УДК 519.53

В. А. Романов, канд. физ.-мат. наук (Кировоград. пед. ин-т)

ВЕКТОРНЫЕ МЕРЫ РАЗЛИЧНЫХ КЛАССОВ ГЛАДКОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛЫ

A relationship between different types of continuity with respect to direction and other smoothness types is found for vector measures. We also study the following problem: Which vector measures could be represented as limits of quasi-invariant, infinitely differentiable, analytic, and continuous measures with respect to topologies of variational convergence, semi-variational convergence, and convergence on every measurable set.

Знайдено взаємозв'язок між різними видами неперервності за напрямом та іншими видами гладкості для векторних мір. Досліджується також питання про те, які векторні міри можуть бути зображені як границі квазіінваріантних, нескінченно диференційовних, аналітичних і неперервних мір в топологіях збіжності за варіацією, за напівваріацією та на кожній вимірній множині.

Пусть $M = M(X, Y)$ — пространство векторных мер, определенных на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ борелевских подмножеств бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства X и принимающих значения в банаховом пространстве Y. Важными условиями согласованности меры со структурой пространства X являются различные виды гладкости по направлениям. В данной работе исследована взаимосвязь между различными видами непрерывности по направлению и другими видами гладкости, а также исследуются предельные переходы с гладкими мерами из $M(X, Y)$.

Для скалярных мер на пространстве X гладкость по направлениям исследована в ряде работ: квазиинвариантность — в [1] (гл. 4), [2] (гл. 1), дифференцируемость — в [3], [1] (§ 21), [4] (гл. 4), непрерывность — в [5–8], аналитичность — в [9]. В связи с развитием теории общих векторных мер представляет интерес исследование различных классов гладкости и для векторных мер.

1. Если $\mu \in M(X, Y)$, $A \in \mathcal{B}(X)$, то через $v(\mu)(A)$, $\|\mu\|(A)$, и $\|\mu(A)\|$ обозначаем значения на A соответственно вариации, полувариации и норму в Y значения самой μ на A. Значения вариации и полувариации на всем пространстве X обозначаем через $\operatorname{Var}\mu$ и $\|\mu\|$. Топологии сходимости по вариации, относительно полувариации и на каждом измеримом множестве обозначаем соответственно через τ_v, τ_{sv} и τ_s. Под сдвигом меры μ на элемент $h \in X$ понимается мера μ_h, задаваемая на системе всех измеримых множеств A формулой $\mu_h(A) = \mu(A + h)$. Векторную меру μ называем непрерывной по направлению h (h-непрерывной) в топологии τ, если в этой топологии $\lim\limits_{t \to 0} (\mu_{th} - \mu) = 0$ $(\tau = \tau_v, \tau_{sv}, \tau_s)$.

***Замечания.* 1.** Ясно, что из h-непрерывности по вариации (т. е. в топологии τ_v) вытекает h-непрерывность относительно полувариации (т. е. в топологии τ_{sv}), а из h-непрерывности относительно полувариации — h-непрерывность в смысле сходимости на каждом измеримом множестве (т. е. в топологии τ_s).

2. Как следует из предложения 2 в [8, с. 770], для вещественных мер конечной вариации определения h-непрерывности в топологиях τ_v и τ_s равносильны. Что же касается векторных мер, то для них, как будет видно из теоремы 1, определения h-непрерывности в топологиях τ_v, τ_{sv}, τ_s могут быть и неэквивалентными между собой.

