УДК 519.21

А. Э. Еременко

Независимость некоторых полиномиальных статистик от выборочного среднего

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n)$ — случайный вектор в $\mathbf{R}^n$ с независимыми компонентами. Полиномиальной статистикой называется случайная величина $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$, где P — полином от координат вектора x. Предположим, что x — повторная выборка, т. е. случайные величины x_j имеют одну и ту же функцию распределения $F(t)$. Одной из важных характеризационных задач математической статистики является определение функций $F(t)$, при которых полиномиальные статистики $P_1(x)$, $P_2(x)$ могут быть независимыми случайными величинами. Когда одна из статистик линейна, общим методом решения таких задач является метод дифференциальных уравнений. Методом дифференциальных уравнений проведено сравнительно полное исследование случая, когда P_1 — линейная, а P_2 — квадратичная формы ([1], § 4.2).

В настоящей работе исследуются статистики третьей степени, не зависящие от линейной формы. Будем рассматривать линейную форму вида $L(x) = x_1 + \dots + x_n$, $n \geqslant 2$. Любую линейную форму с ненулевыми коэффициентами можно привести к такому виду заменой $x_j' = a_j x_j$. Пусть $P(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами степени m. Многочлен P называется допустимым, если хотя бы один член x_j^m входит в несократимую запись P с ненулевым коэффициентом. Обозначим через d_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, сумму коэффициентов многочлена P при членах степени k. Не уменьшая общности, можно считать, что свободный член у многочлена P отсутствует.

Теорема 1. *Пусть x — повторная выборка, P — допустимая статистика степени m такая, что одно из чисел $d_k \neq 0$. Если $P(x)$ и $L(x)$ — независимые случайные величины, то $P(x) = \mathrm{const}$ почти наверное (п. н.)*

Случай, когда $d_k = 0$ при всех k, удается исследовать лишь при $m = 3$. Пусть P — многочлен третьей степени. Положим

$$P(x) = \sum_{i,j,k=1}^{n} c_{ijk} x_i x_j x_k + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad c_{ijk},\ c_{ij},\ c_j \in \mathbf{R}, \qquad (1)$$

и введем обозначение $a_1 = \sum\limits_{i} c_{iii}$, $a_2 = \sum\limits_{i \neq j} (c_{iij} + c_{iji} + c_{jii})$, $a_3 = \frac{1}{6} \sum\limits_{i<j<k} c_{ijk}$,

$$a_4 = \sum_{j} c_{jj},\ a_5 = \sum_{i \neq j} c_{ij},\ a_6 = \sum_{j} c_j.$$

Теорема 2. *Пусть x — повторная выборка, $P(x)$ — допустимая статистика вида (1), при этом хотя бы одно из чисел $a_j \neq 0$. Если $P(x)$ и $L(x)$ — независимые случайные величины, то либо x — нормальный вектор, либо $P(x) = \mathrm{const}$ п. н.*

Доказательство теоремы 1. Обозначим через f характеристическую функцию (х. ф.) функции распределения F случайных величин x_j. Из независимости $P(x)$ и $L(x)$ и теоремы 8.12 из [2], учитывая, что полином P допустим, получаем, что f — целая функция конечного порядка. Опять воспользовавшись независимостью и рассуждая, как при доказательстве теоремы из [2] (лемма 8.3.1, стр. 194), получим дифференциальное уравнение

$$\sum a_{j_1 \ldots j_n} \frac{f^{(j_1)}}{f} \ldots \frac{f^{(j_n)}}{f} = A, \tag{2}$$

где суммирование распространяется на все наборы индексов такие, что $j_1 + \ldots + j_n \leqslant m$; $a_{j_1 \ldots j_n}$ и A—некоторые постоянные, причем $\sum\limits_{j_1 + \ldots + j_n = k} a_{j_1 \ldots j_n} = (\sqrt{-1})^k d_k$, $k = 1, \ldots, m$.

Применяя метод Вимана — Валирона [3] (гл. V), воспользуемся формулой $f^{(j)}(\zeta)/f(\zeta) = (1 + o(1))(\nu(r)/\zeta)^j$, $j = 1, 2, \ldots$. Здесь $r = |\zeta| \to \infty$, без учета множества конечной логарифмической меры, ζ — точка, в которой достигается максимум модуля функции f на окружности $|z| = r$, $\nu(r)$ — центральный индекс [3] (стр. 25,(8)). Подставляя эту формулу в (2), получаем $\sum\limits_{k=1}^{m} ((\sqrt{-1})^k d_k + o(1))(\nu(r)/\zeta)^k = A$, $r \to \infty$, при этом в силу условия теоремы хотя бы одно из чисел $d_k \neq 0$ Отсюда следует, что $\nu(r) = O(r)$, $r \to \infty$, и, следовательно, функция f экспоненциального типа.

Теперь из теоремы 2.2.2 из [2] вытекает, что множество точек роста функции $F(t)$ ограничено, т. е. x_j ограничены п. н. Доказательство заканчивается применением следующей леммы.

Лемма. *Пусть случайные величины x_j в повторной выборке ограничены п. н. хотя бы с одной стороны и произвольная статистика $P(x)$ не зависит от $L(x)$. Тогда $P(x) = \text{const}$ п. н.*

Эта лемма доказывается рассуждением, аналогичным приведенному в [1] на стр. 152.

