УДК 517.9

С. Б. Боднарук, асп. (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПАРАМЕТРА ФУНКЦІЇ ГРІНА ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ НА ТОРІ

The dependence of Green's function of a linear extension of a dynamical system on a torus upon a parameter is studied.

Вивчається залежність від параметра функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dz}{dt} = \mathcal{P}(\varphi; p)z, \tag{1}$$

де змінні $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ належать m-вимірному тору $\mathcal{T}_m$, $a(\varphi) = (a_1(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $z = (x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ і скалярний параметр $p \in [0, 1]$.

Припустимо, що при $p = 0$ система (1) не має функції Гріна, а при $p \in (0, 1)$ ця функція існує. Тоді виникає цікаве питання дослідження поведінки функції Гріна при $p \to +0$. Подібна ситуація виникає, наприклад, для системи (1) у випадку, коли матриця $\mathcal{P}(\varphi; p)$ має вигляд

$$\mathcal{P}(\varphi; p) \leq \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\varphi;p) & 0 \\ p\mathcal{B}(\varphi;p) & -\mathcal{A}^*(\varphi;p) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

де $\mathcal{B}(\varphi; p)$, $\mathcal{A}(\varphi; p) \in C^0(\mathcal{T}_m \times [0, 1])$. Ця система при деяких додаткових умовах на $\mathcal{B}(\varphi; p)$, $\mathcal{A}(\varphi; p)$ для $p \in (0, 1]$ має єдину функцію Гріна, а якщо $p = 0$, то функції Гріна не існує.

Припустимо, що $\mathcal{B}(\varphi; p) \in C^0(\mathcal{T}_m \times [0, 1])$ задовольняє додаткову умову додатної визначеності

$$\langle \mathcal{B}(\varphi; p)x, x \rangle \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \varphi \in \mathcal{T}_m,\ p \in [0, 1], \quad \gamma = \mathrm{const} > 0.$$

Тоді справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай існує симетрична n-вимірна матриця $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$ така, що*

$$\langle [\, \dot{S}(\varphi) - S(\varphi)\mathcal{A}^*(\varphi; p) - \mathcal{A}(\varphi; p)S(\varphi)]\, y, y \rangle \geq \|y\|^2$$

$\forall\ \varphi \in \mathcal{T}_m$, $\forall\ y \in \mathbb{R}^n$ *і* $\det S(\varphi_0) = 0$ *при деякому* $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$. *Тоді функція Гріна системи* (1) *з матрицею* $\mathcal{P}(\varphi; p)$ *вигляду* (2) *при всіх* $p \in (0, 1]$ *має вигляд*

$$G_0(\tau, \varphi; p) = \begin{bmatrix} G_{11}(\tau, \varphi; p) & \dfrac{1}{p} G_{12}(\tau, \varphi; p) \\ pG_{21}(\tau, \varphi; p) & G_{22}(\tau, \varphi; p) \end{bmatrix},$$

де матричні функції $G_{ij}(\tau, \varphi; p)$, i, $j = 1, 2$, *неперервні за сукупністю змінних* $(\varphi, p) \in \mathcal{T}_m \times [0, 1]$.

Доведення. Розглянемо допоміжну систему до системи (1) вигляду

ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1995, т. 47, № 3

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{du}{dt} = \mathcal{A}(\varphi;p)u, \quad \frac{dv}{dt} = \mathcal{B}(\varphi;p)u - \mathcal{A}^*(\varphi;p)v. \tag{3}$$

Дана система диференціальних рівнянь при наведених вище умовах має єдину функцію Гріна задачі про інваріантні тори при всіх $p \in [0,1]$. Це випливає з того, що похідна невиродженої квадратичної форми $V(\varphi, x, y) = \lambda\langle x, y\rangle + \langle S(\varphi)y, y\rangle$, обчислена вздовж розв'язків системи (3), при досить великому значенні параметра $\lambda > 0$ є додатно визначеною [1, с. 134; 2, 3].

