УДК 517.9

С. О. Баекова

О притяжимости траектории из окрестности экспоненциально устойчивого инвариантного тора

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi) + f_1(\varphi, y, \varepsilon), \quad \varepsilon dy/dt = P(\varphi)\, y + C(\varphi) + f_2(\varphi, y, \varepsilon), \tag{1}$$

где ε — малый положительный параметр.

Пусть система (1) имеет инвариантный m-мерный тор $\mathcal{T}_m(\varepsilon)$. Исследуем поведение решения (1) в окрестности этого многообразия. Укажем условия, при которых любая траектория из малой окрестности $\mathcal{T}_m(\varepsilon)$ притягивается к соответствующей траектории на $\mathcal{T}_m(\varepsilon)$ по экспоненциальному закону.

Введем замену переменных, положив

$$y = u(\varphi, \varepsilon) + z, \tag{2}$$

где $u(\varphi, \varepsilon)$ — инвариантный тор системы (1). Относительно переменных φ, z получим новую систему уравнений

$$d\varphi/dt = a(\varphi) + g_1(\varphi, z, \varepsilon), \quad \varepsilon dz/dt = [P(\varphi) + P_1(\varphi, z, \varepsilon)]\, z, \tag{3}$$

где $g_1(\varphi, z, \varepsilon) = f_1(\varphi, u(\varphi, \varepsilon) + z, \varepsilon)$, $P_1(\varphi, z, \varepsilon) = \int\limits_0^1 \partial f_2(\varphi, u + \tau z, \varepsilon)/\partial(u + \tau z)\, d\tau - \varepsilon \partial u/\partial\varphi \int\limits_0^1 \partial f_1(\varphi, u + \tau z, \varepsilon)/\partial(u + \tau z)\, d\tau$.

Пусть $\psi(t) = \psi(t, \psi_0)$ $(\psi(0, \psi_0) = \psi_0)$ — решение системы уравнений, определяющей поток траектории на торе $\mathcal{T}_m(\varepsilon)$,

$$d\psi/dt = a(\psi) + g_1(\psi, 0, \varepsilon). \tag{4}$$

Положим

$$\varphi = \psi(t) + \mu\theta, \quad z = \mu^2 h, \tag{5}$$

где μ — малый положительный параметр.

Замена переменных (5) приводит исходную систему уравнений к виду

$$d\theta/dt = A^1(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon)\,\theta + \mu A^2(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon)\, h, \quad \varepsilon dh/dt = P^1(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon)\, h, \tag{6}$$

где приняты обозначения

$$A^1(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) = \int\limits_0^1 \partial a(\psi + \tau\mu\theta)/\partial\varphi d\tau + \int\limits_0^1 \partial g_1(\psi + \tau\mu\theta, \mu^2 h, \varepsilon)/\partial\varphi d\tau,$$

$$A^2(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) = \int\limits_0^1 \partial g_1(\psi + \mu\theta, \tau\mu^2 h, \varepsilon)/\partial z d\tau, \quad P^1(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) =$$

$$= P(\psi + \mu\theta) + P_1(\psi + \mu\theta, \mu^2 h, \varepsilon). \tag{7}$$

Предположим, что функции $a(\varphi)$, $g_1(\varphi, z, \varepsilon)$, $P(\varphi)$, $P_1(\varphi, z, \varepsilon)$ периодические по φ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, с периодом 2π, функции $a(\varphi)$, $g_1(\varphi, z, \varepsilon)$ имеют непрерывные частные производные по φ, z первого порядка, удовлетворяющие условию Липшица, матрица $P^1(\varphi, z, \varepsilon)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по φ, z. Обозначим через M_1, M_2, K_1, K_2 положительные постоянные, ведущие к неравенствам

$$\| \partial a(\varphi)/\partial\varphi + \partial g_1(\varphi, z, \varepsilon)/\partial\varphi \| \leqslant M_1, \quad \| P^1(\psi, z, \varepsilon) \| \leqslant M_2,$$

$$\| \partial a(\varphi)/\partial\varphi + \partial g_1(\varphi, z, \varepsilon)/\partial\varphi - \partial a(\overline{\varphi})/\partial\varphi - \partial g_1(\overline{\varphi}, \overline{z}, \varepsilon)/\partial\varphi \| \leqslant$$
$$\leqslant K_1 [\| \varphi - \overline{\varphi} \| + \| z - \overline{z} \|], \tag{8}$$
$$\| P^1(\varphi, z, \varepsilon) - P^1(\overline{\varphi}, \overline{z}, \varepsilon) \| \leqslant K_2 [\| \varphi - \overline{\varphi} \| + \| z - \overline{z} \|],$$

