УДК 517.535.4

А. А. Кондратюк

Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста

Пусть $\lambda(r)$ — положительная, непрерывная на $(0, \infty)$ функция, $\lambda(r) \uparrow \uparrow \infty$ при $r \to \infty$, которая называется функцией роста.

Всюду в дальнейшем будем предполагать выполненным условие

$$\lambda(2r) \leqslant M\lambda(r) \tag{1}$$

при некотором $M > 0$ и всех $r > 0$.

Мероморфная функция f называется функцией конечного λ-типа [1], если ее неванлинновская характеристика $T(r, f)$ удовлетворяет неравенству $T(r, f) \leqslant A\lambda(r)$ при некотором $A > 0$ и всех $r > 0$. Класс таких функций обозначим через Λ.

В [2—3] введены и изучены классы Λ^0 мероморфных функций вполне регулярного роста. Функция $f \in \Lambda$, $f(0) = 1$, принадлежит классу Λ^0 тогда и только тогда [2], когда для каждого $k \in \mathbf{Z}$ существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{c_k(r, f)}{\lambda(r)} = c_k, \text{ где } c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} \ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Функция $h(\theta, f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\theta}$ называется индикатором функции $f \in \Lambda^0$ и является [2] разностью двух 2π-периодических ω-тригонометрически выпуклых функций при $\varkappa \leqslant \omega \leqslant \rho$, где

$$\varkappa^2 = \varliminf_{r\to\infty} \lambda(r) \Big/ \int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau}\,d\tau, \qquad \rho^2 = \varlimsup_{r\to\infty} \lambda(r) \Big/ \int_0^r \frac{dt}{t}\int_0^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau}\,d\tau.$$

Класс Λ^0 называется нетривиальным, если в нем существует функция с отличным от тождественного нуля индикатором. Если существует выпуклая относительно $\ln r$ функция роста $\tilde{\lambda}(r)$ такая, что $\lambda(r)/\tilde{\lambda}(r) \to 1$ при $r \to \infty$, то класс Λ^0 [3] нетривиален.

Определение 1 [4] (с. 13). *Пусть* $0 < \alpha \leqslant 2$, $E \subset \mathbf{C}$. *α-Мерой Карлесона множества E называется число* $\alpha - \operatorname{mes} E = \inf_K \sum_\nu r_\nu^\alpha$, *где* $E \subset K = \bigcup_\nu K^{(\nu)}$, $K^{(\nu)} = \{z : |z - z_\nu| < r_\nu\}$.

Определение 2 [5]. *Множество $C \subset \mathbf{C}$ называется C_0^α-множеством, если*

$$\alpha - \overline{\operatorname{den}}\, C = \varlimsup_{R\to\infty} \alpha - \operatorname{mes}(C \cap K_R)\, R^{-\alpha} = 0, \tag{2}$$

где $K_R = \{z : |z| < R\}$, *и — C_0^0-множеством, если равенство* (2) *имеет место для всех* $\alpha \in (0, 2]$.

Определение 3. *Пусть* $u(z)$, $u_n(z)$, $n \in \mathbf{N}$, $z = x + iy$, *— функции со значениями в* $\overline{\mathbf{R}}$, *локально интегрируемые в* $\mathbf{R}^2$. $u_n \to u$, $n \to \infty$, *слабо, если*

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{\mathbf{R}^2} u_n(z)\,\varphi(z)\,dxdy = \iint_{\mathbf{R}^2} u(z)\,\varphi(z)\,dxdy \tag{3}$$

для любой непрерывной финитной на $\mathbf{R}^2$ *функции* φ; $u_n \to u$, $n \to \infty$, *в топологии* $D'(\mathbf{R}^2)$, *если равенство* (3) *выполняется для любой финитной бесконечно дифференцируемой на* $\mathbf{R}^2$ *функции* φ.

Используя некоторые результаты из [5], мы доказываем здесь две теоремы, характеризующие асимптотическое поведение функций $f \in \Lambda^0$.

Если $\lambda(r) = r\zeta(r)$, где $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок [6], функция $f \in \Lambda^0$ целая, то она является [7] функцией вполне регулярного роста в смысле Левина—Пфлюгера [6]. Аналогичные формулируемым ниже результаты для таких функций были получены в [5], [8], [9].

