УДК 519.21

Б. Мередов, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СХОДИМОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

The domains of convergence and analyticity of Maclaurin and Laurent random power series are found.

Знайдено області збіжності та аналітичності випадкових степеневих рядів Маклорена і Лорана.

1. Введение. Пусть $\{\xi_k = \eta_k + i\zeta_k,\ k \in Z\ (Z - \text{целые числа})\}$ – последовательность независимых комплекснозначных одинаково распределенных случайных величин, $\{a_k,\ k \in Z\}$ – последовательность комплексных чисел.

Рассмотрим степенные ряды

$$\Xi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$\Xi_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \xi_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

где $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость.

В работах [1 – 6] исследованы различные вопросы теории случайных степенных рядов с независимыми случайными коэффициентами, среди которых и ряды (1), (2), но неслучайные ряды Лорана. В частности, в работе [5] доказано, что для любого $a > 1$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\frac{\ln|\xi_1|}{\ln a} > k\right\}$$

сходится тогда и только тогда, когда $M\ln_+|\xi_1| < \infty$, где

$$\ln_+|\xi_1| = \begin{cases} \ln\xi_1 & \text{при } \xi_1 \in [1; +\infty); \\ 0 & \text{при } \xi_1 \in (-\infty, 1). \end{cases}$$

Цель этой статьи — нахождение конкретных областей сходимости и аналитичности рядов (1) и (2).

В дальнейшем сходимость рядов (1) и (2) будет пониматься в смысле сходимости с вероятностью 1.

2. О кругах сходимости ряда (1). В зависимости от поведения последовательностей ξ_k и a_k круг сходимости ряда (1) будет различен.

В дальнейшем радиус сходимости ряда (1) обозначим через R, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = q$.

Теорема 1. 1) *Если* $0 < q < \infty$, *то*

$$R = \begin{cases} 1/q & \textit{при } M\ln_+|\xi_1| < \infty; \\ 0 & \textit{при } M\ln_+|\xi_1| = +\infty. \end{cases}$$

2) *Если* $q = \infty$, *то* $R = 0$. 3) *Если* $q = 0$, *то положим*

$$b = \sup\left\{r > 0:\ \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\ln|\xi_1| > \ln\frac{1}{|a_k|} - k\ln r\right\} < \infty\right\}.$$

Тогда $R = b$.

Если $\ln(1/|a_n|) = f(n)$ *и* $f(x)$ — *монотонно возрастающая, непрерывно* *дифференцируемая функция такая, что* $f'(x)\uparrow\infty$ *при* $x\to\infty$ *и* $\ln(1/|a_n|)=f(n)$, *то*

$$R=\begin{cases}\infty & \text{при } M f^{-1}\left(\ln_+|\xi_1|\right)<\infty;\\ 0 & \text{при } M f^{-1}\left(\ln_+|\xi_1|\right)=+\infty,\end{cases}$$

где $f^{-1}(x)$ *– функция, обратная функции* $f(x)$.

Доказательство. Пусть $0<q<\infty$ и $M\ln_+|\xi_1|<\infty$. Тогда существует $\varepsilon<1$ такое, что для всех $k=0,1,2,\dots$ при $|z|<1/q$ $|a_k z^k|<\varepsilon^k$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\varepsilon^k$ сходится при $|\varepsilon|<1$ в силу условия $M\ln_+|\xi_1|<\infty$ (по этому поводу см. [5]). Если $|z|>1/q$, то существует последовательность $n_k\to\infty$ при $k\to\infty$ такая, что $|a_{n_k}|\,|z|^{n_k}>1$. Значит,

$$|a_{n_k}z^{n_k}\xi_{n_k}|\not\to 0$$

по вероятности. Следовательно, при $|z|>1/q$ ряд (1) расходится.