и пусть выполняются условия $\| \partial g_1(\varphi, z, \varepsilon)/\partial\varphi \| \leqslant L(\varepsilon)$, $\| \partial g_1(\varphi, z, \varepsilon)/\partial z - \partial g_1(\overline{\varphi}, \overline{z}, \varepsilon)/\partial z \| \leqslant L(\varepsilon) [\| \varphi - \overline{\varphi} \| + \| z - \overline{z} \|]$ для произвольных φ, $\overline{\varphi}$, z, $\overline{z}$, $L(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Можно указать положительное $\mu_0 < 1$ такое, чтобы преобразованная система уравнений (6) удовлетворяла условиям: функции $A^1(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon)$, $A^2(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon)$, $P'(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon)$ непрерывны по совокупности переменных θ, h, μ и удовлетворяют по θ, h условию Липшица, при этом

$$\| A'(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) \| \leqslant M_1, \ \| A^2(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) \| \leqslant L(\varepsilon),$$
$$\| P'(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) \| \leqslant M_2, \tag{9}$$
$$\| A^1(\psi, \theta, h, \mu\varepsilon) - A^1(\psi, \overline{\theta}, \overline{h}, \mu, \varepsilon) \| \leqslant \mu K_1 [\| \theta - \overline{\theta} \| + \| h - \overline{h} \|],$$
$$\| A^2(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) - A^2(\psi, \overline{\theta}, \overline{h}, \mu, \varepsilon) \| \leqslant \mu L(\varepsilon) [\| \theta - \overline{\theta} \| + \| h - \overline{h} \|],$$
$$\| P^1(\psi, \theta, h, \mu, \varepsilon) - P^1(\mu, \overline{\theta}, \overline{h}, \mu, \varepsilon) \| \leqslant \mu K_2 [\| \theta - \overline{\theta} \| + \| h - \overline{h} \|]$$

для произвольных θ, $\overline{\theta}$, h, $\overline{h}$, $\mu \leqslant \mu_0$.

Из обозначений (7) видно, что

$$A^1(\psi, \theta, h, 0, \varepsilon) = A_0'(\psi) + A_0''(\psi, \varepsilon) = A_0(\psi, \varepsilon), \ P^1(\psi, \theta, h, 0, \varepsilon) =$$
$$= P(\psi) + P_1(\psi, \varepsilon) = P_0(\psi, \varepsilon), \ A^2(\psi, \theta, h, 0, \varepsilon) = \partial g_1(\psi, 0, \varepsilon)/\partial z, \tag{10}$$

предполагаем, что

$$\| \Omega_s^t(A_0^1(\psi)) \| \leqslant \exp\{\alpha(s - t)\}, \quad \alpha > 0, \ s \geqslant t,$$
$$\| \Omega_0^t(P(\psi)) \| \leqslant K(1/\varepsilon) \exp\{-\gamma t/\varepsilon\}, \quad \gamma > 0, \ t \geqslant 0, \tag{11}$$

где $\Omega_s^t(A_0'(\psi))$, $\Omega_0^t(P(\psi))$ — фундаментальные матрицы решений уравнений $d\theta/dt = A_0^1(\psi)\theta$, $\varepsilon dh/dt = P(\psi)h$.

Покажем, что при сделанных предположениях система уравнений (6) имеет экспоненциально затухающее при $t \to \infty$ решение. Для этого рассмотрим итерационный процесс

$$d\theta^n/dt = A^1(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu, \varepsilon)\theta^n + \mu A^2(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu, \varepsilon) h^n,$$
$$\varepsilon dh^n/dt = P^1(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu, \varepsilon) h^n, \tag{12}$$

считая $\theta^0 = 0$, $h^0 = h_0$. При $n = 1$ для θ^1, h^1 получаем систему уравнений

$$d\theta^1/dt = A_0(\psi, \varepsilon)\theta^1 + \mu A^2(\psi, 0, h_0, \mu, \varepsilon) h^1, \ \varepsilon dh/dt = P_0(\psi, \varepsilon) h^1, \tag{13}$$

за решение которой при $t \geqslant 0$ можно взять

$$\theta^1 = -\mu \int_t^\infty \Omega_s^t(A_0(\psi, \varepsilon)) A^2(\psi, 0, h_0, \mu, \varepsilon) h^1 ds, \ h^1 = \Omega_0^t(P_0(\psi, \varepsilon)) h_0, \tag{14}$$

где h_0 — произвольная постоянная.

