УДК 512.544

**С. А. Чечин,** канд. физ.-мат. наук (Киев. ин-т воен. авиации)

# ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГИПЕРЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

We prove that the condition of periodicity of all normal Abelian subgroups of a group which has an increasing normal series with cyclic factors such that the infinite factors are central is preserved when passing to subgroups of finite index. An example is given which shows that the requirement for all infinite cyclic factors to be central cannot be omitted.

Доведено, що умова періодичності всіх нормальних абелевих підгруп групи, яка має зростаючий нормальний ряд з циклічними факторами, серед яких нескінченні фактори є центральними, зберігається при переході до підгруп скінченного індексу. Наведено приклад групи, який показує, що вимогою центральності всіх нескінченних циклічних факторів не можна нехтувати.

Известно, что подгруппы конечного индекса некоторой группы наследуют многие ее свойства. Например, свойство быть конечно порожденной. Из нетривиальных свойств, наследуемых подгруппами конечного индекса, отметим свойство $\mathrm{Min}-n$ (условие минимальности для нормальных подгрупп) [1] и свойство нормальной факторизуемости (дополняемости всех нормальных подгрупп) [2].

В настоящей статье изучается вопрос о наследуемости подгруппами конечного индекса свойства группы иметь лишь периодические абелевы нормальные подгруппы. Группу, в которой все абелевы нормальные подгруппы периодичны, будем для краткости называть anp-группой.

**Лемма 1.** *Пусть группа $G$ и все ее нормальные подгруппы конечного индекса являются* anp-*группами. Тогда все подгруппы конечного индекса в $G$ также являются* anp-*группами.*

***Доказательство.*** Пусть $H$ — произвольная подгруппа конечного индекса в группе $G$. Тогда, очевидно, существует такая нормальная в $G$ подгруппа $N$ конечного индекса, что $N \le H$. Если $A$ — абелева нормальная в группе $H$ подгруппа, то по условию пересечение $A \cap N$ является периодической группой. Из конечности индекса $|A : A \cap N|$ вытекает периодичность подгруппы $A$. Следовательно, $H$ — anp-группа. Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть $L = \langle P, a\rangle$ — локально нильпотентная подгруппа $G$, порожденная периодической подгруппой $P$ и элементом $a$ бесконечного порядка. Если $[G, a] \le P$, то для любого элемента $g \in G$ существует натуральное число $n$ такое, что $[a^n, g] = 1$.*

***Доказательство.*** Рассмотрим конечно порожденную подгруппу $\langle a, [a, g]\rangle$. По условию эта подгруппа нильпотентна, а потому ее периодическая часть $T$ конечна. Следовательно, индекс централизатора $C_{\langle a\rangle}(T)$ в подгруппе $\langle a\rangle$ конечен. Отсюда следует, что $[a^m, T] = 1$ для некоторого натурального $m$. В частности, $[a^m, [a^m, g]] = 1$. Если $k$ — порядок коммутатора $[a^m, g]$, то

$$(a^m[a^m, g])^k = a^{mk} = g^{-1}a^{mk}g.$$

Таким образом, $[a^n, g] = 1$ при $n = mk$. Лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть $G$ — конечная группа автоморфизмов конечно порожденной абелевой группы $A$ без кручения. Если группа $A$ имеет конечный ряд $G$-допустимых подгрупп с циклическими факторами, то в $A$ найдется $G$-допустимая подгруппа $B$ конечного индекса, которая разлагается в прямое произведение циклических $G$-допустимых подгрупп.*

***Доказательство.*** Обозначим через $B$ максимальную $G$-допустимую подгруппу группы $A$, имеющую ряд $G$-допустимых подгрупп с бесконечными циклическими факторами. Предположим, что фактор-группа $A/B$ бесконечна. Так как $A/B$ — конечно порожденная группа, то ее можно представить в виде

$A/B = P/B \times C/B$, где $P/B$ — конечная группа, а $C/B$ — группа без кручения. Пересечение $D = \bigcap_{g \in G} Cg$, где $Cg$ — образ подгруппы при действии автоморфизма $g$, является, очевидно, $G$-допустимой подгруппой в группе $A$ конечного индекса. Так как группа $D/B$ имеет $G$-допустимую бесконечную циклическую подгруппу, то получаем противоречие с выбором подгруппы $B$. Следовательно, индекс $|A : B|$ конечен. Далее, пусть $B_1$ — циклическая $G$-допустимая подгруппа в группе $B$. Так как $B/B_1$ — свободная абелева группа, то $B = B_1 \times E$, где $E$ — некоторая не обязательно $G$-допустимая подгруппа в группе $B$. Используя метод доказательства теоремы Машке (теорема 1 [3]), можно установить существование $G$-допустимой подгруппы $B_2$ такой, что $B = B_1 \times B_2$. По индукции легко завершается доказательство леммы.