Пусть $|z|>b$. Выберем $r\in(b,|z|)$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\ln|\xi_1|>\ln\frac{1}{|a_k|}-k\ln r\right\}=+\infty.$$

Значит, согласно теореме Бореля – Кантелли найдется с вероятностью 1 такая случайная подпоследовательность n_k, что $\ln|\xi_{n_k}|>\ln(1/|a_{n_k}|)-n_k\ln r$ или $|a_{n_k}|r^{n_k}|\xi_{n_k}|>1$, но тогда $|a_{n_k}\xi_{n_k}z^{n_k}|>(z/r)^{n_k}\to\infty$, так что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}a_k\xi_k z^k$ расходится с вероятностью 1. Если $|z|<b$, то выбирая $|z|<r<b$, имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\ln|\xi_1|>\ln\frac{1}{|a_k|}-k\ln r\right\}<\infty.$$

Значит, последовательность $a_k\xi_k n^k$ ограничена с вероятностью 1 согласно теореме Бореля – Кантелли. Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|a_k\xi_k z^k\right|\le\sup_k\left|a_k\xi_k r^k\right|\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{r}\right)^k<\infty.$$

Пусть $Mf^{-1}(\ln_+|\xi_1|)<\infty$. Тогда для любого $0<a<1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{f^{-1}(\ln|\xi_1|)>ak\right\}<\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\ln|\xi_1|>f(ak)\right\}<\infty. \tag{3}$$

Пусть $c>0$ произвольно. Для достаточно больших k в силу монотонности $f'(x)$ и условия $f'(x)\uparrow\infty$ $f(k)-f(ak)\ge f'(ak)(1-a)k>ck$. Поэтому из (3) получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\ln|\xi_1|>f(k)-ck\right\}<\infty.$$

Из произвольности c вытекает, что $R = \infty$. Если $Mf^{-1}(\ln_+|\xi_1|) = +\infty$, то для $a > 1$ будем иметь

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\{\ln|\xi_1| > f(ak)\} = +\infty.$$

Для достаточно больших k $f(ak) > f(k) + ck$, каково бы ни было c. Значит,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\ln|\xi_1| > f(k) + ck\right\} = +\infty$$

для всех c. Поэтому $R = 0$. Теорема 1 доказана.

Для случая $q = 0$ приведем пример, который показывает, что $0 < R < \infty$.

Пример. Пусть дискретная случайная величина ξ_1 имеет распределение

$$P\{\ln|\xi_1| = x_i\} = \frac{1}{2^i},$$

$$x_{2^k} = k\,2^k, \quad x_{2^k} < x_{2^k+1} < \ldots < x_{2^{k+1}-1} = (k + 1/k)2^k.$$

Тогда $0 < R < \infty$.

Действительно, пусть $\ln(1/|a_n|) = x_n$, $P\{\ln|\xi_1| > x_n\} = 1/2^n$. Тогда для $\alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left\{\ln|\xi_1| > x_n - \alpha n\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} P\{\ln|\xi_1| > x_i - \alpha i\} \geq$$

$$\geq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} P\left\{\{\ln|\xi_1| > \left(k + \frac{1}{k}\right)2^k - \alpha 2^k\right\} \geq \sum_{1/k<\alpha} 2^k P\left\{\ln|\xi_1| > k\,2^k\right\} =$$

$$= \sum_{1/k<\alpha} 2^k \frac{1}{2^k} = +\infty.$$

3. Об областях аналитичности ряда (1). В дальнейшем $S_t(0)$ будет означать круг радиуса t с центром в точке 0, $\tilde{\xi}_k$ — симметризации величин ξ_k, а R^* — радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{\xi}_k z^k$. Положим

$$b^* = \sup\left\{r > 0,: \sum_{k=0}^{\infty} P\left\{\ln\left|\tilde{\xi}_1\right| > \ln\frac{1}{|a_k|} - k\ln r\right\} < \infty\right\},$$

$$m_k = M\left(\eta_1 R^k I_{\{|\eta_1 R^k| \leq 1\}}\right) + iM\left(\zeta_1 R^k I_{\{|\zeta_1 R^k| \leq 1\}}\right).$$

Теорема 2. *Пусть G_f — область, на которую аналитически продолжается функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k m_k z^k$.*

1. *Пусть $0 < q < \infty$, $M\ln_+|\xi_1| < \infty$, $R^* > 1/q$. Тогда область аналитичности $\Xi_1(z)$ определяется равенством*

$$G_{\Xi_1} = S_{R^*}(0) \cap G_f. \tag{4}$$

Если же $0 < q < \infty$, $M\ln_+|\xi_1| = +\infty$, то положим $R^* > 0$. Тогда справедливо равенство (4) *с данным радиусом.*