Теорема 1. *Пусть функция роста* $\lambda(r)$ *выпукла относительно* $\ln r$. *Если* $f \in \Lambda^0$, *то существует измеримое (по Лебегу)* C_0^0-*множество* C *такое, что*

$$\lim_{C \ni z \to \infty} \frac{\ln |f(z)|}{\lambda(z)} = h(\theta, f), \quad z = re^{i\theta}. \tag{4}$$

Обратно, если для функции $f \in \Lambda$ *существуют измеримое* C_0^2-*множество* C *и непрерывная* 2π-*периодическая функция* $H(\theta)$ *такие, что*

$$\lim_{C \ni z \to \infty} \frac{\ln |f(z)|}{\lambda(r)} = H(\theta), \quad z = re^{i\theta}, \tag{5}$$

то $f \in \Lambda^0$ и $h(\theta, f) = H(\theta)$ *для всех* θ.

Теорема 2. *Если* $f \in \Lambda^0$, *то*

$$\left[\frac{\ln |f(tre^{i\theta})|}{\lambda(tr)} - h(\theta, f)\right] \frac{\lambda(tr)}{\lambda(t)} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{6}$$

слабо.

Обратно, пусть $f \in \Lambda$ *и для некоторой непрерывной* 2π-*периодической функции* $H(\theta)$ *выполняется*

$$\left[\frac{\ln |f(tre^{i\theta})|}{\lambda(tr)} - H(\theta)\right] \frac{\lambda(tr)}{\lambda(t)} \to 0, \quad t \to \infty, \tag{6'}$$

слабо, то $f \in \Lambda^0$ *и* $h(\theta, f) = H(\theta)$ *для всех* θ.

Для доказательства нам нужно будет несколько лемм.

Лемма 1 [5], [6] (с. 185). *Пусть* $\{C_j\}$—*последовательность* C_0^0-*множеств. Существует последовательность* $\{R_j\}$, $R_j \to \infty$, *такая, что множество* $C = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{C_j \cap K_{R_{j+1}} \setminus K_{R_j}\}$ *является* C_0^0-*множеством.*

Лемма 2. *Пусть* f — *мероморфная функция,* $\mathbf{C} \supset C$ — *измеримое множество,* $C_R = C \cap K_R \setminus K_1$. *Тогда для любого* $a > 1$ *справедливо*

$$\iint_{C_R} \ln^+ |f(z)|\, dxdy \leqslant 12 \sqrt{\frac{\pi}{e} \frac{a}{a-1}}\, T(aR, f)\, R\, (\operatorname{mes} C_R)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Пусть $\chi(z)$ — характеристическая функция множества C_R. Используем следующий результат из [10] в форме, изложенной в [11] (с. 58). Если $\chi(re^{i\theta})$ измерима как функция от θ, то

$$\int_0^{2\pi} \chi(re^{i\theta}) \ln^+ |f(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant \frac{6a}{a-1} T(ar, f)\, \mu(r) \ln \frac{2\pi e}{\mu(r)},$$

где $\mu(r) = \int_0^{2\pi} \chi(re^{i\theta})\, d\theta$. Таким образом,

$$\iint_{1<|z|<R} \chi(z) \ln^+ |f(z)|\, dxdy \leqslant \frac{6a}{a-1} T(aR, f) \int_1^R r\mu(r) \ln \frac{2\pi e}{\mu(r)}\, dr. \tag{7}$$

Учитывая, что $\sqrt{x}\ln\frac{2\pi e}{x}\leqslant 2\sqrt{\frac{2\pi}{e}}$ при $0<x<2\pi$, и применяя неравенство Коши — Буняковского, находим

$$\int\limits_1^R r\mu(r)\ln\frac{2\pi e}{\mu(r)}\,dr\leqslant 2\sqrt{\frac{2\pi}{e}}\int\limits_1^R r\sqrt{\mu(r)}\,dr\leqslant 2\sqrt{\frac{\pi}{e}}R\left\{\int\limits_1^R r\mu(r)\,dr\right\}^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2\sqrt{\frac{\pi}{e}}R\left\{\int\limits_1^R r\int\limits_0^{2\pi}\chi(re^{i\theta})\,d\theta dr\right\}^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{\frac{\pi}{e}}(\mathrm{mes}\,C_R)^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) вытекает требуемое неравенство.

