УДК 519.21

Т. А. Бардадым, канд. физ.-мат. наук,
А. В. Иванов, д-р физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИОНАЛОМ МЕТОДА „СКЛАДНОГО НОЖА". II*

This paper is a sequel of [11]. By using the results of the first part, the initial terms of the bias and variance asymptotic expansions for the jackknife estimator of observation error variance in nonlinear regression model are obtained.

Виходячи з результатів, викладених у першій частині [11], знайдено початкові члени асимптотичного розкладу зсуву і дисперсії для оцінки дисперсії помилки спостережень, що одержана методом „складаного ножа" у нелінійній регресійній моделі.

6. Теорема об асимптотическом разложении моментов. Настоящая статья является продолжением работы [11], поэтому нумерация формул и ссылок продолжена, сохранены все обозначения и предположения. К условиям регулярности, приведеным в [11], добавляется следующее:

$$\mathrm{VII}(m). \quad \sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{n^{1/2}\left|\hat\theta_n-\theta\right|>H\right\} \le c_{14}H^{-m}$$

для $\hat\theta = \hat\theta_n, \hat\theta_{(-t)}$, $1\le t\le n$, с одной и той же константой $c_{14}=c_{14}(m)\le\infty$.

Совокупность условий, обеспечивающих выполнение свойства $\mathrm{VII}(m)$ оценки $\hat\theta_n$, содержится в рабо х [5–7].

Теорема 2. *Если для модели* (1) *из* [11] *при* $k=4$ *и* $m\ge 10$ *выполняются условия регулярности* $\mathrm{I}(k+2)$, $\mathrm{II}(k)$, $\mathrm{III}(k+2,m)$, IV, $\mathrm{V}(k,m)$, $\mathrm{VI}(k)$, *а также условие* $\mathrm{VII}(m)$, *то*

$$\sup_{\theta\in Q}\left|E_\theta^n n^{1/2}\left(J_n-\sigma^2\right)\right| = \begin{cases} o(n^{-1/2}), & m=10,11;\\ o(n^{-1}), & m\ge 12,\end{cases}$$

$$\sup_{\theta\in Q}\left|D_\theta^n\left(n^{1/2}\left(J_n-\sigma^2\right)\right)-\left(\mu_4-\sigma^4+2q\sigma^4n^{-1}\right)\right| = o(n^{-1}), \quad m\ge 18.$$

7. Доказательство теоремы 2. Располагая а. р. (4) [11] и используя приемы [5, 12], можно получить а. р. для моментов любого порядка с. в. $n^{1/2}(J_n-$ $-\sigma^2)$. Мы, однако, сосредоточимся на более частной (но и более интересной для приложений) задаче определения начальных членов а. р. первых двух моментов $\Delta(J_n)=E_\theta^n n^{1/2}(J_n-\sigma^2)$ и $S(J_n)=E_\theta^n n(J_n-\sigma^2)^2$. При этом будем исходить из разложения (4) [11] при $k=4$:

$$n^{1/2}(J_n-\sigma^2) = \sum_{\nu=0}^{2} n^{-\nu/2}G_{\nu n}(\theta) + n^{-3/2}\hat R_{3,n}(\theta), \tag{27}$$

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|\hat R_{3,n}(\theta)\right| > c_{15}\log^{5/2}n\right\} = O\left(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2}n\right). \tag{28}$$

Введем событие $\Omega_n(\theta)=\left\{\left|\hat R_{3,n}(\theta)\right|>c_{16}\log^{5/2}n\right\}$. Пусть $\chi(A)$ — индикатор события A, $\overline{\chi}=1-\chi$. Равномерно по $\theta\in Q$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$E_\theta^n n^{1/2}(J_n - \sigma^2)\chi\{\Omega_n(\theta)\} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{2} E_\theta^n n^{-\nu/2} G_{\nu n}(\theta)\chi\{\Omega_n(\theta)\} + O(n^{-3/2}\log^{5/2} n).$$