Доказательство теоремы 2. Ввиду теоремы 1 можно считать, что $d_k = 0$, $k = 1, 2, 3$. Уравнение (2) при $m = 3$ принимает вид

$$i\left(a_1 \frac{f'''}{f} + a_2 \frac{f''f'}{f \cdot f} + a_3\left(\frac{f'}{f}\right)^3\right) + a_4 \frac{f''}{f} + a_5\left(\frac{f'}{f}\right)^2 = A,$$
$$i = \sqrt{-1}, \; A \in \mathbf{R} \tag{3}$$

(постоянная A — математическое ожидание $P(x)$, взятое с противоположным знаком). Поскольку статистика P допустимая, решение этого уравнения должно быть целой функцией конечного порядка. Делая замену $w = f'/f$, получаем $i(a_1 w'' + (3a_1 + a_2) w'w) + a_4 w' = A$. Мы воспользовались тем, что $a_6 = d_1 = 0$, $a_4 + a_5 = d_2 = 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = d_3 = 0$. Интегрируя и умножая на $-i$, получим уравнение Риккати

$$a_1 w' + \frac{1}{2}(3a_1 + a_2) w^2 - i a_4 w = -iAz + C, \; A \in \mathbf{R}, \; C \in \mathbf{C}. \tag{4}$$

Рассмотрим различные случаи. 1. $a_1 \neq 0$, $3a_1 + a_2 \neq 0$, $A \neq 0$. Покажем, что в этом случае уравнение (3) не может иметь целых характеристических решений. Заменой $w = \dfrac{2a_1}{3a_1 + a_2} y + \dfrac{ia_4}{3a_1 + a_2} = \alpha y + \beta$ приведем уравнение (4) к виду

$$y' + y^2 = iA_1 z + C_1, \quad A_1 \in \mathbf{R}, \; C_1 \in \mathbf{C}. \tag{5}$$

Известно, что все решения уравнения (5) — мероморфные функции с бесконечным числом полюсов, при этом все вычеты равны 1. Поэтому $y = v'/v$, v — некоторая целая функция. Очевидно, что $f(z) = (v(z))^\alpha \exp \beta z$. Для функции v имеем уравнение

$$v'' = (iA_1 z + C_1) v, \; A_1 \in \mathbf{R}, \; C_1 \in \mathbf{C}. \tag{6}$$

Это уравнение сводится к уравнению Эйри [4] (п. 23.4). Известно, что всякое решение уравнения (6) — целая функция вполне регулярного роста порядка 3/2. Поэтому индикатор Фрагмена—Линделефа $h(\theta)$ функции f совпадает с индикатором функции v и в силу свойства хребта целой характеристической функции f удовлетворяет условиям

$$h(\theta) \leqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)(\sin\theta)^{3/2}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \tag{7}$$

$$h(\theta) \leqslant h\left(-\frac{\pi}{2}\right)|\sin\theta|^{3/2}, \qquad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \tag{8}$$

Покажем, что индикатор решения уравнения (5) не может обладать свойствами (7), (8). Пусть, например, $A_1 > 0$. Из асимптотики, приведенной в [4], вытекает, что уравнение (6) имеет два линейно независимых решения v_1 и v_2 с индикаторами соответственно $h_1(\theta) = \varkappa\cos\left(\frac{3}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right)$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $h_2(\theta) = -\varkappa\cos\left(\frac{3}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right)$, $-\frac{7\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{5\pi}{6}$, $\varkappa > 0$. Для всякого решения v уравнения (6) справедливо равенство $v = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2$ (γ_1, γ_2 — постоянные). Если $\gamma_1 = 0$, то $h_2(\theta) = h(\theta)$; если $\gamma_2 = 0$, то $h(\theta) = h_1(\theta)$; если $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$, то $h(\theta) = \left|\varkappa\cos\frac{3}{2}(\theta + \pi/6)\right|$ в окрестности точки $\theta = -\pi/2$. Все три случая противоречат соотношению (8). Аналогично рассматривается вариант, когда $A_1 < 0$. Тогда получится противоречие с (7).

2. $a_1 \neq 0$, $3a_1 + a_2 \neq 0$, $A = 0$. Повторяя рассуждения п. 1 до уравнения (6), получаем, что $v'' = C_1 v$. Отсюда $v(z) = \gamma_1 \exp(\sqrt{C_1}z) + \gamma_2 \exp(-\sqrt{C_1}z)$. Следовательно, функция $f(z) = (v(z))^\alpha \exp\beta z$ — функция экспоненциального типа. Поэтому с. в. x_j ограничены п. н., и из леммы следует, что $P(x) = \mathrm{const}$ п. н.

3. $a_1 \neq 0$, $3a_1 + a_2 = 0$. Уравнение (4) приобретает вид $a_1 w' - ia_4 w = iAz + C$. Общее решение этого уравнения — $w = C_1 \exp\left(\frac{a_4}{a_1} iz\right) + Q(z)$, Q—многочлен. Если $C_1 a_4 \neq 0$, то $f(z) = \exp\int w(z)\,dz$ — функция бесконечного порядка. Это противоречит теореме 8.12 из [2]. Если $C_1 a_4 = 0$, то $f(z)$ — целая функция без нулей, и по теореме 3.13 [2] случайные величины x_j нормальны.

4. $a_1 = 0$. Уравнение (4) принимает вид

$$1/2 a_2 w^2 - ia_4 w = -iAz + C. \tag{9}$$

Если значения коэффициентов таковы, что (9) имеет мероморфное решение, то w — многочлен первой степени, и мы опять приходим к нормальному закону.

Теорема доказана.

1. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики.— М.: Наука, 1972.— 656 с.
2. *Рамачандран Б.* Теория характеристических функций.— М.: Наука, 1975.— 224 с.
3. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.— М.: Физматгиз, 1960.— 319 с.
4. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1968.— 464 с.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступила в редакцию
02.12.80