Лемма 3. *Пусть $f\in\Lambda$, функция $\lambda(r)$ выпукла относительно $\ln r$. Если для некоторой непрерывной 2π-периодической функции $H(\theta)$ выполняется (6′) слабо, то существует измеримое C_0^0-множество C такое, что*

$$\lim_{C\not\ni z\to\infty}\frac{\ln|f(z)|}{\lambda(r)}=H(\theta),\quad z=re^{i\theta}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что при любом $\varepsilon>0$ множество

$$G=\left\{z=re^{i\theta}:\left|\frac{\ln|f(z)|}{\lambda(r)}-H(\theta)\right|>\varepsilon\right\} \qquad (9)$$

является C_0^0-множеством. Допустим противное, т. е., что существует $\alpha>0$, при котором (см. соотношение (2))

$$\alpha-\overline{\mathrm{den}}\,G=2\delta>0. \qquad (10)$$

Нетрудно найти $\eta=\eta(\delta)$ такое, что

$$\overline{\lim_{R\to\infty}}\,R^{-\alpha}\alpha-\mathrm{mes}\,K_{\eta R}<\frac{\delta}{2}. \qquad (11)$$

Из (10) и (11) вытекает существование такой последовательности $\{R_j\}$, $R_j\to\infty$, что $\alpha-\mathrm{mes}\,(G\cap K_{R_j}\setminus K_{\eta R_j})\,R_j^{-\alpha}>\delta$.

Введем обозначение $E_j=\left\{\zeta=\frac{z}{R_j}:z\in G\cap K_{R_j}\setminus K_{\eta R_j}\right\}\subset K_1\setminus K_\eta$. Тогда

$$\alpha-\mathrm{mes}\,E_j\geqslant\delta, \qquad (12)$$

так как при сжатии $\zeta=z/R_j$ кружки радиусов r_ν отображаются в кружки радиусов r_ν/R_j.

При $\zeta\in E_j$ выполняется $R_j\zeta=z\in G$, поэтому в силу (9) имеем

$$\left|\frac{\ln|f(R_j\zeta)|}{\lambda(R_j|\zeta|)}-H(\theta)\right|\frac{\lambda(R_j|\zeta|)}{\lambda(R_j)}>\frac{\varepsilon}{M_\eta}, \qquad (13)$$

где M_η удовлетворяет неравенству $\lambda(1/\eta\eta R_j)\leqslant M_\eta\lambda(\eta R_j)$ для всех R_j.

Покажем, что соотношения (12) и (13) противоречат слабой сходимости в (6′). Функцию f можно представить [1] в виде частного двух целых функций f_1/f_2, $f_1\in\Lambda$, $f_2\in\Lambda$. Так как максимум модуля $M(r,f_\nu)$ функции f_ν на окружности $\{z:|z|=r\}$ удовлетворяет неравенству $\ln M(r,f_\nu)\leqslant 3T(2r,f_\nu)$, $\nu=1,2$, то семейства субгармонических функций от ζ

$$\left\{\frac{\ln|f_1(R_j\zeta)|}{\lambda(R_j)}\right\},\quad\left\{\frac{\ln|f_2(R_j\zeta)|}{\lambda(R_j)}\right\} \qquad (14)$$