Лемма 1. *Для любой $\mu \in M$ выполняется равенство $\|\mu\| = \sup\|\mu(A) - \mu(B)\|$, где верхняя грань берется по всем системам из двух непересекающихся измеримых множеств.*

Доказательство. В правой части формулы

$$\|\mu\| = \sup_{\{E_k\}} \left(\sup_{|\alpha_k| \le 1} \left\| \sum_k \alpha_k \mu(E_k) \right\| \right),$$

где верхние грани берутся по всем системам из конечного числа попарно непересекающихся измеримых множеств и по всем таким наборам скаляров, для которых $|\alpha_k| \le 1$, выражение под знаком нормы линейно относительно скаляров α_k и поэтому достигает своего экстремума в одной из вершин соответствующего конечномерного куба. Поэтому можно считать, что $|\alpha_k| = 1$. Далее, переставляя слагаемые под знаком нормы в соответствии со знаками скаляров α_k и используя аддитивность μ, получаем утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ — мера со значениями в пространстве l_∞, μ_n — ее вещественные компоненты. Тогда $\|\mu\| = \sup\limits_n (\operatorname{Var}\mu_n)$.*

Доказательство леммы 2 основано на лемме 1 и на том факте, что для вещественных компонент μ_n полувариации и вариации совпадают.

Предложение 1. *Пусть m — конечная неотрицательная мера на X, (μ_n) — последовательность абсолютно непрерывных по мере m вещественных мер на X, плотности f_n которых равномерно ограничены. Тогда функция множества $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ есть мера со значениями в пространстве l_∞, причем*

$$\|\mu\| = \sup_n \int_X |f_n(x)|\, dm(x), \quad \operatorname{Var}\mu = \int_X \sup_n |f_n(x)|\, dm(x).$$

Счетная аддитивность μ следует из равномерной ограниченности последовательности (f_n), формула для полувариации вытекает из леммы 2, а формулу для вариации можно получить, рассматривая верхнюю грань счетного семейства вещественных мер на X, имеющих относительно m плотности $|f_n(x)|$.

Теорема 1. *Если $Y = l_\infty$, то для любого ненулевого $h \in X$ существуют такие векторные меры конечной вариации $\mu, \nu \in M(X, Y)$, что μ — h-непрерывна в топологии τ_{sv}, но не является h-непрерывной в топологии τ_v, а ν — h-непрерывна в топологии τ_s, но не является h-непрерывной в топологии τ_{sv}.*

Доказательство. Пусть m — мера Лебега на линейном подпространстве L, натянутом на вектор h. Рассмотрим для каждого натурального p характеристическую функцию отрезка $\left[\frac{k-1}{p}h; \frac{k}{p}h\right] \subset L$, $k = 1, \ldots, p$. Занумеруем все эти функции подряд в одну бесконечную последовательность (f_n) и рассмотрим на L абсолютно непрерывные по мере m вещественные меры μ_n, плотности которых совпадают с функциями f_n. Пусть μ — мера с вещественными компонентами μ_n. Применяя предложение 1 к мере $\mu_{th} - \mu$, получаем соотношения

$$\operatorname{Var}(\mu_{th} - \mu) = \int_L \sup_n |f_n(x + th) - f_n(x)|\, dm(x) \ge \|h\| \not\to 0,$$

$$\| \mu_{th} - \mu \| = \sup_n \int_L \left| f_n(x+th) - f_n(x) \right| dm(x) \le 2\,|t|\,\|h\| \to 0 \quad (t \to 0).$$

Таким образом, для μ утверждение теоремы выполняется.

Для построения ν рассмотрим множества

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{k}{n} h; \frac{2k+1}{2n} h \right] \subset L \quad \text{и} \quad B_n = [0; h] \backslash A_n \subset L.$$

Пусть ν — мера с такими вещественными компонентами ν_n, плотности которых относительно m равны разностям характеристических функций множеств A_n и B_n. При $t_n = (2n\|h\|)^{-1}$ выполняется равенство $\mathrm{Var}\left((\nu_n)_{t_n h} - \nu_n \right) = 2$. Отсюда и из леммы 2 вытекает, что ν не является h-непрерывной в топологии τ_{sv}. Используя аппроксимацию (в смысле меры m симметрической разности) произвольных измеримых множеств на L элементарными, составленными из конечного числа интервалов, нетрудно получить h-непрерывность ν относительно τ_s. Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Нетрудно показать, что построенные в ходе доказательства теоремы 1 меры μ и ν принимают свои значения не просто в пространстве l_∞ ограниченных последовательностей, а в его подпространстве C_0 сходящихся к нулю последовательностей.