Оценим $E_\theta^n n^{-\nu/2} G_{\nu n}(\theta)\,\overline{\chi}\{\Omega_n(\theta)\}$, $\nu = 0, 1, 2$. При доказательстве теоремы 1 указывалось, что полиномы $G_{\nu n}(\theta)$ состоят из линейных комбинаций одночленов, содержащих произведения с. в. $_l b^{(\alpha_\gamma)}(\theta)$, $\gamma = 1, \ldots, \nu$, и $_{\rho_B}\mathfrak{B}_n^{(\alpha_1)\ldots(\alpha_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)+\rho_B})}$, имеющих свойства

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n \left\{ \left| {}_1 b_n^{(\alpha_\gamma)}(\theta) \right| > c_{17}\log^{1/2} n \right\} = O(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n),$$

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n \left\{ \left| {}_{\rho_B}\mathfrak{B}_n^{(\alpha_1)\ldots(\alpha_\gamma)}(\theta) \right| > c_{17}\log^{1/2} n \right\} = O(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n)$$

при всех ρ_B и α_γ, встречающихся в $G_{\nu n}$, $\nu = 0, 1, 2$, причем коэффициенты при этих произведениях равномерно ограничены по n и $\theta \in Q$. Примем временное общее обозначение $\mathbb{B}_n^{(\alpha)}$ для $_{\rho_B}\mathfrak{B}_n^{(\alpha_1)\ldots(\alpha_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)+\rho_B})}$ и $_l b^{(\alpha_\gamma)}$, подразумевая под $\mathbb{B}_n^{(\alpha)}$ некую с. в., имеющую свойство

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n \left\{ \left| \mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta) \right| > c_{17}\log^{1/2} n \right\} = O(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n).$$

Здесь (α) — либо (α_γ), либо $(\alpha_1)\ldots\left(\alpha_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)+\rho_B}\right)$. Так как количество одночленов в $G_{\nu n}(\theta)$ не зависит от n, то для оценивания $E_\theta^n n^{-\nu/2} G_{\nu n}(\theta) \times \overline{\chi}\{\Omega_n(\theta)\}$ достаточно рассмотреть аналогичное математическое ожидание для отдельного одночлена полинома $G_{\nu n}(\theta)$. Поскольку

$$\left| \prod_{\delta=1}^{r+1} \mathbb{B}_n^{(\alpha_\delta)}(\theta) \right| \le \left(\sum_{\delta=1}^{r} \left| \mathbb{B}_n^{(\alpha_\delta)}(\theta) \right|^2 \right)^{r/2}, \quad 2 \le r \le \nu + 1,$$

достаточно оценить величины

$$E_\theta^n \left| \mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta) \right|^r \overline{\chi}\{\Omega_n(\theta)\}, \quad |\alpha| = 1, \ldots, \nu; \ \ 2 \le r \le \nu + 1.$$

Рассмотрим подробно способ оценивания этих величин, так как аналогично проводятся и другие оценки, необходимые при доказательстве теоремы 2. Зафиксируем (α) и для некоторых $\tau > 1$ и $\delta > 0$ положим

$$\gamma_{jn} = \tau^j((m - 1 + \delta)\log n)^{1/2}, \quad j = 0, 1, \ldots. \tag{29}$$

Введем систему событий

$$W_{\alpha n}^{(0)} = \left\{ \left| \mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta) \right| \le \gamma_{jn} \right\}, \quad W_{\alpha n}^{(j)} = \left\{ \gamma_{j-1,n} \le \left| \mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta) \right| \le \gamma_{jn} \right\}.$$

Тогда

$$E_\theta^n \left| \mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta) \right|^r \overline{\chi}\{\Omega_n(\theta)\} = \sum_{j=0}^{\infty} E_\theta^n \left| \mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta) \right|^r \overline{\chi}\{\Omega_n(\theta)\}\,\overline{\chi}\left\{ W_{\alpha n}^{(j)}(\theta) \right\},$$

