УДК 517.926.4

А. Г. Баскаков, д-р физ.-мат. наук,
М. К. Черньшов, асп. (Воронеж. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ ОБРАТИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА*

Sufficient conditions are given for the invertibility of a second-order differential operator with varying coefficients in the space L_p.

Наведені достатні умови оборотності диференціального оператора другого порядку зі змінними коефіцієнтами в просторі L_p.

В данной статье приводятся достаточные условия обратимости дифференциального оператора

$$L = \frac{d^2}{dt^2} + Q(t)\colon W_p^2(\mathbb{R}, X) \subset L_p(\mathbb{R}, X) \to L_p(\mathbb{R}, X),$$

рассматриваемого в банаховом пространстве $L_p = L_p(\mathbb{R}, X)$, $1 \le p \le \infty$, измеримых функций, определенных на вещественной оси $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном банаховом пространстве X, суммируемых со степенью p (существенно ограниченных при $p = \infty$) с нормой

$$\|\varphi\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|_X^p dt\right)^{1/p}, \quad \varphi \in L_p, \quad 1 \le p < \infty, \qquad \|\varphi\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_{t\in\mathbb{R}} \|\varphi(t)\|_X.$$

Пространство Соболева $W_p^2 = W_p^2(\mathbb{R}, X)$ является областью его определения. Оператор L можно рассматривать также и в банаховом пространстве $C(\mathbb{R}, X)$ непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций со значениями в X, являющемся подпространством из $L_\infty(\mathbb{R}, X)$. Функция $Q\colon \mathbb{R} \to L(X)$ ($L(X)$ — банахова алгебра ограниченных линейных операторов, действующих в X) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}, L(X))$.

Если функция $Q(t) \equiv Q_0 \in L(X)$ постоянна, то необходимым и достаточным условием обратимости оператора L является условие

$$\sigma(Q_0) \cap \mathbb{R}_+ = \varnothing, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}_+ = \{t \ge 0\}$. В этом случае обратный оператор $L^{-1}\colon L_p \to L_p$ имеет вид

$$(L^{-1}x)(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{Q_0}(t-s)x(s)ds,$$

где функция Грина $G_{Q_0}\colon \mathbb{R} \to L(X)$ задается формулой

$$G_{Q_0}(u) = \begin{cases} -A^{-1}e^{-Au}/2, & u \ge 0, \\ -A^{-1}e^{Au}/2, & u < 0, \end{cases}$$

и оператор $A \in L(X)$ является таким квадратным корнем из $-Q_0$, что его спектр $\sigma(A)$ лежит в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

В общем случае, когда функция Q зависит от t, условие

$$\mathrm{X}(Q) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \operatorname{dist}(\sigma(Q(t)), \mathbb{R}_+) > 0 \tag{2}$$

* Работа частично поддержана Международным научным фондом, грант № ZA000.

равномерной отделенности спектров операторов $Q(t)$ от полуоси $\mathbb{R}_+$, являющееся естественным аналогом условия (1), не гарантирует существования обратного оператора к L. Ряд достаточных условий обратимости дифференциального оператора первого порядка приведен в ([1], гл. III–V; [2; 3], гл. X; [4], § 4.10; [5, 6]) и для дифференциального оператора второго порядка в [7].

Основные результаты данной статьи получены при выполнении предположения (2) с помощью метода „замороженных" коэффициентов. Из условия (2) следует, что каждый из операторов вида

$$L_t = \frac{d^2}{ds^2} + Q(t)\colon W_p^2 \subset L_p \to L_p, \quad t \in \mathbb{R}$$

(с „замороженными" коэффициентами) обратим и обратные имеют вид

$$\left(L_t^{-1} f\right)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{Q(t)}(s-\tau) f(\tau)\, d\tau, \quad f \in L_p, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть в дальнейшем выполняются следующие предположения.

***Предположение* 1.** *Существуют постоянные* $M,\ \gamma > 0$ *такие, что* $\| G_{Q(t)}(u) \| \le M \exp(-\gamma |u|)$ *для произвольных* $\forall\ u, t \in \mathbb{R}$.

Отсюда следует ограниченность линейных операторов $B_l,\ B_r\colon L_p \to L_p$, определенных формулами

$$(B_l f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{Q(t)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau, \qquad (B_r f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{Q(\tau)}(t-\tau) f(\tau)\, d\tau.$$

***Предположение* 2.** *Существует такая постоянная* $c(Q) \ge 0$, *что* $\| Q(t) - Q(\tau) \| \le c(Q) |t-\tau|$, *для произвольного* $\forall\ t, r \in \mathbb{R}$.

