УДК 517.968

С. В. Переверзев, д-р физ.-мат. наук,
М. Аскаров, соиск. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАТИВНОГО ТИПА ДЛЯ КЛАССОВ СЛАБО-СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ*

For classes of weakly singular integral equations of second kind whose kernels have the power singularity, we find the optimal order of convergence rate of projection-iterative methods. Moreover, the iterative methods of Sokolov's type are considered and, for weakly singular equations with differentiable coefficients, we indicate the estimates of convergence rate of such methods.

Для класів слабо-сингулярних інтегральних рівнянь II роду, ядра яких мають степеневу особливість, знайдено оптимальний порядок швидкості збіжності проекційно-ітеративних методів. Крім того, розглянуто ітераційні методи типу метода Ю. Д. Соколова і наведено оцінки швидкості збіжності таких методів для слабо-сингулярних рівнянь з диференційовними коефіцієнтами.

1. Пусть C — пространство непрерывных на $[0,1]$ функций $f(t)$ с обычной нормой $\|f\| := \max\{|f(t)|,\ t\in[0,1]\}$. Обозначим через W^β, $0<\beta<1$, пространство Гельдера, которое состоит из всех непрерывных на $[0,1]$ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем β:

$$|f(t)-f(\tau)| \le c\,|t-\tau|^\beta$$

при любых $t,\tau\in[0,1]$. Нормы в W^β определяются формулой

$$\|f\|_{W^\beta} = \|f\| + \sup_{0\le t,\tau\le 1}\frac{|f(t)-f(\tau)|}{|t-\tau|^\beta}.$$

Рассмотрим множество интегральных операторов с ядрами типа потенциала

$$Hz(t) = \int_0^1 \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}\, z(\tau)\,d\tau, \quad 0<\alpha<1, \tag{1}$$

и множество слабо-сингулярных интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$z = Hz + f \tag{2}$$

с операторами, имеющими вид (1).

Операторы с ядрами типа потенциала и слабо-сингулярные интегральные уравнения с такими операторами исследовались многими авторами. Например, в [1] показано, что даже при высокой гладкости коэффициентов $h(t,\tau)$ операторы вида (1) действуют из C в пространство Гельдера W^β с показателем β не выше, чем $1-\alpha$. Поэтому в дальнейшем при фиксированном α операторы вида (1) будем рассматривать как линейные ограниченные операторы из C в $W^{1-\alpha}$.

Обозначим через $\mathcal{H}^\alpha = \mathcal{H}^\alpha(\mu)$ класс всевозможных линейных непрерывных операторов H, действующих из C в $W^{1-\alpha}$ и удовлетворяющих условиям

$$\|H\|_{C\to W^{1-\alpha}} \le \mu_1, \quad \|(I-H)^{-1}\|_{C\to C} \le \mu_2, \quad \mu = (\mu_1,\mu_2), \tag{3}$$

где I — тождественный оператор. Кроме того, через $\overline{\mathcal{H}}^\alpha = \overline{\mathcal{H}}^\alpha(\mu)$ будем обозначать класс операторов H вида (1) таких, что $H\in\mathcal{H}^\alpha$.

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда фундаментальных научных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий.

2. В работах А. Ю. Лучки и Н. С. Курпеля (см., например, [2, 3]) развит проекционно-итеративный метод приближенного решения операторных уравнений, возникший на базе метода осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова и получивший в дальнейшем весьма широкое распространение. Применительно к уравнениям II рода (2) этот метод состоит в следующем. Пусть F_N — некоторое N-мерное подпространство, а P — оператор проектирования на F_N. Если z_k — приближенное решение (2), полученное на k-й итерации, то на следующей $(k+1)$-й итерации приближенное решение z_{k+1} строится по формуле

$$z_{k+1} = f + H(z_k + \delta_{k,N}), \tag{4}$$

где $\delta_{k,N}$ — приближенное решение уравнения для погрешности $\Delta_k = z - z_k$,

$$\Delta_k = H\Delta_k + f + Hz_k - z_k, \tag{5}$$

полученное проекционным методом, построенным на базе проектора P, т. е. $\delta_{k,N}$ определяется из следующего уравнения с конечномерным оператором:

$$\delta_{k,N} = PH\delta_{k,N} + P(f + Hz_k - z_k). \tag{6}$$

По терминологии [4, с. 291] проекционно-итеративный метод относится к классу линейных итераций, основное свойство которых состоит в том, что их погрешность $\Delta_{k+1} = z - z_{k+1}$ удовлетворяет соотношению

$$\Delta_{k+1} = T(H)\Delta_k, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