и поскольку

$$E_\theta^n \left|\mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta)\right|^r \bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\} \bar{\chi}\left\{W_{\alpha n}^{(j)}(\theta)\right\} \le$$
$$\le c_{18}(\log n)^{r/2} E_\theta^n \bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\} = c_{19}(\log n)^{r/2} P_\theta^n\left\{\left|\hat{R}_{3,n}(\theta)\right| > c_{20}\log^{5/2} n\right\} =$$
$$= c_{21} n^{-(m-2)/2} \log^{-(m-r)/2} n,$$

$$E_\theta^n \left|\mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta)\right|^r \bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\} \chi\left\{W_{\alpha n}^{(j)}(\theta)\right\} \le c_{22} E_\theta^n \chi\left\{W_{\alpha n}^{(j)}(\theta)\right\} \tau^{jr}(\log n)^{r/2} \le$$
$$\le c_{23}\tau^{jr}(\log n)^{r/2} P_\theta^n\left\{\left|\mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta)\right| \ge \gamma_{j-1,n}\right\} =$$
$$= c_{24} n^{-(m-2)/2}(\log n)^{(r-m)/2}\tau^{j(r-m)},$$

то

$$E_\theta^n \left|\mathbb{B}_n^{(\alpha)}(\theta)\right|^r \bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\} \le c_{25} n^{-(m-2)/2}(\log n)^{(r-m)/2} \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{j(r-m)}. \tag{30}$$

В наихудшем случае $r = \nu + 1 \le 3$, так что для сходимости ряда (30) достаточно, чтобы выполнялось неравенство $m > 3$.

Заметим далее, что с. в. $(\mu^4 - \sigma^4)^{-1/2}(\varepsilon_j^n - \sigma^2)$, $j = 1, \ldots, n$, имеют конечный момент порядка $[m/2] \ge 3$.

Введем события

$$\tilde{W}_{\alpha n}^{(0)} = \left\{ \mu^4 - \sigma^4)^{-1/2} |G_{0n}| \le \gamma_{jn}\right\},$$
$$\tilde{W}_{\alpha n}^{(j)} = \left\{\gamma_{j-1,n} \le (\mu^4 - \sigma^4)^{-1/2} |G_{0n}| \le \gamma_{jn}\right\},$$

где γ_{jn} определены в (29). Тогда

$$E_\theta^n\left(\mu^4 - \sigma^4\right)\left|G_{0n}\right|\bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} E_\theta^n\left(\mu^4 - \sigma^4\right)^{-1/2}\left|G_{0n}\right|\bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\}\chi\left\{\tilde{W}_{\alpha n}^{(j)}(\theta)\right\},$$

$$E_\theta^n\left(\mu^4 - \sigma^4\right)^{-1/2}\left|G_{0n}\right|\bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\}\chi\left\{\tilde{W}_{\alpha n}^{(0)}(\theta)\right\} \le$$
$$\le c_{26}(\log n)^{1/2} P_\theta^n\left\{\left|\hat{R}_{3,n}(\theta)\right| > c_{15}\log^{5/2} n\right\} =$$
$$= c_{27} n^{-(m-2)/2}(\log n)^{(1-m)/2}.$$

Рассматриваемые с. в. удовлетворяют условиям леммы 4 из [11], поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} E_\theta^n\left(\mu^4 - \sigma^4\right)^{-1/2}\left|G_{0n}\right|\bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\}\chi\left\{\tilde{W}_{\alpha n}^{(j)}(\theta)\right\} \le$$
$$\le c_{28} n^{-([m/2]-2)/2}(\log n)^{(2-[m/2])/2}.$$

В итоге

$$E_\theta^n\left|G_{0n}\right|\bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\} \le c_{29} n^{-([m/2]-2)/2}(\log n)^{(2-[m/2])/2} +$$
$$+ c_{30} n^{-(m-2)/2}(\log n)^{(1-m)/2}. \tag{31}$$

Оценим теперь $E_\theta^n n^{1/2}(J_n - \sigma^2)\bar{\chi}\left\{\Omega_n(\theta)\right\}$. Для исходного функционала выполняется неравенство

$$n^{1/2}|J_n - \sigma^2| = n^{1/2} \left| \sum_{j=1}^{n} \left[X_j - g\left(j, \hat{\theta}_n\right) \right]^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{n-1}{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq t} \left[X_j - g\left(j, \hat{\theta}_{(-t)}\right) \right]^2 - \sigma^2 \right| \le$$

$$\le (3n-1) |G_{0n}| + c_{31} n^{3/2} \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 +$$

$$+ n^{3/2} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} c_t \left| \theta - \hat{\theta}_{(-t)} \right|^2 + (2n-1) n^{1/2} \sigma^2. \tag{32}$$