Например, если функция $Q(t)$ непрерывно дифференцируема и ее производная $\dot{Q}$ ограничена, то можно положить $c(Q) = \| \dot{Q} \|_\infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условие* (2) *и предположения* 1 *и* 2. *Тогда если* $2Mc(Q) < \gamma^2$, *то оператор* $L\colon W_p^2 \subset L_p \to L_p$ *обратим.*

В доказательстве теоремы используются следующие равенства:

$$(B_l L x)(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} G_{Q(t)}(t-\tau) [Q(\tau) - Q(t)] x(\tau)\, d\tau,$$

$$(L B_r x)(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} [Q(t) - Q(\tau)] G_{Q(t)}(t-\tau) x(\tau)\, d\tau.$$

Из условия $2Mc(Q) < \gamma^2$ следует, что $\| B_l L - I \| < 1$, $\| L B_r - I \| < 1$. Поэтому для оператора L существуют правый и левый обратные, которые задаются формулами

$$L_r^{-1} = B_r (L B_r)^{-1} = B_r \sum_{k=0}^{\infty} (I - L B_r)^k,$$

$$L_l^{-1} = (B_l L)^{-1} B_l = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (I - B_l L)^k \right] B_l.$$

Следствие. *Дифференциальное уравнение* $(Lx)(t) = \ddot{x}(t) + k^2 Q(t) x(t) = f(t)$, $f \in L_p$, *где* $k \in \mathbb{R}_+$ *и оператор* L *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *имеет единственное решение* x_0 *из* W_p^2 *при* $k > 2Mc(Q)/\gamma^2$ *для любой функции* $f \in L_p$.

Конкретные условия обратимости дифференциального оператора первого порядка получены в статье [6]. Однако в ней рассматривалось гильбертово пространство L_2 и применялись совершенно другие методы, использующие условия индефинитной диссипативности линейных операторов. Теорема 1 и ее следствие являются обобщением результатов статьи [7].

В условиях следующей теоремы вместо предположения 2 используется несколько иное предположение.

Предположение 2′. *Для любого числа* $l>0$ *конечна величина*

$$S(l) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R},\,|t-\tau|\le l} \int_{\alpha}^{\alpha+l} \| Q(t)-Q(\tau)\|\, d\tau.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условие* (2) *и предположения* 1 *и* 2′. *Если существует такое число* $l_*>0$, *что* $2MS(l_*)<\left(1-e^{-\gamma l_*}\right)^2$, *то оператор* $L: W_p^2\subset L_p\to L_p$ *обратим.*

В условиях теорем 1 и 2 можно получить оценки для нормы оператора L^{-1}: $L_p\to L_p$. В случае, когда $X=H$ — гильбертово пространство, а $Q(t)=Q^*(t)$ $\forall\, t\in\mathbb{R}$ — самосопряженные операторы из $L(H)$, справедлива следующая теорема, являющаяся непосредственным следствием теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть* $Q(t)$, $t\in\mathbb{R}$, — *самосопряженные операторы из* $L(H)$, *и выполнены условие* (2) *и предположение* 1. *Тогда оператор* $L = d^2/dt^2 + Q(t)$: $W_p^2\subset L_p\to L_p$ *обратим, если выполняется одно из таких условий: а) справедливо предположение* 2 *и* $c(Q)<m^{3/2}$; *б) справедливо предположение* 2′ *и существует число* $l_*>0$ *такое, что* $S(l_*)<\sqrt{m}\left(1-\exp\left\{-\sqrt{m}\,l_*\right\}\right)^2$, *где*

$$m = \inf_{t\in\mathbb{R}}\ \inf_{\|x\|=1,\,x\in H}(-Q(t)x,x).$$

Данный результат легко получается из указанных теорем, если заметить, что для положительного корня $A(t)$, $t\in\mathbb{R}$, $\sigma(A(t))\in\left[\sqrt{m},\sqrt{M}\right]$, $t\in\mathbb{R}$, где

$$M = \sup_{t\in\mathbb{R}}\ \sup_{\|x\|=1}(-Q(t)x,x)$$

и учесть, что норма нормального оператора равна его спектральному радиусу.

Отметим, что метод, используемый в статье [8], позволяет получать условия обратимости дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами.

1. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 584 с.
2. *Массера Х., Шеффер Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
3. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.
4. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
5. *Рожков В. И.* Почти периодические решения линейных систем с малым параметром при производной // Дифференц. уравнения. – 1986. – **22**, № 10. – С. 1829–1833.
6. *Баскаков А. Г., Юргелас В. В.* Индефинитная диссипативность и обратимость линейных дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 12. – С. 1613–1618.
7. *Эдельштейн С. Л.* Операторные аналоги оценок типа ВКБ и разрешимость краевых задач // Мат. заметки. – 1992. – **51**, № 4. – С. 124–131.
8. *Баскаков А. Г.* О приводимости линейных дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 5. – С. 587–595.

Получено 19.10.93