ограничены сверху на каждом компакте в $\mathbf{C}$. Они, следовательно [5], [12], компактны в топологии $D'(\mathbf{R}^2)$ в том смысле, что из них можно выделить подпоследовательности, сходящиеся в этой топологии к субгармоническим функциям $v_1(\zeta)$, $v_2(\zeta)$ в $\mathbf{C}$ соответственно. Семейство же $\{\psi_t(\tau)=\lambda(t\tau)/\lambda(t)\}$, $\eta\leqslant\tau=|\zeta|\leqslant 1$, компактно в пространстве $C[\eta,1]$ непрерывных на $[\eta,1]$ функций с равномерной нормой. Это вытекает из теоремы Арцела, так как, во-первых, $0\leqslant\psi_t(\tau)\leqslant 1$, во-вторых, в силу выпуклости относительно $\ln r$ функция $\lambda(r)$ представима в виде $\lambda(r)=\int\limits_0^r \frac{\nu(x)}{x}dx+\lambda(0)$, где $\nu(x)$ неубывающая, вследствие чего $\psi_t(\tau_2)-\psi_t(\tau_1)=\frac{1}{\lambda(t)}\int\limits_{t\tau_1}^{t\tau_2}\frac{\nu(x)}{x}dx\leqslant$ $\leqslant\frac{\nu(t)}{\lambda(t)}\ln\frac{\tau_2}{\tau_1}\leqslant\frac{\lambda(et)}{\lambda(t)}\ln\frac{\tau_2}{\tau_1}\leqslant M^2(\ln\tau_2-\ln\tau_1)$, $\eta\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant 1$. Таким образом, из семейства функций, стоящих в левой части соотношения (13), $R_j\to\infty$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в топологии $D'(K_1\setminus\overline{K}_\eta)$ к $v_1(\zeta)-v_2(\zeta)-\psi(\zeta)$, где $\psi(\zeta)$ — некоторая непрерывная на $K_1\setminus\overline{K}_\eta$ функция. В силу слабой сходимости в (6′) для почти всех $\zeta\in K_1\setminus\overline{K}_\eta$ выполняется

$$v_1(\zeta)-v_2(\zeta)-\psi(\zeta)=0. \tag{15}$$

Разность $v(\zeta)=v_1(\zeta)-v_2(\zeta)$ определена для тех ζ, где $v_1(\zeta)$ и $v_2(\zeta)$ не равны одновременно $-\infty$. А это множество, являющееся пересечением двух полярных множеств, имеет [13] (с. 234) емкость нуль. Поскольку интегральное среднее функции v по кругу радиуса γ с центром в точке ζ стремится к $v(\zeta)$ при $\gamma\to 0$ [13] (с. 256) и этим же свойством обладает функция $\psi(\zeta)$, то равенство (15) имеет место там, где $v(\zeta)$ определена, т. е. вне множества логарифмической емкости нуль.

По теореме 4.4.1 из [5] (см. также теорему 2.7.4.1 из [12]) выбранные из семейств (14) подпоследовательности сходятся на $K_1/\overline{K}_\eta$ по α-мере Карлесона к v_1 и v_2 соответственно. Таким же свойством обладает, очевидно, подпоследовательность, выделенная из семейства $\{\psi_t(\tau)H(\theta)\}$. Поскольку множество емкости нуль имеет [4] нулевую α-меру Карлесона, то левая часть соотношения (13) должна стремиться к нулю для некоторой подпоследовательности $\{R_{j_l}\}$, $R_{j_l}\to\infty$, по α-мере Карлесона. Но это противоречит соотношениям (12) и (13). Тем самым установлено, что множество G — C_0^0-множество.

Пусть $\varepsilon_j\downarrow 0$ при $j\to\infty$. Для каждого ε_j измеримое множество $C_j=\left\{z=re^{i\theta}:\left|\frac{\ln|f(z)|}{\lambda(r)}-H(\theta)\right|>\varepsilon_j\right\}$ является, как только что показано, C_0^0-множеством. Построим по лемме 1 измеримое C_0^0-множество C. Оно искомое.

Замечание 1. Если $H(\theta)\equiv 0$, то, как видно из только что проведенного доказательства, лемма 3 остается верной без предположения о выпуклости функции $\lambda(r)$ относительно $\ln r$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f\in\Lambda^0$, φ — непрерывная, финитная на $\mathbf{R}^2$ функция, $\operatorname{supp}\varphi\subset K_{r_0}$, $0<\delta<1$, $|\varphi(z)|\leqslant M_1$, $z\in\mathbf{C}$.

Из (1) следует существование постоянной $M_0(r_0)=M_0>0$ такой, что $\lambda(tr_0)/\lambda(t)\leqslant M_0$ для всех $t>0$.

