множині I_n^+ розв'язку сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$\left[a_j^2 \frac{d^2}{dz^2} - (\beta_s^2 + \overline{\chi}_j^2)\right] T_{jms}(z) = -G_{jms}(z); \qquad z \in I_j; \qquad j = \overline{1,n+1}, \tag{9}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dz} + \beta_{11}^0\right) T_{1ms}\Big|_{z=l_0} = g_{ms}^0, \qquad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{d}{dz} + \beta_{22}^{n+1}\right) T_{n+1,ms}\Big|_{z=l} = g_{ms}^1 \tag{10}$$

та умовами спряження

$$\begin{cases} \left[\left(R_k \dfrac{d}{dz} + 1\right) T_{kms} - T_{k+1,ms}\right]\Big|_{z=l_k} = 0, \\ \left(\dfrac{dT_{kms}}{dz} - \nu_k^* \dfrac{dT_{k+1,ms}}{dz}\right)\Big|_{z=l_k} = 0, \qquad k = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{11}$$

де $G_{jms}(z) = \overline{f}_{jms}(z) + RJ_m(\beta_s R) g_{jm}(z)$; $j = \overline{1, n+1}$.

Обмежений розв'язок крайової задачі на спряження (9)–(11) побудуємо методом скінченного інтегрального перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0, l]$ з n точками спряження [5]:

$$F_{jn}[f(z)] = \int\limits_{l_0}^{l} f(z) V(z, \lambda_j) \sigma(z) dz \equiv f_j, \tag{12}$$

$$F_{jn}^{-1}[f_j] = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \frac{V(z, \lambda_j)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \equiv f(z), \tag{13}$$

$$F_{jn}\left[\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \Theta(z - l_{i-1}) \Theta(l_{i-1} - z) \frac{d^2 f}{dz^2}\right] \equiv \sum_{i=1}^{n+!} a_i^2 \int\limits_{l_0}^{l} \frac{d^2 f}{dz^2} V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz =$$

$$= -\lambda_j^2 f_j - \sum_{i=1}^{n+!} \gamma_i^2 \int\limits_{l_{i-1}}^{l_i} f(z) V_i(z, \lambda_j) \sigma_i dz - a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_j) \left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dz} + \beta_{11}^0 f\right)\Big|_{z=l_0} +$$

$$+ a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_j) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dz} + \beta_{22}^{n+1} f\right)\Big|_{z=l}. \tag{14}$$

У рівностях (12)–(14) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_j) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_j) \Theta(z - l_{i-1}) \Theta(l_i - z); \qquad \sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i^{\Theta}(z - l_{i-1}) \Theta(l_i - z);$$

$$\|V(z, \lambda_j)\|^2 \equiv \int\limits_{l_0}^{l} V^2(z, \lambda_j) \sigma(z) dz = \sum_{i=1}^{n+1} \int\limits_{l_{i-1}}^{l_i} V_i^2(z, \lambda_j) \sigma_i dz,$$

$$V_m(z, \lambda_j) = \prod_{i=m}^{n} c_{2i} q_{i+1,j} [w_{m-1,2}(\lambda_j) \cos(q_{mj} z) - w_{m-1,1}(\lambda_j) \sin(q_{mj} z)], \qquad m = \overline{1,n};$$

$$V_{n+1}(z, \lambda_j) = w_{n2}(\lambda_j) \cos(q_{n+1,j} z) - w_{n1}(\lambda_j) \sin(q_{n+1,j} z), \qquad c_{1k} = 1, \qquad c_{2k} = \nu_k^* > 0,$$

$$q_{sj} = a_s^{-1} (\lambda_j^2 + \gamma_s^2)^{1/2} \equiv a_s^{-1} b_{sj}; \quad \sigma_k = \prod_{j=k}^{n} \frac{1}{\nu_j^*} \frac{a_{n+1}}{a_k^2}, \quad \sigma_n = \frac{1}{\nu_n^*} \frac{a_{n+1}}{a_n^2}, \quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}};$$

$$v_{11}^{k1}(q_{sj} l_k) = -R_k q_{sj} \sin(q_{sj} l_k) + \cos(q_{sj} l_k); \qquad v_{21}^{k1}(q_{sj} l_k) = -q_{sj} \sin(q_{sj} l_k);$$