Предложение 2. *Если векторная мера $\mu \in M(X, Y)$ представима как произведение интегрируемой по Бохнеру Y-значной функции и конечной h-непрерывной неотрицательной меры, то μ — h-непрерывна в топологии τ_v.*

Доказательство аналогично доказательству скалярного варианта этого утверждения, рассмотренного в [6, с. 81] (теорема 1).

Если пространство Y имеет свойство Радона – Никодима [2, с. 106], то, как видно из теоремы 2, ситуация с различными определениями h-непрерывности значительно упрощается.

Теорема 2. *Пусть пространство Y имеет свойство Радона – Никодима, $h \in X$, $h \ne 0$, векторная мера конечной вариации μ из $M(X, Y)$ — h-непрерывна в топологии τ_s. Тогда μ — h-непрерывна и в τ_v.*

Доказательство. Пусть m — h-непрерывная компонента в разложении вариации $v(\mu)$ в сумму h-непрерывной и вполне h-разрывной мер [5, с. 65]. Тогда для любого функционала y^* из единичного шара сопряженного к Y пространства числовая мера $y^*\mu$ — h-непрерывна и мажорируется мерой m. Но тогда и сама μ мажорируется мерой m. Поэтому μ можно представить как произведение некоторой интегрируемой по Бохнеру Y-значной функции и меры m. Отсюда и из предложения 2 вытекает утверждение теоремы.

***Следствие* 1.** *Для векторных мер конечной вариации из $M(X, l_p)$, где $1 < p < \infty$, все три определения h-непрерывности (в топологиях τ_v, τ_{sv}, τ_s) эквивалентны.*

В самом деле, при $1 < p < \infty$ пространства l_p рефлексивны, а рефлексивные пространства имеют свойство Радона – Никодима [2, с. 178].

2. Множество $A \in \mathcal{B}(X)$ называется нуль-множеством для $\mu \in M(X, Y)$, если все его измеримые подмножества имеют нулевую меру, что равносильно любому из равенств $v(\mu)(A) = 0$ и $\|\mu\|(A) = 0$.

Векторную меру μ называем h-квазиинвариантной, где $h \in X$, если для любого $t \in \mathbb{R}$ запас ее нуль-множеств инвариантен относительно сдвигов на th.

Замечание 4. Согласно [7, с. 211] (теорема 1), для скалярных мер из h-квазиинвариантности следует h-непрерывность. Из теоремы 3 следует, что для общих векторных мер взаимосвязь между этими видами гладкости может быть более сложной.

Теорема 3. *Если $Y = l_\infty$, то для любого ненулевого $h \in X$ существуют такие h-квазиинвариантные векторные меры α, β, γ, ω из $M(X,Y)$, что α — h-непрерывна в топологии τ_v, β — h-непрерывна в топологии τ_{sv}, но не в τ_v, γ — h-непрерывна в τ_s, но не в τ_{sv}, ω не является h-непрерывной даже в τ_s.*

Доказательство. Пусть m_1 — гауссова мера на линейном подпространстве L, натянутом на вектор h, α — векторная мера, все вещественные компоненты которой совпадают с m_1, μ и ν — векторные меры, построенные в ходе доказательства теоремы 1, λ — векторная мера, вещественные компоненты которой имеют относительно меры Лебега на L плотности, равные характеристическим функциям множеств $A_n + [nh; (n+1)h]$, где A_n — множества, фигурирующие в доказательстве теоремы 1. Нетрудно убедиться, что для векторных мер $\alpha, \beta = \alpha + \mu$, $\gamma = \alpha + \nu$, $\omega = \alpha + \lambda$ утверждение теоремы выполняется.

Теорема 4. *Пусть пространство Y имеет свойство Радона – Никодима, $h \in X$, $h \neq 0$, μ — h-квазиинвариантная векторная мера конечной вариации из $M(X,Y)$. Тогда μ — h-непрерывна в топологии τ_v.*

Доказательство. Вариация $v(\mu)$ данной меры h-квазиинвариантна. Поэтому она, будучи вещественной, и h-непрерывна. Но тогда μ можно представить как произведение некоторой интегрируемой по Бохнеру Y-значной функции на h-непрерывную неотрицательную меру. Отсюда и из предложения 2 вытекает утверждение теоремы.