где $T(H)$ — некоторый линейный оператор, зависящий от оператора H из (2) и характеризующий тот или иной линейный итерационный процесс (линейную итерацию). При этом итерационный процесс, определяемый оператором $T(H)$, сходится к решению (2) как геометрическая прогрессия, знаменатель которой равен спектральному радиусу $r(T, H)$ оператора $T(H)$. В случае сходимости в пространстве C имеем

$$r(T,H) = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k(H)\right\|_{C\to C}^{1/k}. \tag{7}$$

Величина

$$r(T,\mathcal{H}) = \sup_{H\in\mathcal{H}} r(T,H) \tag{8}$$

определяет знаменатель геометрической прогрессии, со скоростью которой линейная итерация, задаваемая конкретным видом $T(H)$, сходится к решению любого уравнения (2) с произвольными операторами H из некоторого класса $\mathcal{H}$.

Для проекционно-итеративного метода (4), (6) оператор $T(H)$ имеет вид (см., например, [5])

$$T(H) = T_1(H,P) = H(I-PH)^{-1}(I-P). \tag{9}$$

Кроме того, положим $r_1(H,P) = r(T_1,H)$, $r_1(\mathcal{H},P) = r(T_1,\mathcal{H})$, где величины $r(T,H)$, $r(T,\mathcal{H})$ определены соотношениями (7), (8).

Пусть $\mathcal{P}_N$ — множество всевозможных операторов проектирования на произвольные (различные) подпространства C размерности не выше N. Если в рамках схемы (4), (6) зафиксировать размерность подпространств F_N, то оптимальная скорость на классе всех уравнений (2) с операторами $H \in \mathcal{H}$ определяется скоростью сходимости к нулю геометрической прогрессии со знаменателем

$$q_N(\mathcal{H}) = \sup_{H\in\mathcal{H}} \inf_{P\in\mathcal{P}_N} r_1(H,P).$$

В следующем пункте мы найдем порядок оптимальной скорости сходимости проекционно-итеративных методов (4), (6) на классе слабо-сингулярных интегральных уравнений с операторами вида (1) из $\overline{\mathcal{H}}^{\alpha}$, т. е. определим порядки величин $q_N(\mathcal{H}^{\alpha})$ и $q_N(\overline{\mathcal{H}}^{\alpha})$ соответственно.

3. Пусть $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$, ... — ортонормированная система кусочно-постоянных функций, введенная А. Хааром. Напомним, что $\chi_1(t) \equiv 1$, а для $k = 2^{m-1} + j$, $m = 1, 2, 3, \dots$, $j = 1, 2, \dots, 2^{m-1}$

$$\chi_k(t) = \begin{cases} 2^{(m-1)/2}, & t \in \left[2^{1-m}(j-1), 2^{-m}(2j-1)\right); \\ -2^{(m-1)/2}, & t \in \left[2^{-m}(2j-1), 2^{1-m}j\right); \\ 0, & t \notin \left[2^{1-m}(j-1), 2^{1-m}j\right). \end{cases}$$

Обозначим через P_n оператор ортогонального проектирования на линейную оболочку первых n функций системы Хаара, т. е.

$$P_N\varphi(t) = \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{N} \chi_k(t)\chi_k(\tau) \right) \varphi(\tau)d\tau. \tag{10}$$

Известно [6, с. 81], что

$$\| I - P_N \|_{W^{1-\alpha} \to C} \le 3N^{\alpha-1}. \tag{11}$$

Теорема 1. *При* $\alpha \in (0, 1)$

$$r_1(\mathcal{H}^{\alpha}, P_N) \asymp q_N(\mathcal{H}^{\alpha}) \asymp N^{\alpha-1},$$

т. е. на классе уравнений (2) *с операторами* $H \in \mathcal{H}^{\alpha}$ *оптимальный порядок скорости сходимости проекционно-итеративных методов* (4), (6) *реализуется в случае* $P = P_N$.