Воспользуемся указанным выше приемом для оценнвания каждого из членов, входящих в правую часть (32). Например, при оценке второго члена

$$E_\theta^n n^{3/2} \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 \overline{\chi}\left\{ \Omega_n(\theta) \right\} =$$

$$= n^{3/2} \sum_{j=1}^{\infty} E_\theta^n \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 \overline{\chi}\left\{ \Omega_n(\theta) \right\} \chi\left\{ \hat{W}_{jn}(\theta) \right\}, \tag{33}$$

где

$$\hat{W}_{0n} = \left\{ \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 \le \gamma_{jn} \right\}, \quad \hat{W}_{jn} = \left\{ \gamma_{j-1,n} \le \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 \le \gamma_{jn} \right\},$$

$$\gamma_{jn} = \tau^j n^{-1/m} (\log n)^{1/2}, \quad j = 0, 1, \ldots, \tag{34}$$

$$n^{3/2} E_\theta^n \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 \overline{\chi}\left\{ \Omega_n(\theta) \right\} \chi\left\{ \hat{W}_{0n}(\theta) \right\} \le$$

$$\le c_{32} n^{-(m-5)/2 - 2/m} (\log n)^{(2-m)/2}.$$

Используя свойство $\mathrm{VII}(m)$, получаем

$$n^{3/2} E_\theta^n \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 \overline{\chi}\left\{ \Omega_n(\theta) \right\} \chi\left\{ \hat{W}_{jn}(\theta) \right\} \le$$

$$\le c_{33} \tau^{-m(j-1) + 2j} n^{-(m-5)/2 - 2/m} (\log n)^{-(m-2)/2}. \tag{35}$$

После подстановки (34), (35) в (33) находим

$$E_\theta^n n^{3/2} \left| \theta - \hat{\theta}_n \right|^2 \overline{\chi}\left\{ \Omega_n(\theta) \right\} \le$$

$$\le n^{-(m-5)/2 - 2/m} (\log n)^{-(m-2)/2} \left(c_{34} + c_{35} \sum_{j=1}^{\infty} \tau^{-m(j-1)+2j} \right).$$

Проведя такие оценки для всех членов, входящих в (32), убеждаемся в том, что

$$\Delta(J_n) = E_\theta^n n^{1/2} (J_n - \sigma^2) =$$

$$= E_\theta^n G_{1n}(\theta) n^{-1/2} + E_\theta^n G_{2n}(\theta) n^{-1} + r_n(\theta),$$

где

$$r_n(\theta) = \begin{cases} O\left(n^{-1/2} \log^{-2} n\right), & m = 10, 11; \\ O\left(n^{-1} \log^{-5/2} n\right), & m = 12, 13; \\ O\left(n^{-3/2} \log^{-5/2} n\right), & m \ge 14. \end{cases} \tag{36}$$

Ограничение на m оказывается наиболее жестким при оценивании величины $E_\theta^n(3n-1)\left|G_{0n}\right|\overline{\chi}\{\Omega_n(\theta)\}$, и именно оно содержится в итоговом выражении (36).

Найдем первые члены а. р. моментов J_n. Так как

$$E_\theta^n G_{1n}(\theta) = E_\theta^n\left(-\Lambda_n^{il}\,{}_1b^i\,{}_1b^j + \sigma^2 q\right) = -\sigma^2 q + \sigma^2 q = 0,$$

$$E_\theta^n G_{2n}(\theta) = E_\theta^n\Bigg(\Lambda_n^{i_1j_1}\Lambda_n^{i_2j_2}\Lambda_n^{i_3j_3}\Pi_{(i_1i_2)(i_3)}\,{}_1b^{j_1}\,{}_1b^{j_2}\,{}_1b^{j_3} -$$

$$-\Lambda_n^{i_1j_1}\Lambda_n^{i_2j_2}\,{}_1b^{i_1i_2}\,{}_1b^{j_2}\,{}_1b^{j_3} + n^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}\Lambda_n^{i_1j_1}\left(\varepsilon_t^2-\sigma^2\right)g^{i_1}g^{j_1} +$$

$$+\sigma^2\left(-\Lambda_n^{i_1i_2}\Lambda_n^{i_3j_3}\Pi_{(i_1i_2)(i_3)}\,{}_1b^{j_3} + \Lambda_n^{i_1j_1}\,{}_1b^{i_1i_2}\right)\Bigg) = O(n^{-3/2}),$$