Неравенства (11) в силу обозначения (10) и леммы [5] обеспечивают оценки

$$\| \Omega_s^t(A_0(\psi, \varepsilon))\theta_0 \| \leqslant \exp\{(\alpha + L(\varepsilon))(s - t)\} \| \theta_0 \|, \quad s \geqslant t,$$
$$\| \Omega_0^t(P_0(\psi, \varepsilon)) h_0 \| \leqslant K(1/\varepsilon) \exp\{-(\gamma/\varepsilon - L(\varepsilon) K(1/\varepsilon)/\varepsilon) t\} \| h_0 \|, \quad t \geqslant 0. \tag{15}$$

Из (14) согласно неравенствам (15) получаем

$$\| h^1 \| \leqslant K(1/\varepsilon) \exp\{-\gamma t/\varepsilon + L(\varepsilon) K(1/\varepsilon) t/\varepsilon\} \| h_0 \|,$$

$$\| \theta^1 \| \leqslant \mu\varepsilon L(\varepsilon) K(1/\varepsilon)/[\gamma_1 - L(\varepsilon) K_1(1/\varepsilon)] \exp\{-\gamma_1 t/\varepsilon + L(\varepsilon) K_1(1/\varepsilon) t/\varepsilon\} \| h_0 \|, \tag{16}$$

где $K_1(1/\varepsilon) = K(1/\varepsilon) + 1$, $\gamma_1 = \gamma - \varepsilon\alpha$.

Определим θ^n, h^n при $n \geqslant 1$ формулами

$$\theta^n = -\mu \int_t^\infty \Omega_s^t(A_{n-1}) A^2(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu, \varepsilon) h^n ds, \quad h^n = \Omega_0^t(P_{n-1}) h_0, \tag{17}$$

считая A_{n-1}, P_{n-1} матрицами вида $A_{n-1} = A^1(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu, \varepsilon)$, $P_{n-1} = P^1(\psi, \theta^{n-1}, h^{n-1}, \mu, \varepsilon)$. Пусть ε — фиксированное, достаточно малое положительное число. Будем считать μ_0 настолько малым, чтобы выполнялись неравенства

$$\mu_0/[\gamma_1 - L(\varepsilon) K(1/\varepsilon)] < 2L(\varepsilon) K(1/\varepsilon)/\varepsilon < 1, \quad \mu_0 K_1 \leqslant L(\varepsilon)/K_1(1/\varepsilon),$$
$$\mu_0 K_2 \leqslant L(\varepsilon)/K_1(1/\varepsilon). \tag{18}$$

Предположим, что при $n = 1, 2, \ldots, (k-1)$, $k \geqslant 2$, формулы (16) определяют функции θ^n, h^n для $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu_0$, удовлетворяющие неравенствам

$$\| \theta^n \| \leqslant \exp\{-\gamma_1 t/\varepsilon + M_0(\varepsilon) t\} \| h_0 \|,$$
$$\| h^n \| \leqslant K_1(1/\varepsilon) \exp\{-\gamma_1 t/\varepsilon + M_0(\varepsilon) t\} \| h_0 \|, \quad t \geqslant 0, \tag{19}$$

где $M_0(\varepsilon) = 2L(\varepsilon) K_1(1/\varepsilon)/\varepsilon$, $M_0(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Покажем, что и при $n = k$ формулы (16) определяют функции θ^n, h^n, удовлетворяющие неравенствам (19). Действительно, так как для матриц A_{k-1}, P_{k-1} верны соотношения

$$\| A_{k-1} - A_0 \| \leqslant \| A^1(\psi, \theta^{k-1}, h^{k-1}, \mu, \varepsilon) - A_0(\psi, \varepsilon) \| \leqslant \mu K_1 K(1/\varepsilon) \leqslant L(\varepsilon),$$
$$\| P_{k-1} - P_0 \| \leqslant \| P'(\psi, \theta^{k-1}, h^{k-1}, \mu, \varepsilon) - P_0(\psi, \varepsilon) \| \leqslant \mu K_2 K(1/\varepsilon) \leqslant L(\varepsilon). \tag{20}$$

Благодаря этим соотношениям и согласно лемме [5] выполняются неравенства

$$\| \Omega_t^s(P_{k-1}) h_0 \| \leqslant K(1/\varepsilon) \exp\{-\gamma(s-t) + M_0(\varepsilon)(s-t)\} \| h_0 \|,$$
$$\| \Omega_s^t(A_{k-1}) \theta_0 \| \leqslant \exp\{(\alpha + 2L(\varepsilon))(s-t)\} \| \theta_0 \| \tag{21}$$

для любых $0 \leqslant t \leqslant s$ и произвольных h_0, θ_0.