Доказательство. Используя оценку (11) и повторяя с точностью до обозначений рассуждения, приведенные в [5] при доказательстве теоремы 1, находим

$$r_1(\mathcal{H}^{\alpha}, P_N) \le \frac{3\mu_1\mu_2}{1 - 3\mu_1\mu_2 N^{\alpha-1}} N^{\alpha-1}. \tag{12}$$

Требуемая оценка сверху установлена.

Для получения оценки снизу рассмотрим введенное в [7] семейство операторов

$$H_n\varphi(t) = \delta n^{\alpha} \int_0^1 \left(\sum_{l=1}^{n} \psi_{l,n}(t)\psi_{l,n}(\tau) \right) \varphi(\tau)d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{13}$$

где

$$\psi_{l,n}(t) = \begin{cases} nt - (l-1), & t \in [(l-1)/n, (2l-1)/2n]; \\ l - nt, & t \in [(2l-1)/2n, l/n]; \\ 0, & t \notin [(l-1)/n, l/n]. \end{cases}$$

В [7] установлено, что для любого $n = 1, 2, \dots$ при $\delta = 1{,}6 \min\{\mu_1, (\mu_2 - 1)/\mu_2\}$

$$H_n \in \mathcal{H}^{\alpha}(\mu). \tag{14}$$

Кроме того, из ортогональности системы функций $\psi_{l,n}(t)$, $l = 1, 2, \dots, n$, следует

$$H_n^k \varphi = \left(\frac{\delta}{12}\right)^{k-1} n^{(k-1)(\alpha-1)} H_n \varphi, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

Рассмотрим теперь подпространства Φ_n, являющиеся линейными оболочками функций $\psi_{1,n}, \psi_{2,n}, \ldots, \psi_{n,n}$, т. е.

$$\Phi_n = \operatorname{span}\{\psi_{l,n}(t) \colon l = 1, 2, \ldots, n\}, \quad \dim \Phi_n = n. \tag{16}$$

Из (13), (15) следует, что множество

$$\Phi_n(1) = \{\varphi \colon \varphi \in \Phi_n, \ \|\varphi\| \le 1\},$$

представляющее собой единичный шар в подпространстве Φ_n, взаимно однозначно отображается оператором H_n^k на шар $\Phi_n(\gamma) = \gamma \Phi_n(1)$ радиуса $\gamma = (\delta/12)^k n^{k(\alpha-1)}$ в подпространстве Φ_n, т. е.

$$H_n^k \Phi_n(1) = \left(\frac{\delta}{12}\right)^k n^{k(\alpha-1)} \Phi_n(1). \tag{17}$$

Для центрально-симметричного множества $\mathfrak{M}$ в C поперечником по Колмогорову порядка m называют величину

$$d_m(\mathfrak{M}, C) = \inf_{\substack{F \subset C, \\ \dim F = m}} \sup_{g \in \mathfrak{M}} \inf_{u \in F} \|g - u\|_C.$$

Из (17) и теоремы о поперечнике шара [8, с. 258] для $m = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$d_m\left(H_n^k \Phi_n(1), C\right) \ge \left(\frac{\delta}{12}\right)^k n^{k(\alpha-1)}. \tag{18}$$

Зафиксируем теперь N и положим в (13) – (18) $n = N + 1$.