$$v_{11}^{k2}(q_{sj}l_k) = R_k q_{sj}\sin(q_{sj}l_k) + \sin(q_{sj}l_k); \qquad v_{21}^{k2}(q_{sj}l_k) = q_{sj}\cos(q_{sj}l_k);$$

$$v_{12}^{k1}(q_{sj}l_k) = \cos(q_{sj}l_k); \qquad v_{12}^{k2}(q_{sj}l_k) = \sin(q_{sj}l_k);$$

$$v_{22}^{k1}(q_{sj}l_k) = -\nu_k^* q_{sj}\sin(q_{sj}l_k); \qquad v_{22}^{k2}(q_{sj}l_k) = \nu_k^* q_{sj}\cos(q_{sj}l_k);$$

$$\delta_{sm}^k(q_{kj}l_k, q_{k+1,j}l_k) = v_{11}^{ks}(q_{kj}l_k)v_{22}^{km}(q_{k+1,j}l_k) - v_{21}^{ks}(q_{kj}l_k)v_{12}^{km}(q_{k+1,j}l_k);$$

$$w_{01}(\lambda_j) = v_{11}^{01}(q_{1j}l_0); \qquad w_{02}(\lambda_j) = v_{11}^{02}(q_{1j}l_0); \qquad q_s = a_s^{-1}(\lambda^2 + \gamma_s^2)^{1/2};$$

$$w_{sm}(\lambda_j) = w_{s-1,2}(\lambda_j)\delta_{1m}^s(q_{sj}l_s, q_{s+1,j}l_s) - w_{s-1,1}(\lambda_j)\delta_{2m}^s(q_{sj}l_s, q_{s+1,j}l_s);$$

$\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда, λ_j — утворюючі дискретний спектр корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}l)w_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}l)w_{n2}(\lambda) = 0.$$

Запишемо систему диференціальних рівнянь (9) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(a_1^2 \dfrac{d^2}{dz^2} - \beta_s^2 - \overline{\chi}_1^2\right) T_{1ms}(z) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(a_{n+1}^2 \dfrac{d^2}{dz^2} - \beta_s^2 - \overline{\chi}_{n+1}^2\right) T_{n+1,ms}(z) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} G_{1ms}(z) \\ \dots\dots\dots \\ G_{n+1,ms}(z) \end{bmatrix} \tag{15}$$

і зобразимо інтегральний оператор F_{jn}, який діє за правилом (12), у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{jn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z,\lambda_j)\sigma_1\,dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z,\lambda_j)\sigma_2\,dz \dots\right.$$
$$\left. \dots \int_{l_{n-1}}^{l_n} \dots V_n(z,\lambda_j)\sigma_n dz \int_{l_n}^{l} \dots V_{n+1}(z,\lambda_j)\sigma_{n+1} dz\right]. \tag{16}$$

За правилом множення матриць застосуємо операторну матрицю-рядок (16) до системи (15). Внаслідок тотожності (14) одержуємо алгебраїчне рівняння

$$\sum_{i=1}^{n+1}(\lambda_j^2 + \gamma_i^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_i^2)T_{imsj} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} G_{imsj} - a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\lambda_j)g_{ms}^0 + a_{n+1}^2\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_j)g_{ms}^1, \tag{17}$$

де

$$T_{imsj} = \int_{l_{i-1}}^{l_i} T_{ims}(z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz; \qquad G_{imsj} = \int_{l_{i-1}}^{l_i} G_{ims}(z)V_i(z,\lambda_j)\sigma_i dz; \qquad i = \overline{1, n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\{\overline{\chi}_j^2\} = \overline{\chi}_1^2$ і покладемо всюди $\gamma_1^2 = 0$, $\gamma_j^2 = \overline{\chi}_1^2 - \overline{\chi}_j^2 \geqslant 0$, $j = \overline{2, n+1}$. Рівняння (17) набуває вигляду

$$(\lambda_j^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_1^2) T_{msj} =$$
$$= G_{msj} - a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(l_0, \lambda_j) g_{ms}^0 + a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_j) g_{ms}^1, \qquad (18)$$

де $T_{msj} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} T_{imsj}$, $G_{msj} = \sum\limits_{i=1}^{n+1} G_{imsj}$.