Функція Гріна системи (3) має вигляд

$$\overline{G}_0(\tau, \varphi; p) =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi, \mathcal{A}; p) & 0 \\ \omega(\tau, \varphi; p) & \left[\Omega_0^\tau(\varphi, \mathcal{A}; p)\right]^* \end{bmatrix} \times \\ \qquad \times \begin{bmatrix} c_{11}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) & c_{12}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) \\ c_{21}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) & c_{22}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) \end{bmatrix}, & \tau \le 0, \\ \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0(\varphi, \mathcal{A}; p) & 0 \\ \omega(\tau, \varphi; p) & \left[\Omega_0^\tau(\varphi, \mathcal{A}; p)\right]^* \end{bmatrix} \times \\ \qquad \times \begin{bmatrix} c_{11}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) - I_n & c_{12}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) \\ c_{21}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) & c_{22}\big(\varphi_\tau(\varphi); p\big) - I_n \end{bmatrix}, & \tau > 0, \end{cases}$$

де I_n — одинична n-вимірна матриця $C(\varphi;p) \in C^0(\mathcal{T}_m \times [0,1])$,

$$\omega(\tau, \varphi; p) \equiv \int_\tau^0 \left[\Omega_0^\sigma(\varphi, \mathcal{A}; p)\right]^* \mathcal{B}\big(\varphi_\sigma(\varphi)\big)\, \Omega_\tau^\sigma(\varphi, \mathcal{A}; p)\, d\sigma.$$

Зауважимо ([1], теорема 7.2), що $\overline{G}_0(\tau,\varphi;p)$ неперервна по $\varphi \in \mathcal{T}_m$ при кожному фіксованому $p \in [0,1]$. Можна довести її неперервність за сукупністю змінних $(\varphi, p) \in \mathcal{T}_m \times [0,1]$. Отже $\overline{G}_0(\tau,\varphi;p) \in C^0(\mathcal{T}_m \times [0,1])$. Використаємо цей факт далі при доведенні даної теореми.

Систему з матрицею $\mathcal{P}(\varphi;p)$ у вигляді (2) одержуємо з (3) за допомогою заміни змінних Ляпунова $u = px$, $v = y$ з матрицею $L(p) = \begin{bmatrix} pI_n & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$.

Покажемо, що функції Гріна цих двох систем пов'язані співвідношенням

$$G_0(\tau, \varphi; p) = L^{-1}(p)\overline{G}_0(\tau,\varphi;p)L(p). \tag{4}$$

Нехай $\tau \le 0$. Тоді

$$\overline{G}_0(\tau,\varphi;p) = \Omega_\tau^0\big(\varphi, \overline{\mathcal{P}}\big)C(\varphi_\tau(\varphi); p),$$

де

$$C(\varphi_\tau(\varphi); p) = \begin{bmatrix} c_{11}\big(\varphi_\tau(\varphi);p\big) & c_{12}\big(\varphi_\tau(\varphi);p\big) \\ c_{21}\big(\varphi_\tau(\varphi);p\big) & c_{22}\big(\varphi_\tau(\varphi);p\big) \end{bmatrix},$$

а $\Omega_\tau^t\big(\varphi, \overline{\mathcal{P}}\big)$ — матрицант відповідної лінійної системи з параметрами до системи (3). Обчислимо

$$L^{-1}(p)\,\Omega_\tau^0\big(\varphi, \overline{\mathcal{P}}\big)C(\varphi_\tau(\varphi); p)L(p) = L^{-1}(p)\,\Omega_\tau^0\big(\varphi, \overline{\mathcal{P}}\big)L(p) \times$$

$$\times L^{-1}(p)\,C(\varphi_\tau(\varphi); p)L(p) = L^{-1}(p)\,\Omega_\tau^0\big(\varphi, \overline{\mathcal{P}}\big)L(p)\,\tilde{C}(\varphi_\tau(\varphi); p).$$

Враховуючи взаємозв'язок $L^{-1}(p)\Omega_\tau^t(\varphi, \overline{\mathcal{P}})L(p) = \Omega_\tau^t(\varphi, \mathcal{P})$, робимо висновок, що $L^{-1}(p)\Omega_\tau^0(\varphi, \overline{\mathcal{P}})L(p) = \Omega_\tau^0(\varphi, \mathcal{P})$. Крім того, матриця $\tilde{C}(\varphi_\tau(\varphi); p) = L^{-1}(p)C(\varphi_\tau(\varphi); p)L(p)$ є матрицею проектування.