Пусть F_N — произвольное N-мерное подпространство C с базисом e_1, $e_2, \ldots, e_N$, а P — некоторый оператор проектирования на F_N. Легко видеть, что оператор $(I - PH_{N+1})^{-1}$ (если он существует) может быть представлен в виде $(I - PH_{N+1})^{-1} = I - Q_{N,0}$, где $Q_{N,0}$ — некоторый линейный непрерывный оператор, действующий из C в F_N. Но тогда из (9) и (15) находим

$$\left\|T_1^k\left(H_{N+1}, P\right)\right\|_{C \to C} = \|[H_{N+1}(I - Q_{N,0})(I - P)]^k\|_{C \to C} =$$
$$= \|[H_{N+1}(I - Q_{N,1})]^k\|_{C \to C} = \left\|H_{N+1}^k - H_{N+1} Q_{N,k}\right\|_{C \to C}, \tag{19}$$

где $Q_{N,1}, Q_{N,2}, \ldots, Q_{N,k}$ — некоторые операторы, которые зависят от k и действуют в F_N. Заметим, что при любом k $H_{N+1} Q_{N,k}$ имеет ранг не выше N и действует в подпространство

$$G_N = \operatorname{span}\{H_{N+1} e_1, H_{N+1} e_2, \ldots, H_{N+1} e_N\} \subset \Phi_{N+1}, \quad \dim G_N \le N.$$

Но тогда из (17) – (19) получаем

$$\left\|T_1^k\left(H_{N+1}, P\right)\right\|_{C \to C} = \sup_{\substack{\varphi \in C, \\ \|\varphi\| \le 1}} \left\|H_{N+1}^k \varphi - H_{N+1} Q_{N,k} \varphi\right\|_{C \to C} \ge$$
$$\ge \sup_{\varphi \in \Phi_{N+1}(1)} \inf_{u \in G_N} \left\|H_{N+1}^k \varphi - u\right\|_C = \sup_{g \in H_{N+1}^k \Phi_{N+1}(1)} \inf_{u \in G_N} \|g - u\|_C \ge$$
$$\ge d_N\left(H_{N+1}^k \Phi_{N+1}(1), C\right) \ge \left(\frac{\delta}{12}\right)^k (N+1)^{k(\alpha-1)}. \tag{20}$$

В силу включения (14) и произвольности выбора F_N, P из (20) окончательно получаем

$$q_N(\mathcal{H}^\alpha) \geq \inf_{P \in \mathcal{P}_N} r_1(H_{N+1}, P) =$$

$$= \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \lim_{k \to \infty} \left\| T_1^k\left(H_{N+1}, P\right) \right\|_{C \to C}^{1/k} \geq \frac{\delta}{12} (N+1)^{\alpha - 1} \asymp N^{\alpha - 1}. \tag{21}$$

Требуемая оценка снизу получена. Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *При* $\alpha \in (0, 1)$

$$q_N(\overline{\mathcal{H}}^\alpha) \asymp r_1(\overline{\mathcal{H}}^\alpha, P_N) \asymp N^{\alpha - 1},$$

т. е. на классе слабо-сингулярных интегральных уравнений с операторами вида (1) *из класса* $\overline{\mathcal{H}}^\alpha$ *оптимальный порядок скорости сходимости проекционно-итеративных методов* (4), (6) *реализуется в случае* $P = P_N$.

Доказательство. Требуемая оценка сверху следует из теоремы 1 и очевидного включения $\overline{\mathcal{H}}^\alpha \subset \mathcal{H}^\alpha$.

Для получения нужной оценки снизу достаточно заметить, что в силу (13) оператор H_{N+1} может быть представлен в виде (1), где коэффициент $h(t, \tau)$ имеет вид

$$h(t, \tau) = \delta (N+1)^\alpha |t - \tau|^\alpha \sum_{l=1}^{N+1} \psi_{l, N+1}(t) \psi_{l, N+1}(\tau).$$

Иными словами, $H_{N+1} \in \overline{\mathcal{H}}^\alpha$. Но тогда из (21) находим

$$q_N(\overline{\mathcal{H}}^\alpha) \geq \inf_{P \in \mathcal{P}_N} r_1(H_{N+1}, P) \geq \frac{\delta}{12} (N+1)^{\alpha - 1}.$$

Следствие 1 доказано.