Із рівняння (18) знаходимо функцію

$$T_{msj} = \frac{G_{msj}}{\lambda_j^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) g_{ms}^0}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_1^2)} + \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l, \lambda_j) g_{ms}^1}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_1^2)}. \qquad (19)$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{jn} та F_{jn}^{-1} є одиничним оператором, то

$$F_{jn}^{-1}[\ldots] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{\infty} V_1(z, \lambda_j) \|V(z, \lambda_j)\|^{-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{j=1}^{\infty} V_{n+1}(z, \lambda_j) \|V(z, \lambda_j)\|^{-2} \end{bmatrix}. \qquad (20)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (20) до матриці-елемента $[T_{msj}]$, де функція T_{msj} визначена формулою (19). Одержуємо єдиний обмежений розв'язок задачі (9)–(11):

$$T_{ims}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \Bigg[\Bigg(\frac{G_{msj}}{\lambda_j^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_1^2} - \frac{a_1^2 \sigma_1 V_1(l_0, \lambda_j) g_{ms}^0}{\alpha_{11}^0 (\lambda_j^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_1^2)} +$$
$$+ \frac{a_{n+1}^2 \sigma_{n+1} V_{n+1}(l_0, \lambda_j) g_{ms}^1}{\alpha_{22}^{n+1} (\lambda_j^2 + \beta_s^2 + \overline{\chi}_1^2)} \Bigg) \frac{V_i(z, \beta)}{\|V(z, \lambda_j)\|^2} \Bigg]; \qquad i = \overline{1, n+1}. \qquad (21)$$

Послідовно застосувавши до функцій $T_{ims}(z)$, визначених формулами (21), обернені оператори Ганкеля 1-го роду та Фур'є, одержимо функції

$$T_i(r, \varphi, z) = \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{ik}(r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) f_k(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho +$$
$$+ a_{ri}^2 \int_0^R \int_0^{2\pi} [W_i^0(r, \rho, \varphi - \alpha, z) g^0(\rho, \alpha) + W_i^1(r, \rho, \varphi - \alpha, z) g^1(\rho, \alpha)] \rho d\alpha d\rho +$$
$$+ a_{ri}^2 \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{2\pi} \int_{l_{k-1}}^{l_k} W_{ik}(r, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k(\alpha, \xi) \sigma_k d\xi d\alpha; \qquad j = \overline{1, n+1}, \qquad (22)$$

які описують структуру стаціонарного температурного поля в ортотропному обмеженому $(n+1)$-шаровому суцільному циліндрично-круговому тілі.

У формулах (22) беруть участь: компоненти фундаментальної матриці розв'язків

$$E_{ik}(r,\rho,\varphi,z,\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m E_{ik,m}(r,\rho,z,\xi)\cos(m\varphi);$$

компоненти нижньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^0(r,\rho,\varphi,z) = -a_1^2\sigma_1(\alpha_{11}^0)^{-1}E_{i1}(r,\rho,\varphi,z,l_0);$$

компоненти верхньої аплікатної матриці Гріна

$$W_i^1(r,\rho,\varphi,z) = a_{n+1}^2\sigma_{n+1}(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}E_{i,n+1}(r,\rho,\varphi,z,l);$$

компоненти радіальної матриці Гріна

$$W_{ik}(r,\varphi,z,\xi) = RE_{ik}(r,R,\varphi,z,\xi),$$

еліптичної крайової задачі (1)–(4), де

$$E_{ik,m}(r,\rho,z,\xi) = \frac{1}{2\pi a_{ri}^2}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{J_m(\beta_s r)J_m(\beta_s\rho)V_i(z,\lambda_i)V_k(\xi,\lambda_i)}{(\lambda_j^2+\beta_s^2+\overline{\chi}_1^2)\|J_m(\beta_s r)\|^2\|V(z,\lambda_i)\|^2}.$$