Согласно следствию 2 из [2] для произвольного ε, $0<\varepsilon<1$, найдется t_ε такое, что при $t>t_\varepsilon/r$ выполняется

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\frac{\ln|f(tre^{i\theta})|}{\lambda(tr)}-h(\theta,f)\right|d\theta<\frac{\varepsilon}{M_0M_1r_0^2}.$$

Тогда при $t > t_\varepsilon/\delta$

$$\left|\int_\delta^{r_0} r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\ln|f(tre^{i\theta})|}{\lambda(tr)} - h(\theta, f)\right) \frac{\lambda(tr)}{\lambda(t)} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta dr\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Далее, так как $\int_0^{2\pi} |\ln|f(re^{i\theta})||\, d\theta \leqslant 2T(r, f)$, то, обозначая через $\|\cdot\|_1$ норму в пространстве Лебега $L_1[0, 2\pi]$, имеем

$$\left|\int_0^{\delta} r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\ln|f(tre^{i\theta})|}{\lambda(tr)} - h(\theta, f)\right) \frac{\lambda(tr)}{\lambda(t)} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta dr\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int_0^{\delta} r \left(\frac{2T(r, f)}{\lambda(tr)} + \|h\|_1\right) dr \leqslant M_1 (2A + \|h\|_1) \frac{\delta^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \tag{17}$$

при $\delta = \{\varepsilon/[M_1(2A + \|h\|_1)]\}^{\frac{1}{2}}$. Из (16) и (17) следует, что при таком δ и $t > t_\varepsilon/\delta$ выполняется

$$\left|\int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\ln|f(tre^{i\theta})|}{\lambda(tr)} - h(\theta, f)\right) \frac{\lambda(tr)}{\lambda(t)} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta dr\right| < \varepsilon.$$

Тем самым первая часть теоремы 2 доказана. Для доказательства второй ее части заметим, что проекция C_0^0-множества при отображении $z \to |z|$ — множество нулевой линейной плотности на $\mathbb{R}$. В силу леммы 3 мы находимся в условиях теоремы A из [15], сформулированной нами для целых функций, но справедливой при таком же доказательстве и для мероморфных. В силу этой теоремы имеем $f \in \Lambda^0$ и $h(\theta, f) = H(\theta)$ почти всюду, а следовательно, и всюду в силу непрерывности обеих функций.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f \in \Lambda^0$. По теореме 2 имеет место (6) слабо, а в силу леммы 3 при $H(\theta) = h(\theta, f)$ выполняется (4), где C — некоторое C_0^0-множество. Тем самым первое утверждение теоремы 1 доказано.

Перейдем к доказательству второго ее утверждения. Для этого согласно теореме 2 достаточно установить, что при заданных условиях выполняется (6′) слабо.

Пусть φ — функция такая, как и при доказательстве теоремы 2, $\delta > 0$. Тогда

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\ln|f(z)|}{\lambda(t|z|)} - H(\arg z)\right) \frac{\lambda(t|z|)}{\lambda(t)} \varphi(z)\, dxdy =$$

$$= \iint_{K_{r_0} \setminus K_\delta} + \iint_{K_\delta} = I_1(t) + I_2(t), \quad z = x + iy. \tag{18}$$

Точно так же, как мы получили (17), для $I_2(t)$ получается оценка

$$|I_2(t)| \leqslant M_1(2A + \|H\|_1)\, \delta^2/2. \tag{17′}$$

Для $I_1(t)$, полагая $tz = w = \xi + i\eta$, при $t > 1/\delta$ получаем

$$|I_1(t)| \leqslant \frac{M_0 M_1}{t^2} \iint_{\widetilde{K}_{tr_0} \setminus C} \left|\frac{\ln|f(w)|}{\lambda(|w|)} - H(\arg w)\right| d\xi d\eta +$$

$$+ \frac{M_1}{t^2 \lambda(t)} \iint_{C_{tr_0}} |\ln|f(w)||\, d\xi d\eta + \frac{M_0 M_1}{t^2} \iint_{C_{tr_0}} |H(\arg w)|\, d\xi d\eta =$$

$$= J_1(t) + J_2(t) + J_3(t),$$

где $\widetilde{K}_{tr_0} = \{w : \delta t < |w| < r_0 t\}$, C — заданное C_0^0-множество, $C_{tr_0} = C \cap K_{tr_0}$, а M_0 — постоянная, удовлетворяющая неравенству $\lambda(tr_0) \leqslant M_0 \lambda(t)$ для всех $t > 0$.