4. Следствие 1 показывает, что метод (4), (6), построенный на базе ортонормированной системы Хаара, обеспечивает на классе слабо-сингулярных интегральных уравнений с операторами из $\overline{\mathcal{H}}^\alpha$ такую скорость сходимости, которая в рамках проекционно-итеративных методов не может быть улучшена по порядку даже за счет специальной адаптации подпространства F_N, на которое осуществляется проектирование, к каждому оператору $H \in \overline{\mathcal{H}}^\alpha$ отдельно. В настоящем пункте мы покажем, что приведенный в следствии 1 порядок скорости сходимости может быть увеличен вдвое, если мы несколько изменим схему проекционно-итеративного метода и потребуем большую гладкость коэффициентов $h(t, \tau)$ слабо-сингулярных интегральных операторов (1). А именно, рассмотрим итерационные методы, которые в [9] называются методами типа метода Ю. Д. Соколова и отличаются от проекционно-итеративных методов (4), (6) лишь тем, что поправка $\delta_{k,N}$, являющаяся приближенным решением уравнения для погрешности (5), определяется из следующего уравнения с конечномерным оператором:

$$\delta_{k,N} = PH\delta_{k,N} + f + Hz_k - z_k. \tag{22}$$

Из [9] следует, что метод (4), (22) также является линейной итерацией, для которой оператор $T(H)$ имеет вид

$$T(H) = T_2(H, P) = H(I - PH)^{-1}(H - PH). \tag{23}$$

По аналогии с (7), (8) положим

$$r_2(H,P) = \lim_{k\to\infty} \left\| T_2^k(H,P) \right\|_{C\to C}^{1/k}, \quad r_2(\mathcal{H},P) = \sup_{H\in\mathcal{H}} r_2(H,P).$$

Обозначим через $\mathcal{H}_\gamma^\alpha = \mathcal{H}_\gamma^\alpha(\mu_2)$ класс интегральных операторов вида (1), коэффициенты $h(t,\tau)$ которых принадлежат шару радиуса γ в пространстве Соболева непрерывно дифференцируемых функций двух переменных, т. е.

$$\max\left\{ |h(t,\tau)| + \left|\frac{\partial}{\partial t} h(t,\tau)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial \tau} h(t,\tau)\right|, \ t,\tau\in[0,1] \right\} \le \gamma, \tag{24}$$

и, кроме того, для $H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha(\mu_2)$ выполнено второе условие (3).

Из [1] следует, что для $H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha$

$$\|H\|_{C\to C} \le \frac{2^\alpha\gamma}{1-\alpha}; \quad \|H\|_{C\to W^{1-\alpha}} \le \frac{3\cdot 2^\alpha \gamma}{1-\alpha}. \tag{25}$$

Нам требуется следующий факт из теории приближения функций операторами (10).

Пусть L — пространство суммируемых по Лебегу на $(0,1)$ функций с обычной нормой. Тогда для $\varphi\in L$ справедлива оценка [6, с. 82]

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_L \le 12\,\omega_1(n^{-1},\varphi), \tag{26}$$

где $\omega_1(\delta,\varphi)$ — интегральный модуль непрерывности функции φ, определяемый равенством

$$\omega_1(\delta,\varphi) := \sup_{0<\theta\le\delta} \int_0^{1-\theta} |\varphi(t+\theta) - \varphi(t)|\,dt, \quad 0<\delta<1.$$

Лемма 1. *Пусть* $h(t,\tau)$ — *непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, удовлетворяющая условию* (24). *Тогда при любом* $t\in[0,1]$ *интегральный модуль непрерывности функции*

$$g_t(\tau) = \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha}$$

удовлетворяет неравенству

$$\omega_1(\delta, g_t) \le c\,\delta^{1-\alpha},$$

где постоянная c *зависит от* α *и* γ, *но не зависит от* t.