**Теорема.** *Пусть* $G$ — апр-*группа, имеющая возрастающий нормальный ряд с циклическими факторами, бесконечные факторы которого центральны. Тогда любая подгруппа* $H$ *конечного индекса в* $G$ *является* апр-*группой.*

***Доказательство.*** В силу леммы 1 подгруппу $H$ конечного индекса можно считать нормальной. Предположим, что подгруппа $H$ не является апр-группой. Тогда в $H$ найдется непериодическая абелева нормальная подгруппа $A$. Ввиду условий, налагаемых на группу $G$, и нормальности подгруппы $H$ подгруппу $A$ можно выбрать в виде $A = B \times \langle a \rangle$, где $B$ — периодическая часть $A$, $a$ — элемент бесконечного порядка, причем $[H, a] \le B$.

Пусть $1 = g_1, \ldots, g_s$ — представители смежных классов группы $G$ по подгруппе $H$. Обозначим через $A^G = A^{g_1} \ldots A^{g_n}$ нормальное замыкание подгруппы $A$ в группе $G$, а через $P$ — ее периодическую часть. Очевидно, фактор-группа $A^G/P$ является конечно порожденной абелевой группой без кручения, содержащейся в центре группы $H/P$. Группу $G/H$ можно рассматривать как конечную группу автоморфизмов абелевой группы $A^G/P$. В силу леммы 3 в группе $A^G/P$ найдется $G/H$-допустимая подгруппа $K/P$ конечного индекса, которая разлагается в прямое произведение $G/H$-допустимых циклических подгрупп. По условию группа $G/H$ действует тождественно на циклических прямых множителях, а потому и на всей подгруппе $K/P$.

Так как индекс $|A^G : K|$ конечен, то для некоторого натурального $l$ $a^l \in K$. Следовательно, $[G, a^l] \le P$. Подгруппа $\langle P, a^l \rangle$ удовлетворяет условиям леммы 2. Поэтому существует такое число $m$, что $[g_i, a^{lm}] = 1$ при $i = 1, \ldots, s$.

Рассмотрим подгруппу $C = B \times \langle a^n \rangle$, где $n = lm$. Эта подгруппа нормальна в группе $H$ и $C^{g_i} = B^{g_i} \times \langle a^n \rangle$ при $i = 1, \ldots, s$. Пересечение $\bigcap_{i=1}^{s} C^{g_i}$ — очевидно, непериодическая абелева нормальная в группе $G$ подгруппа вопреки предположению. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

***Примечание.*** Автор в [4] утверждал, что доказанная здесь теорема справедлива для произвольной гиперциклической группы, т. е. для группы, имеющей возрастающий нормальный ряд с циклическими факторами. Приводимый ниже пример опровергает это утверждение.

Он показывает, что нецентральность только одного бесконечного циклического фактора гиперциклической апр-группы опровергает заключение теоремы.

***Пример*** [5]. Пусть

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle a_n \rangle, \quad B = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle b_n \rangle, \quad C = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle c_n \rangle, \quad D = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle d_n \rangle, \quad E = \bigcup_{n=0}^{\infty} \langle e_n \rangle$$

— квазициклические $p$-группы;

$$a_0 = b_0 = c_0 = d_0 = e_0 = 1,$$

$$a_{n+1}^p = a_n, \quad b_{n+1}^p = b_n, \quad c_{n+1}^p = c_n, \quad d_{n+1}^p = d_n, \quad e_{n+1}^p = e_n.$$

Кроме того, пусть $g$, $t$ — элементы бесконечного порядка, $x$ — инволюция.

Рассмотрим группу $G = [(A \times B \times C \times D \times E) \leftthreetimes (\langle g \rangle \times \langle t \rangle)] \leftthreetimes \langle x \rangle$ с определяющими соотношениями:

1. $a_n^x = b_n$, $c_n^x = d_n$, $e_n^x = e_n$, $g^x = t$;
2. $[ABC, g] = [ABD, t] = 1$;
3. $[d_n, g] = [c_n, t] = a_n b_n$;
4. $[e_n, g] = c_n^{-1}$, $[e_n, t] = d_n^{-1}$.