Так как $2 - \operatorname{mes} C_{tr_0} \geqslant b \operatorname{mes} C_{tr_0}$, где b — некоторая положительная постоянная (см. [4], [13], с. 238), функция H ограничена, C — C_0^2-множество, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_1(\varepsilon)$, что $\| J_3(t) \| < \varepsilon/4$, $t > t_1$. В силу (5) при $t > \delta^{-1} t_2 = \delta^{-1} t_2(\varepsilon)$ имеем $\| J_1(t) \| < \varepsilon/4$.

Используя лемму 2, полагая в ней $a = 2$, $R = r_0 t$, а также то, что $T(r, f) = T(r, 1/f)$, $|\ln|f|| = \ln^+|f| + \ln^+(1/|f|)$, находим

$$|J_2(t)| \leqslant \frac{48\sqrt{\pi} M_1}{\sqrt{e t^2 \lambda(t)}} T(2r_0 t, f) (\operatorname{mes} C_{tr_0})^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 48 \sqrt{\frac{\pi}{e}} M M_0 M_1 \frac{r_0}{\sqrt{b}} \left\{ \frac{2 - \operatorname{mes} C_{tr_0}}{t^2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая определение C_0^2-множества, найдем такое t_3, что $|J_2(t)| < \varepsilon/4$, $t > t_3$. Из оценок для $J_\nu(t)$ и (17′) ясно, какими нужно взять t_0 и δ, чтобы $|J_1(t) + J_2(t)| < \varepsilon$, $t > t_0$. Отсюда и из (18) заключаем, что выполняется (6′) слабо, и теорема 1 доказана.

Замечание 2. В силу замечания 1 и критерия нетривиальности [3] классов Λ_E^0 целых функций вполне регулярного роста первая часть теоремы 1 справедлива для классов Λ_E^0 без предположения о выпуклости функции $\lambda(r)$ относительно $\ln r$.

1. *Rubel L. A., Taylor B. A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions.— Bull. Soc. Math. France, 1968, **96**, p. 53—96.
2. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. I.— Мат. сб., 1978, **106**, № 3, с. 386—408.
3. *Кондратюк А. А.* Метод рядов Фурье для целых и мероморфных функций вполне регулярного роста. II.— Мат. сб., 1980, **113**, № 1, с. 118—132.
4. *Карлесон Л.* Избранные проблемы теории исключительных множеств.— М.: Мир, 1971.— 151 с.
5. *Азарин В. С.* Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка.— Мат. сб., 1979, **108**, № 2, с. 147—167.
6. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.— М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.
7. *Азарин В. С.* О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции.— Теория функций, функц. анализ и их прилож., 1977, вып. 27, с. 9—22.
8. *Агранович П. З.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных.— В кн.: Теория функций, функ. анализ и их прилож., Харьков, 1977, вып. 30, с. 3—13.
9. *Агранович П. З., Ронкин Л. И.* О функциях вполне регулярного роста многих переменных.— Харьков. : Изд-во Харьковск. ун-та, 1976.— 21 с.
10. *Edrei A., Fuchs W. H. J.* Bounds for the number of deficient values of certain classes of meromorphic functions.— Proc. London Math. Soc., 1962, **12**, p. 315—344.
11. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— — М.: Наука, 1970.— 592 с.
12. *Азарин В. С.* Теория роста субгармонических функций.— Харьков: Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1978.— 72 с.
13. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М.: Мир, 1980.— 304 с.
14. *Noverraz P.* Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes.— Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 1969, **19**, p. 419—493.
15. *Кондратюк А. А.* Асимптотическое поведение и количество дефектных значений целых функций вполне регулярного роста.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 5. с. 11—13.

Львовский
государственный университет

Поступила в редакцию
03.12.81