Доказательство. Из [1] при $\delta\in(0,1)$ и любом $t\in[0,1]$ находим

$$\int_0^{1-\delta} \left| |t-\tau-\delta|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \right| dt \le \frac{2^{1+\alpha}}{1-\alpha}\delta^{1-\alpha} + o(\delta). \tag{27}$$

Кроме того, в силу (25)

$$\int_0^{1-\delta} |t-\tau-\delta|^{-\alpha} d\tau \le \int_0^1 |t-\tau-\delta|^{-\alpha} d\tau \le \frac{2^\alpha}{1-\alpha}. \tag{28}$$

Пусть теперь $h(t,\tau)$ удовлетворяют условию (24). Учитывая определение функций $g_t(\tau)$, имеем

$$\int_0^{1-\delta} \left| g_t(\tau+\delta) - g_t(\tau) \right| d\tau = \int_0^{1-\delta} \left| \frac{h(t,\tau+\delta)}{|t-\tau-\delta|^\alpha} - \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} \right| d\tau =$$

$$= \int_0^{1-\delta} \left| h(t,\tau)\left[|t-\tau-\delta|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \right] + |t-\tau-\delta|^{-\alpha} \int_\tau^{\tau+\delta} \frac{\partial h(t,u)}{\partial u}\,du \right| d\tau \le$$

$$\leq \gamma \int_0^{1-\delta} \left| |t-\tau-\delta|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \right| d\tau + \int_0^{1-\delta} \int_\tau^{\tau+\delta} \left| \frac{\partial h(t,u)}{\partial u} \right| du \, \frac{d\tau}{|t-\tau-\delta|^\alpha} \leq$$

$$\leq \gamma \left\{ \int_0^{1-\delta} \left| |t-\tau-\delta|^{-\alpha} - |t-\tau|^{-\alpha} \right| d\tau + \delta \int_0^{1-\delta} |t-\tau-\delta|^{-\alpha} d\tau \right\}. \quad (29)$$

Утверждение леммы следует теперь из (29) и оценок (27), (28).

Лемма 2. *Пусть* $H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha$. *Тогда*

$$\| H(H - P_N H) \|_{C\to C} \leq c_1 N^{-2(1-\alpha)},$$

где постоянная c_1 *зависит лишь от* α, γ.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для $H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha$ из (11) и (25) следует

$$\| H - P_N H \|_{C\to C} \leq \| I - P_N \|_{W^{1-\alpha}\to C} \| H \|_{C \to W^{1-\alpha}} \leq \frac{9\cdot 2^\alpha \gamma}{1-\alpha} N^{-(1-\alpha)}. \quad (30)$$

Но тогда, учитывая, что $P_N = P_N^2$, имеем

$$\| H(H - P_N H) \|_{C\to C} = \| (H - HP_N)(H - P_N H) \|_{C\to C} \leq$$

$$\leq \| H - HP_N \|_{C\to C} \| H - P_N H \|_{C\to C} \leq$$

$$\leq \frac{9\cdot 2^\alpha \gamma}{1-\alpha} N^{-(1-\alpha)} \| H - HP_N \|_{C\to C}. \quad (31)$$

В силу леммы 1 и оценки (26) для любой функции $\varphi \in C$ и любого $t \in [0,1]$ находим

$$|H\varphi(t) - HP_N\varphi(t)| = \left| \int_0^1 \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} \varphi(\tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} \left(\sum_{k=1}^N \chi_k(\tau) \int_0^1 \chi_k(u)\varphi(u)\, du \right) d\tau \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left(\frac{h(t,u)}{|t-u|^\alpha} - \sum_{k=1}^N \chi_k(u) \int_0^1 \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^\alpha} \chi_k(\tau)\, d\tau \right) \varphi(u)\, du \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 \left(g_t(u) - P_N g_t(u) \right) \varphi(u)\, du \right| \leq$$

$$\leq \|\varphi\| \, \| g_t - P_n g_t \|_L \leq 12 \|\varphi\| \omega_1(N^{-1}, g_t) \leq 12 c \|\varphi\| N^{-(1-\alpha)}$$

Таким образом, для $H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha$

$$\| H - HP_N \|_{C\to C} \leq 12 c N^{-(1-\alpha)},$$

где c — постоянная из леммы 1. Утверждение леммы 2 следует теперь из (31) и последнего неравенства.