Замечания. 5. Известно, что для любого ненулевого $h \in X$ существует неотрицательная h-непрерывная, но не h-квазиинвариантная мера на X. Произведение этой меры и постоянной Y-значной функции дает пример векторной меры с такими же свойствами.

6. Важный класс гладких мер составляют h-дифференцируемые меры, т. е. такие меры, для которых в той или иной топологии существует предел $\lim_{t \to 0} (\mu_{th} - \mu)/t$ [4, с. 169]. Из неравенства $\mathrm{Var}(\mu_{th} - \mu) \leq |t| \mathrm{Var}(d_h\mu)$, аналог которого для числовых мер доказан в [4, с. 171] и обоснование которого для векторных мер проводится аналогично, следует, что если векторная мера μ — h-дифференцируема в топологии τ_s, причем $\mathrm{Var}(d_h\mu) < \infty$, то μ — h-непрерывна не только в τ_s, но и в τ_v

3. Предложение 3. *Если Y — пространство со свойством Радона – Никодима, $h \in X$, $h \neq 0$, а последовательность (μ_n) h-непрерывных векторных мер конечной вариации из $M(X,Y)$ сходится в топологии τ_s к векторной мере μ конечной вариации, то μ тоже h-непрерывна.*

Доказательство. Векторная мера μ абсолютно непрерывна по конечной неотрицательной мере $m = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(\mathrm{Var}\mu_n\right)^{-1} v(\mu_n)$. Мера m — h-непрерывна в силу предложения 1 из [7, с. 212]. Остается применить предложение 2.

Теорема 5. *Пусть H — линейная оболочка ортонормированного базиса в X, Y имеет свойство Радона – Никодима, M_1 — множество всех H-непрерывных, M_2 — всех H-квазиинвариантных, M_3 — всех бесконечно H-дифференцируемых, M_4 — всех одновременно H-квазиинвариантных и бесконеч-*

но H-дифференцируемых, M_5 — всех аналитических мер конечной вариации из $M(X, Y)$. Тогда для любого $i = \overline{1,5}$ множества $M_i(v)$, $M_i(sv)$ и $M_i(s)$ всех тех векторных мер конечной вариации из M, которые представимы как пределы в топологиях соответственно τ_v, τ_{sv} и τ_s последовательностей мер из M_i, совпадают с множеством M_1.

Доказательство. Суммируя результаты теоремы 4 и предложения 3, а также учитывая замечание 6, получаем, что все множества $M_i(v)$, $M_i(sv)$ и $M_i(s)$ являются подмножествами множества M_1. С другой стороны, все эти множества включают в себя $M_5(v)$. Но из [10] (теорема 2) вытекает, что $M_5(v) = M_1$. Следовательно, все указанные множества совпадают с M_1, что и требовалось доказать.

1. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 230 с.
2. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
3. *Фомин С. В.* Дифференцируемые меры в линейных пространствах // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, № 1. – С. 221 – 222.
4. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. *Романов В. А.* О разложении меры в линейном пространстве в сумму H-непрерывной и вполне H-разрывной мер // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. – 1976. – **31**, № 4. – С. 63 – 66.
6. *Романов В. А.* Об H-непрерывных мерах в гильбертовом пространстве // Там же. – 1977. – **32**, № 1. – С. 81 – 85.
7. *Романов В. А.* Пределы квазиинвариантных мер в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 2. – С. 211 – 214.
8. *Романов В. А.* Интегральные операторы, порождаемые H-непрерывными мерами // Там же. – 1989. – **41**, № 6. – С. 769 – 773..
9. *Бенткус В. Ю.* Аналитичность гауссовских мер // Теория вероятностей и ее применения. – 1982. – **27**, № 1. – С. 147 – 154.
10. *Романов В. А.* Пределы аналитических векторных мер // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1133 – 1135.

Получено 24.05.93