2. *Пусть $q = \infty$. Тогда справедливо равенство* (4) *с радиусом $R^* > 0$.*

3. *Пусть $q = 0$.*

Если $b^* > b$, то

$$G_{\Xi_1} = S_{b^*}(0) \cap G_f. \tag{5}$$

Если $Mf^{-1}(\ln_+|\xi_1|) < \infty$, *то положим* $b^* > b$, $b = \infty$. *Тогда*

$$G_{\Xi_1} = \mathbb{C} \cap G_f.$$

Если же $M f^{-1}(\ln_+|\xi_1|) = +\infty$, *то положим* $b^* > 0$. *Тогда справедливо равенство* (5) *с данным радиусом.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из общей теоремы из [6] с учетом теоремы 1.

4. О кольцах сходимости ряда (2). Определим различные кольца сходимости ряда (2). Допустим, что неслучайный ряд Лорана

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

сходится в некотором кольце $Q_1 < |z| < Q_2$, где $0 \le Q_1 \le \infty$, $0 \le Q_2 \le \infty$. Это кольцо может оказаться пустым, если $Q_1 > Q_2$, а в случае $Q_1 = Q_2$ множеством сходимости может служить любое множество на окружности $|z| = Q_1$. Поэтому при формулировке теоремы мы будем учитывать это обстоятельство.

Через $K(Q_1, Q_2)$ обозначим кольцо сходимости ряда (2).

Теорема 3. *Пусть неслучайный ряд Лорана* (6) *сходится в кольце* $Q_1 < |z| < Q_2$. 1. *Пусть* $Q_2 > Q_1$, $0 < Q_1 < \infty$, $0 < Q_2 < \infty$. *Тогда*

$$K(Q_1, Q_2) = \begin{cases} Q_1 < |z| < Q_2, & \text{если } M\ln_+|\xi_1| < \infty; \\ \varnothing, & \text{если } M\ln_+|\xi_1| = +\infty. \end{cases}$$

2. *Пусть* $0 < Q_1 < \infty$, $Q_2 = \infty$. *Тогда*

$$K(Q_1, Q_2) = \begin{cases} Q_1 < |z| < Q_2, & \text{если } M\ln_+|\xi_1| < \infty; \\ \{|z| < b\} \setminus \{0\}, & \text{если } M\ln_+|\xi_1| = +\infty. \end{cases}$$

Это кольцо можно конкретизировать с целью дополнительных условий, а именно:

$$K(Q_1, Q_2) = \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{|z| \le Q_1\}, & \text{если } M\ln_+|\xi_1| < \infty, \quad Mf^{-1}(\ln_+|\xi_1|) < \infty; \\ \mathbb{C} \setminus \{0\}, & \text{если } M\ln_+|\xi_1| = +\infty, \quad Mf^{-1}(\ln_+|\xi_1|) < \infty; \\ \varnothing, & \text{если } M\ln_+|\xi_1| < \infty, \quad Mf^{-1}(\ln_+|\xi_1|) = +\infty. \end{cases}$$

Доказательство. Приведем доказательство п. 1. Пусть $M\ln_+|\xi_1| < +\infty$. Тогда согласно теореме 1 регулярная часть ряда (2) имеет радиус сходимости $Q_2 = 1/q$. Поскольку главная часть ряда (2) $\sum_{k<0} a_k \xi_k z^k$ представляет собой случайный степенной ряд относительно переменной $x = 1/z$, то по той же теореме он будет сходиться при $|x| > 1/Q_1$, т. е. всюду вне круга $|z| > Q_1$. Тогда, учитывая, что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \xi_k z^k = \sum_{k<0} a_k \xi_k z^k + \sum_{k \ge 0} a_k \xi_k z^k, \tag{7}$$

отсюда заключаем, что $K(Q_1, Q_2)$ есть пересечение областей его главной и регулярной частей, т. е. кольцо $Q_1 < |z| < Q_2$. Если же $M\ln_+|\xi_1| < +\infty$, то, учитывая теорему 1, имеем $K(Q_1, Q_2) = \varnothing$. Доказательство п. 2 проводится аналогично, только следует учесть теорему 1.

5. Об областях аналитичности ряда (2). Обозначим через T и T^* радиусы сходимости рядов $\sum_{k<0} a_k \xi_k z^k$ и $\sum_{k<0} a_k \bar{\xi}_k z^k$ соответственно.