Теорема 2. *При* $\alpha \in (0,1)$

$$r_2(\mathcal{H}_\gamma^\alpha, P_N) \leq c_2 N^{-2(1-\alpha)},$$

где постоянная c_2 *зависит лишь от параметров* α, γ, μ_2, *входящих в определение класса* $\mathcal{H}_\gamma^\alpha(\mu_2)$.

Доказательство. Воспользовавшись представлением (23), запишем

$$T_2(H,P_N) = H(I-H)^{-1}(P_N H - H)(I - P_N H)^{-1}(H - P_N H) + \\ + H(I-H)^{-1}(H - P_N H). \tag{32}$$

Оценим норму каждого слагаемого в (32). Из (30) и теоремы о разрешимости приближенного уравнения [10, с. 517] для $H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha$ находим

$$\| (I - P_N H)^{-1} \|_{C \to C} \le \frac{\|(I-H)^{-1}\|_{C\to C}}{1 - \|H - P_N H\|_{C \to C} \|(I-H)^{-1}\|_{C \to C}} \le \\ \le \frac{\mu_2}{1 - 9 \cdot 2^\alpha \gamma \mu_2 N^{\alpha - 1}(1-\alpha)^{-1}} \le C_{\alpha,\gamma,\mu}. \tag{33}$$

Используя второе условие (3) и оценки (25), (30), (33), для первого слагаемого в (32) имеем

$$\| H(I-H)^{-1}(P_N H - H)(I - P_N H)^{-1}(H - P_N H) \|_{C \to C} \le \\ \le \frac{2^\alpha \gamma \mu_2 C_{\alpha,\gamma,\mu}}{1-\alpha} \|H - P_N H\|^2_{C \to C} \le cN^{-2(1-\alpha)}, \tag{34}$$

где c — некоторая постоянная, которая не зависит от N.

Для оценки второго слагаемого в (32) воспользуемся леммой 2:

$$\| H(I-H)^{-1}(H - P_N H) \|_{C \to C} = \| (I-H)^{-1} H (H - P_N H) \|_{C \to C} \le \\ \le \mu_2 \| H(H - P_N H) \|_{C \to C} \le c_1 \mu_2 N^{-2(1-\alpha)}. \tag{35}$$

Теперь из (32), (34), (35) для $H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha$ получаем

$$\| T_2(H, P_N) \|_{C \to C} \le c_2 N^{-2(1-\alpha)}.$$

С учетом определения величины $r_2(\mathcal{H}, P)$ последнее неравенство означает, что

$$r_2(\mathcal{H}_\gamma^\alpha, P_N) = \sup_{H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha} \lim_{k \to \infty} \left\| T_2^k(H, P_N) \right\|^{1/k}_{C \to C} \le \\ \le \sup_{H \in \mathcal{H}_\gamma^\alpha} \| T_2(H, P_N) \|_{C \to C} \le c_2 N^{-2(1-\alpha)}.$$

Теорема доказана.

1. *Габдулхаев Б. Г., Горлов В. Е.* О сходимости полигонального метода решения слабо-сингулярных интегральных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – С. 60 – 72.
2. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
3. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 360 с.
4. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971. – 492 с.
5. *Синенко М. А.* О связи между проекционно-итеративным методом и *KP*-методом для уравнений II рода // Современные вопросы теории приближений и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 113 – 122.
6. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
7. *Pereverzev S. V., Solodky S. G.* On optimization of direct methods of solving weakly singular integral equation // J. Complexity. – 1993. – **9**, № 2. – P. 55 – 68.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
9. *Переверзев С. В.* О скорости сходимости методов типа метода Ю. Д. Соколова для интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 5. – С. 605 – 609.
10. *Канторович Л. В., Акилов Г. С.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

Получено 16.09.93