Функция $h^k = \Omega_0^t(P_{k-1}) h_0$ определена для $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu_0$ и удовлетворяет неравенству

$$\| h^k \| \leqslant K(1/\varepsilon) \exp\{-\gamma t/\varepsilon + M_0(\varepsilon) t\} \| h_0 \|, \quad t \geqslant 0. \tag{22}$$

При $t \geqslant 0$ из (17) в силу неравенств (18), (21), (22) имеем

$$\| \theta^k \| \leqslant \exp\{-\gamma_1 t/\varepsilon + M_0(\varepsilon) t\} \| h_0 \|. \tag{23}$$

Следовательно, при $n = k$ функции θ^n, h^n определены для $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu_0$ и удовлетворяют неравенствам (19). Поэтому функции θ^n, h^n определены для всех $n = 1, 2, \ldots$, $t \geqslant 0$, $\mu \leqslant \mu_0$, причем так, что выполняются соотношения (19).

Убедимся в непрерывной зависимости функций $\theta^n(t)$, $h^n(t)$ от параметра $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$ при любых $n \geqslant 0$. Так как функции $a(\varphi)$, $g_1(\varphi, u, \varepsilon)$ принадлежат $C^1_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m(\varepsilon))$, то $\psi(t) = \psi(t, \psi_0)$ как решение уравнения (4) — непрерывная функция переменных t и ψ_0 при $t \geqslant 0$ и $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$. Но тогда функция $\Omega_s^t(A_0) A^2(\psi, 0, h_0, \mu, \varepsilon) h$ будет непрерывной по совокупности переменных t, s, ψ_0 для $s \geqslant t \geqslant 0$, $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$, $\mu \leqslant \mu_0$. Так как верна оценка (16), то равномерно по t, ψ_0 для $t \geqslant 0$ $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$

$$-\mu \lim_{T\to\infty} \int_t^T \Omega_s^t(A_0) A^2(\psi, 0, h_0, \mu, \varepsilon) h^1 ds = \theta^1.$$

Следовательно, $\theta^1(t) = \theta^1(t, \psi_0, h_0, \mu, \varepsilon)$ — непрерывная функция переменных t, ψ_0, h_0 при $t \geqslant 0$, $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$.

Аналогичными рассуждениями можно доказать непрерывность по t, ψ_0 для $t \geqslant 0$, $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$ функций $\theta^n(t)$, $h^n(t)$ при $n \geqslant 1$.

Докажем сходимость последовательности θ^n, h^n равномерно относительно t, ψ_0, h_0, μ. Положим $r_{n+1} = h^{n+1} - h^n = [\Omega_0^t(P_n) - \Omega_0^t(P_{n-1})] h_0$. Тогда $dr_{n+1}/dt = P_n h^{n-1} - P_{n-1} h^n = P_n r_{n+1} - (P_n - P_{n-1}) h^n$ и, так как $r_{n+1}(0) = 0$, $r_{n+1} = \int_0^t \Omega_s^t(P_n)(P_n - P_{n-1}) \Omega_0^s(P_{n-1}) h_0 ds$. Учитывая оценки для $\Omega_s^t(P_n)$, $\Omega_0^s(P_{n-1})$, $P_n - P_{n-1}$, находим, что при $t \geqslant 0$

$$\| r_{n+1} \| \leqslant \mu K_2 K^2 (1/\varepsilon)\, t \exp\{-\gamma t/\varepsilon + M_0(\varepsilon) t\} \times$$
$$\times [\| \theta^n - \theta^{n-1} \|_0 + \| r_n \|_0] \| h_0 \|, \tag{24}$$

где посредством $\|\cdot\|$ обозначено значение $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|\cdot\|$.