Покажем, что $G$ — апр-группа. Для этого достаточно показать, что любая абелева, нормальная в $G$ подгруппа $N$, содержащаяся в подгруппе $K = ABCD \leftthreetimes \langle g, t \rangle$, периодична.

Пусть $g^\xi t^\eta \in N$. Тогда $(g^\xi t^\eta)^x = g^\eta t^\xi \in N$, а потому $(gt)^{\xi+\eta} \in N$ и $(gt^{-1})^{\xi-\eta} \in N$. Пусть для определенности $(gt)^\theta \in N$, где $\theta = \xi + \eta$. Так как $\left(g^\theta t^\theta\right)^{e_n} = \left(g^{e_n}\right)^\theta \left(t^{e_n}\right)^\theta = c_n^\theta g^\theta d_n^\theta t^\theta \in N$ и $N$ — абелева группа, то $[c_n^\theta g^\theta d_n^\theta t^\theta, g^\theta t^\theta] = a_n^{2\theta^2} b_n^{2\theta^2} = 1$ для любого натурального $n$. Отсюда следует, что $\theta = \xi + \eta = 0$, т. е. $(gt^{-1})^\xi \in N$. Далее, $\left(g^\xi t^{-\xi}\right)^{e_n} = c_n^\xi g^\xi d_n^{-\xi} t^{-\xi} \in N$, а потому

$$[c_n^\xi g^\xi d_n^{-\xi} t^{-\xi}, g^\xi t^{-\xi}] = a_n^{-2\xi^2} b_n^{-2\xi^2} = 1,$$

т. е. $\xi = 0$. Отсюда следует, что и $\eta = 0$. Таким образом, подгруппа $N$ не содержит нетривиальных элементов вида $g^\xi t^\eta$. Это означает, что $N \le ABCD$, и $N$ — периодическая группа. Следовательно, $G$ — апр-группа.

Легко видеть, что подгруппа $H = ABCD \leftthreetimes \langle g, t \rangle$ индекса 2 не является апр-группой ввиду наличия у нее непериодической нормальной абелевой подгруппы $A \times B \times C \times \langle g \rangle$. Осталось показать, что $G$ — гиперциклическая группа с одним бесконечным нецентральным циклическим фактором.

Выделим в группе $G$ следующий ряд нормальных подгрупп:

$$1 < G_1 < G_2 < G_3 < G_4 < G_5 < G_6 < G_7 < G_8 < G_9 = G,$$

где

$$G_1 = \bigcup_{n=0}^\infty \langle a_n b_n \rangle, \quad G_2 = G_1 \times \bigcup_{n=0}^\infty \langle a_n b_n^{-1} \rangle,$$

$$G_3 = G_2 \times \bigcup_{n=0}^\infty \langle c_n d_n \rangle, \quad G_4 = G_3 \times \bigcup_{n=0}^\infty \langle c_n d_n^{-1} \rangle, \; G_5 = G_4 \times E,$$

$$G_6 = G_5 \times \langle gt \rangle, \quad G_7 = G_6 \times \langle gt^{-1} \rangle, \quad G_8 = \langle G_7, g \rangle, \quad G_9 = \langle G_8, x \rangle = G.$$

Этот ряд уплотняется, очевидно, до ряда с циклическими факторами, значит, $G$ — гиперциклическая группа. Один бесконечный циклический фактор $G_7 / G_6$ этого ряда не центральный, так как $[gt^{-1}, x] = (gt^{-1})^{-2} \notin G_6$.


1. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. – 1970.–**114**, № 1. – P. 19–21.
2. *Зайцев Д. И.* О свойствах групп, наследуемых их нормальными подгруппами // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 6. – С.707–713.
3. *Зайцев Д. И.* О дополняемости подгрупп в экстремальных группах // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 72–130.
4. *Чечин С. А.* Об одном свойстве гиперциклических групп // XIX Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. сообщ. – Львов, 1987. – Ч. 2. – С. 313.
5. *Чечин С. А.* Об условии минимальности для нормальных делителей // XV Всесоюз. алгебр. конф.: Тез. сообщ. – Красноярск, 1979. – Ч. 1. – С. 175.


Получено 27.05.93