Положим

$$d_k = M\left(\eta_1 T^k I_{\{|\eta_1 T^k| \le 1\}}\right) + iM\left(\zeta_1 T^k I_{\{|\zeta_1 R^k| \le 1\}}\right).$$

Через $\bar{S}_t(0)$ обозначим дополнение круга $S_t(0)$ до пространства $\mathbb{C}$.

Теорема 4. *Пусть* G_f *и* G_y — *области, куда аналитически продолжаются функции* $f(z) = \sum_{k\ge 0} a_k m_k z^k$ *и* $y(z) = \sum_{k<0} a_k d_k z^k$.

1. *Пусть* $Q_1 < Q_2$, $0 < Q_1 < \infty$, $0 < Q_2 < \infty$, $M \ln|\xi_1| < \infty$, $T^* < Q_1$, $R^* > Q_2$. *Тогда область аналитичности* $\Xi_2(z)$ *имеет вид*

$$G_{\Xi_2} = \left(\bar{S}_{T^*}(0) \cap G_y\right) \cap \left(S_{R^*}(0) \cap G_f\right).$$

2. *Пусть* $0 < Q_1 < \infty$, $Q_2 = \infty$.

Если $M \ln|\xi_1| < \infty$, *то положим* $T^* < Q_1$, $b^* > b$. *Тогда*

$$G_{\Xi_2} = \left(\bar{S}_{T^*}(0) \cap G_y\right) \cap \left(S_{b^*}(0) \cap G_f\right).$$

Если $M \ln_+|\xi_1| < \infty$, $M f^{-1}(\ln_+|\xi_1|) < \infty$, *то положим* $T^* < Q_1$, $b^* > R$, $R = \infty$. *Тогда*

$$G_{\Xi_2} = \left(\bar{S}_{T^*}(0) \cap G_y\right) \cap (\mathbb{C} \cap G_f).$$

Доказательство. Приведем доказательство п. 1 (п. 2 доказывается аналогично).

Так как $0 < Q_2 < \infty$, $M \ln|\xi_1| < \infty$, $R^* > Q_2$, то согласно теореме 2

$$G_{\Xi_1} = S_{R^*}(0) \cap G_f. \tag{8}$$

Как видно из (8), для описания области аналитичности ряда (1) нужно найти область аналитичности ряда из симметризованных величин (она есть круг с центром в точке 0, радиус эффективно вычисляется по одномерным распределениям) и из него выбрасываются особые точки ряда $\sum_{k\ge 0} a_k m_k z^k$ с постоянными коэффициентами.

Если $0 < Q_1 < \infty$, $M \ln|\xi_1| < \infty$, $T^* < Q_1$, то аналогично для области аналитичности $\Xi_0(z) = \sum_{k<0} a_k \xi_k z^k$ справедливо представление

$$G_{\Xi_0} = \bar{S}_{T^*}(0) \cap G_y. \tag{9}$$

Поэтому из (7) – (9) получаем

$$G_{\Xi_2} = G_{\Xi_0} \cap G_{\Xi_1} = \left(\bar{S}_{T^*}(0) \cap G_y\right) \cap \left(S_{R^*}(0) \cap G_f\right).$$

Теорема 4 доказана.

1. *Кохан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. – М.: Мир, 1973. – 301 с.
2. *Вишишин Я. Ф. Морока В. А.* О функции распределения сумм независимых случайных величин // Избранные задачи современной теории случайных процессов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 30 – 37.
3. *Вишишин Я. Ф., Морока В.А.* О функции распределения суммы случайного степенного ряда с произвольно распределенными коэффициентами // Бесконечномерный стохастический анализ. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 23 – 31.
4. *Мередов Б.* Степенные ряды со случайными коэффициентами // Тез. докл. УІ Сов.-Япон. симп. по теории вероятностей и мат. статистике (Киев, 5 – 10 авг. 1991 г.).– Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 103.
5. *Мередов Б.* Случайные степенные ряды // Стохастические уравнения и граничные теоремы. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1991. – С. 107 – 117.
6. *Мередов Б.* Об областях аналитичности комплексных степенных рядов с независимыми случайными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 12. – С. 1689 – 1695.

Получено 17.09.92