Пусть $\psi_n = \Omega_s^t(A_{n-1}) \theta_0$. Рассмотрим разность $\psi_{n+1} - \psi_n = [\Omega_s^t(A_n) - \Omega_s^t(A_{n-1})] \theta_0$. Имеем $d(\psi_{n+1} - \psi_n)/dt = A_n(\psi_{n+1} - \psi_n) + (A_n - A_{n-1}) \psi_n$ и, так как $\psi_{n+1} - \psi_n = 0$ при $s = t$,

$$\psi_{n+1} - \psi_n = \int_s^t \Omega_\tau^t(A_n)(A_n - A_{n-1}) \Omega_s^\tau(A_{n-1}) \theta_0 d\tau.$$

При $0 \leqslant t \leqslant s$ из оценки для $\Omega_\tau^t(A_n)$, $\Omega_s^\tau(A_{n-1})$ и $A_n - A_{n-1}$ следует неравенство $\| \psi_{n+1} - \psi_n \| \leqslant \mu K_1 (s - t) \exp\{(\alpha + 2L(\varepsilon))(s - t)\} [\| \theta^n - \theta^{n-1} \| + \| r_n \|_0] \| \theta_0 \|$. Используя это неравенство для разности $\| \xi_{n+1} \| = \| \theta^{n+1} - \theta^n \|$, в силу (17), (24) при $t \geqslant 0$ получаем оценку

$$\| \xi_{n+1} \| \leqslant \mu C_1 K(1/\varepsilon) L(\varepsilon)(t + 1) \exp\{-(\gamma_1/\varepsilon - M_0(\varepsilon)) t\} [\| \xi_n \|_0 + \| r_n \|_0] \| h_0 \|, \tag{25}$$

где C_1 — положительная постоянная, не зависящая от μ, $C_1 \geqslant K_2$. Это неравенство вместе с неравенством (24) доказывает, что

$$\| \xi_{n+1} \|_0 + \| r_{n+1} \|_0 \leqslant \mu C_1 K(1/\varepsilon) K_1(1/\varepsilon) L [\| \xi_n \|_0 + \| r_n \|_0] \| h_0 \|, \tag{26}$$

где $L = \sup(t + 1) \exp\{-(\gamma_1 + 1) t\}$. Если считать μ_0 настолько малым, чтобы, помимо соотношений (18), выполнялось условие $\mu_0 C_1 L \leqslant 1/2K(1/\varepsilon) \times K_1(1/\varepsilon)$, то из (26) можно получить неравенство $\| \xi_{n+1} \|_0 + \| r_{n+1} \|_0 \leqslant [\| \xi_n \|_0 + \| r_n \|_0]/2$, из которого можно доказать равномерную относительно t, ψ_0, h_0, μ сходимость последовательности θ^n, h^n для $t \geqslant 0$, $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$, $\| h_0 \| \leqslant 1$, $\mu \leqslant \mu_0$.

Положим

$$\theta(t) = \lim_{n\to\infty} \theta^n(t), \quad h(t) = \lim_{n\to\infty} h^n(t). \tag{27}$$

Последовательности $\theta^n(t)$, $h^n(t)$ удовлетворяют системе уравнений (12). Поэтому предельные функции $\theta(t)$, $h(t)$ — решения системы уранений (6). Эти функции, будучи равномерным пределом функций, непрерывных по ψ_0, сами непрерывны по ψ_0 при $\psi_0 \in \mathcal{T}_m(\varepsilon)$. Из неравенств (19) следуют аналогичные неравенства для предельных функций

$$\| \theta(t) \| \leqslant \exp\{-(\gamma_1/\varepsilon - M_0(\varepsilon)) t\} \| h_0 \|, \quad \| h(t) \| \leqslant K(1/\varepsilon) \exp\{-(\gamma_1/\varepsilon - M_0(\varepsilon)) t\} \| h_0 \|, \quad t \geqslant 0. \tag{28}$$

Таким образом, для каждого фиксированного ψ_0 и достаточно малого μ существует решение

$$\varphi_t = \psi(t) + \mu\theta(t), \quad y_t = u(\psi(t), \varepsilon) + [u(\psi(t) + \mu\theta(t), \varepsilon) - - u(\psi(t), \varepsilon)] + \mu^2 h \tag{29}$$

системы уравнений (1), удовлетворяющее неравенству

$$\|\varphi_t - \psi(t)\| \leqslant \mu \exp\{-(\gamma_1/\varepsilon - M_0(\varepsilon))t\}$$

$$\|y_t - u(\psi(t), \varepsilon)\| \leqslant \mu C_0 \exp\{-(\gamma_1/\varepsilon - M_0(\varepsilon))t\}, \quad t \geqslant 0, \tag{30}$$

когда $\|y_0 - u(\varphi_0, \varepsilon)\| \leqslant \mu^2$, где C_0 — положительная постоянная. Из изложенного выше следует утверждение.