Так само, як і $\overline{G}_0(\tau,\varphi;p)$, функція Гріна $G_0(\tau,\varphi;p)$ системи (1) єдина. Враховуючи це, з останніх міркувань маємо справедливість (4) для $\tau \le 0$. Аналогічно доводимо при $\tau > 0$.

Скориставшись формулою (4), безпосереднім обчисленням одержуємо

$$G_0(\tau,\varphi;p) =$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0 c_{11} & \Omega_\tau^0 c_{12}/p \\ p\left(\omega c_{11} + \left[\Omega_0^\tau\right]^* c_{21}\right) & \omega c_{12} + \left[\Omega_0^\tau\right]^* c_{22} \end{bmatrix}, & \tau \le 0, \\ \begin{bmatrix} \Omega_\tau^0\left(c_{11} - I_n\right) & \Omega_\tau^0 c_{12}/p \\ p\left(\omega\left(c_{11} - I_n\right) + \left[\Omega_0^\tau\right]^* c_{21}\right) & \omega c_{12} + \left[\Omega_0^\tau\right]^*\left(c_{22} - I_n\right) \end{bmatrix}, & \tau > 0, \end{cases} \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} \begin{bmatrix} G'_{11}(\tau,\varphi;p) & G'_{12}(\tau,\varphi;p)/p \\ pG'_{21}(\tau,\varphi;p) & G'_{22}(\tau,\varphi;p) \end{bmatrix}, & \tau \le 0, \\ \begin{bmatrix} G''_{11}(\tau,\varphi;p) & G''_{12}(\tau,\varphi;p)/p \\ pG''_{21}(\tau,\varphi;p) & G''_{22}(\tau,\varphi;p) \end{bmatrix}, & \tau > 0. \end{cases}$$

Кожен з блоків G'_{ij}, G''_{ij}, $i, j = 1, 2$, функції $G_0(\tau,\varphi;p)$ неперервно залежить від p, оскільки виконується (4) і $\overline{G}_0(\tau,\varphi;p) \in C^0(\mathcal{T}_m \times [0,1])$. Теорема доведена.

Як приклад розглянемо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \quad \frac{dx}{dt} = (\cos\varphi)u, \quad \frac{dy}{dt} = px - (\cos\varphi)y,$$

для якої виконуються умови теореми і $\varphi \in \mathcal{T}_1$, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $0 < p \le \infty$. В цьому випадку функція Гріна $\tilde{G}_0(\tau,\varphi;p)$ має вигляд

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dfrac{\sin^2(\varphi/2)}{e^{-t}\cos^2(\varphi/2) + e^t\sin^2(\varphi/2)} & -\dfrac{1}{p}\dfrac{\sin^2(\varphi/2)\cos^2(\varphi/2)}{e^{-t}\cos^2(\varphi/2) + e^t\sin^2(\varphi/2)} \\ -pe^{-t} & e^{-t}\cos^2(\varphi/2) \end{bmatrix}, & t \ge 0, \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\sin^2(\varphi/2) - 1}{e^{-t}\cos^2(\varphi/2) + e^t\sin^2(\varphi/2)} & -\dfrac{1}{p}\dfrac{\sin^2(\varphi/2)\cos^2(\varphi/2)}{e^{-t}\cos^2(\varphi/2) + e^t\sin^2(\varphi/2)} \\ -pe^{t} & e^{t}\sin^2(\varphi/2) \end{bmatrix}, & t < 0; \end{cases}$$

блоки G'_{12}, G''_{12} необмежено ростуть по модулю при $p \to +0$, а при $p = 0$ функції Гріна не існує.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
3. *Coppel W. A.* Dichotomies and Lyapunov functions // J. Different. Equat. – 1984. – **52**, № 1. – P. 58 – 65.

Одержано 18.02.94