Теорема. *Припустимо, що: 1) функції $f_k(r,\varphi,z)$, $k=\overline{1,n+1}$, неперервні, мають обмежену варіацію за кожною змінною на множинах $\{(r,\varphi,z)\colon r\in(0;R);\varphi\in[0;2\pi);z\in I_k\}$ та обмежені при $r=0$; 2) функції $f_k(r,\varphi,z)$, $g_k(\varphi,z)$, $k=\overline{1,n+1}$, задовольняють умови неідеального теплового контакту; 3) функції $g^0(r,\varphi)$, $g^1(r,\varphi)$ неперервні, мають обмежену варіацію за кожною змінною на множині $\{(r,\varphi)\colon r\in(0;R);\ \varphi\in[0;2\pi)\}$ та обмежені при $r=0$; 4) функції $g_k(\varphi,z)$, $k=\overline{1,n+1}$, неперервні і мають обмежену варіацію за кожною змінною на множинах $\{(\varphi,z)\colon \varphi\in[0;2\pi);\ z\in I_k\}$. Тоді в класі двічі неперервно диференційовних в області D "вектор-функцій" $u(r,\varphi,z)=\{u_1(r,\varphi,z),u_2(r,\varphi,z),\dots,u_{n+1}(r,\varphi,z)\}$, що задовольняють умови 1, єдиний обмежений розв'язок еліптичної крайової задачі* (1)–(4) *визначається формулами* (22).

Зауваження 1. Якщо деякі з коефіцієнтів термоопору R_k дорівнюють нулю, то безпосередньо з формул (22) одержуємо інтегральне зображення розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності у випадку здійснення на відповідних площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 2. При $R_k=0(k=\overline{1,n})$ безпосередньо з формул (22) одержуємо інтегральне зображення розв'язку стаціонарної задачі теплопровідності у випадку здійснення на всіх площинах $z=l_k$ ідеального теплового контакту.

Зауваження 3. У випадку $a_{rj}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2>0$ формули (22) визначають структуру стаціонарного температурного поля в ізотропному обмеженому $(n{+}1)$-шаровому суцільному циліндрично-круговому тілі.

Зауваження 4. Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0;\alpha_{22}^{n+1},\beta_{22}^{n+1};h$ дають можливість виділяти з формул (22) інтегральні зображення розв'язків періодичних крайових задач (1)–(4) у випадках задання на поверхнях $z=l_0, z=l, r=R$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.

Таким чином, при найбільш загальних припущеннях у межах феноменологічної теорії теплопровідності побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків стаціонарних задач в обмежених багатошарових циліндричних тілах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів та даних задачі й можуть бути використані як в теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків.

1. *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
2. *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
3. *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432 с.
4. *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614 с.
5. *Ленюк М. П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – 188 с.
6. *Конет І. М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – 209 с.
7. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. – Чернівці: Прут, 2001. – 312 с.
8. *Конет І. М.* Температурні поля в двоскладових циліндричних тілах // Наук. праці Кам'янець-Подільськ. держ. пед. ун-ту: В 2 т. – Кам'янець-Подільський, 2002. – Т. 2. – С. 18–24.
9. *Конет І. М., Ленюк М. П.* Температурні поля в необмежених тришарових циліндричних областях. – Львів, 2003. – 54 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 03.01).
10. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.

Кам'янець-Подільський державний університет *Надійшло до редакції 03.10.2006*

УДК 512.4

Я. В. Лавренюк, В. И. Сущанский

Нормальное строение группы локальных изометрий границы сферически однородного дерева

(Представлено членом-корреспондентом НАН Украины Н. А. Перестюком)

The normal structure of the locally isometry group $\mathrm{LIsom}\,\partial T$ *of a spherically homogeneous tree boundary is investigated. It is proved that every closed normal subgroup of this group contains a commutant of* $\mathrm{LIsom}\,\partial T$. *The quotient of* $\mathrm{LIsom}\,\partial T$ *by its commutant is found.*

Пусть (T, v_0) — локально конечное дерево с корнем v_0, $V(T)$ — множество его вершин. Расстоянием $d(u, v)$ между вершинами u, $v \in V(T)$ называется длина (число звеньев) кратчайшего пути, соединяющего u, v. Сферой радиуса n (иначе, n-уровнем) корневого дерева (T, v_0) называется множество $V_n(T) = \{v \in V(T) \mid d(v_0, v) = n\}$. В частности, $V_0(T) = \{v_0\}$. Дерево T называется сферически однородным, если валентность каждой его вершины зависит лишь от радиуса сферы, содержащей эту вершину. Сферически однородное дерево T однозначно (с точностью до изоморфизма) характеризуется своим сферическим индексом —