Теорема. *Пусть система уравнений* (1) *такова, что выполняются условия*

1. *Функции* $a(\varphi)$, $f_i(\varphi, y, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, $P(\varphi)$ *непрерывны, периодические по* φ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, m$, *с периодом* 2π *и имеют непрерывные частные производные по* φ, y *первого порядка, удовлетворяющие условию Липшица.*

2. *Система уравнений* (1) *имеет в* $C^1_{\mathrm{Lip}}(\mathscr{T}_m(\varepsilon))$ *инвариантный тор* $y = u(\varphi, \varepsilon)$.

3. *Поток траектории* $\psi = \psi(t, \psi_0)$ $(\psi(0, \psi_0) = \psi_0$, ψ_0 — *произвольная постоянная) на* $\mathscr{T}_m(\varepsilon)$, *определяемой системой уравнений* $d\psi/dt = a(\psi) + f_1(\psi, u(\psi, \varepsilon), \varepsilon)$, *таков, что фундаментальные матрицы решений* $\Omega_t^\tau(A_0)$, $\Omega_\tau^t(P_0)$ *систем уравнений*

$$d\theta/dt = [\partial a/\partial\psi + \partial f_1/\partial\psi + \partial f_1/\partial u\, \partial u/\partial\psi]\,\theta = A_0(\psi, \varepsilon)\,\theta,$$

$$\varepsilon dy/dt = [P(\psi) + \sum_{\nu=1}^{m} \partial f_2/\partial u_\nu u_\nu - \varepsilon\partial u/\partial\psi\, \partial f_1/\partial u]\, y = P_0(\psi, \varepsilon)\, y$$

удовлетворяют неравенствам

$$\|\Omega_t^\tau(A_0)\,\theta_0\| \leqslant \exp\{(\alpha + L(\varepsilon))(\tau - t)\}\,\|\theta_0\|,$$

$$\|\Omega_\tau^t(P_0)\, y_0\| \leqslant K(1/\varepsilon) \exp\{-(\gamma/\varepsilon - L(\varepsilon)/\varepsilon)(t - \tau)\}\,\|y_0\|$$

для любых $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, *произвольных* θ_0, y_0, *фиксированном* $K(1/\varepsilon)$, *не зависящим от* τ, θ_0, y_0.

Тогда можно указать $0 < \mu_0$ *такое, что любое решение системы* (1) $\varphi = \psi_t(\varphi_0, y_0)$, $y = y_t(\varphi_0, y_0)$, *начинающееся в* μ^2*-окрестности* $(\mu \leqslant \mu_0)$ *тора* $\mathscr{T}_m(\varepsilon)$, $\|y_0 - u(\varphi_0, \varepsilon)\| \leqslant \mu^2$ *будет экспоненциально притягиваться к некоторой траектории* $\psi = \psi(t, \psi_0(\varphi_0, y_0))$, $y = u(\psi(t, \psi_0(\varphi_0, y_0)), \varepsilon)$ *на торе* $\mathscr{T}_m(\varepsilon)$ *по закону*

$$\|\varphi_t(\varphi_0, y_0) - \psi(t, \psi_0(\varphi_0, y_0))\| \leqslant \mu \exp\{-(\gamma_1/\varepsilon - M_0(\varepsilon))\, t\},$$

$$\|y_t(\varphi_0, y_0) - u(\psi(t, \psi_0(\varphi_0, y_0)), \varepsilon) \leqslant \mu C \exp\{-(\gamma_1/\varepsilon - M_0(\varepsilon))\, t\},$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\mu_0)$ — *достаточно малая положительная постоянная,* $\varepsilon(\mu_0) \to 0$ *при* $\mu_0 \to 0$, C — *положительная постоянная, не зависящая от* μ.

Данный результат можно проиллюстрировать на примере, рассмотренном в работе [6].

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 535 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* В кн.: Тр. Междунар. симпозиума по нелин. колебаниям: В 3-х т.— Киев : Наук. думка, 1963.— Т. 1, с. 93—154.
3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973. —512 с.
4. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер матем., 34, № 6, 1970, с. 1219—1240
5. *Самойленко А. М.* Об экспоненциальной устойчивости инвариантного тора динамической системы.— Дифференц. уравнения, 11, № 5, 1975, с. 820—834.
6. *Баекова С. О.* Про інваріантні многовиди сингулярно збурених систем.— Вісник Київськ. університету. Матем. і мех., 1982, вип. 24, с. 8—13.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
04.03.82