то

$$\Delta(J_n) = O(n^{-5/2}) + r_n(\theta),$$

где $r_n(\theta)$ удовлетворяют (33), что и означает справедливость первого утверждения теоремы 2.

Для доказательства второго утверждения теоремы 2 возведем соотношение (27) в квадрат:

$$n(J_n-\sigma^2)^2 = G_{0n}^2(\theta) + 2G_{0n}(\theta)G_{1n}(\theta)n^{-1/2} +$$
$$+\left(2G_{0n}(\theta)G_{2n}(\theta) + G_{1n}^2(\theta)\right)n^{-1} + \zeta_{3n}(\theta)n^{-3/2},$$

где

$$\zeta_{3n}(\theta) = 2G_{0n}(\theta)\hat{R}_{3,n}(\theta) + 2G_{1n}(\theta)G_{2n}(\theta) + \left(G_{2n}^2(\theta) +\right.$$
$$\left.+\,2G_{2n}(\theta)\hat{R}_{3,n}(\theta)\right)n^{-1/2} + 2G_{2n}(\theta)\hat{R}_{3,n}(\theta)n^{-1} + n^{-3/2}\hat{R}_{3,n}^2(\theta). \quad (37)$$

Если в (37) учесть степень малости первых членов разложения (27) и с. в. $\hat{R}_{3,n}(\theta)$ (см. (28)), с некоторой константой $c_{36}(Q)>0$ получаем

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|\zeta_{3n}(\theta)\right| > c_{36}\log^5 n\right\} = O\left(n^{-([m/2]-2)/2}\log^{-[m/2]/2} n\right).$$

Это следует из рассуждений, аналогичных использованным при доказательстве (30) и (31). Тогда

$$S(J_n) = E_\theta^n n(J_n-\sigma^2)^2 = E_\theta^n\Big[G_{0n}^2(\theta) + 2G_{0n}(\theta)G_{1n}(\theta)n^{-1/2} +$$
$$+\left(2G_{0n}(\theta)G_{2n}(\theta) + G_{1n}^2(\theta)\right)n^{-1}\Big] + \begin{cases} o(n^{-1/2}), & m=16,17; \\ o(n^{-1}), & m\ge 18. \end{cases} \quad (38)$$

Остается подсчитать математические ожидания в правой части (38):

$$E_\theta^n G_{0n}^2(\theta) = E_\theta^n P_{0n}^2(\theta) = \mu_4 - \sigma^4,$$

$$E_\theta^n G_{0n}(\theta)G_{1n}(\theta) = -q(\mu_4-\sigma^4)n^{-1/2}, \quad E_\theta^n G_{1n}^2(\theta) = 2q\sigma^4,$$

$$E_\theta^n G_{0n}(\theta)G_{2n}(\theta) = q(\mu_4-\sigma^4) + O(n^{-1}).$$

В результате имеем

$$S(J_n) = (\mu_4 - \sigma^4) + 2q\sigma^4 n^{-1} + o(n^{-1}),$$

$$D_\theta^n(n^{1/2}(J_n - \sigma^2)) = E_\theta^n n\left(J_n - \sigma^2\right)^2 - \left(E_\theta^n n^{1/2}\left(J_n - \sigma^2\right)\right)^2.$$

С учетом (34) получаем соотношение второй части теоремы 2:

$$S(J_n) = D(J_n) = D_\theta^n\left(n^{1/2}\left(J_n - \sigma^2\right)\right) =$$

$$= (\mu_4 - \sigma^4 + 2q\sigma^4 n^{-1}) + o(n^{-1}), \tag{39}$$

причем все оценки равномерны по $\theta \in Q$ и n и справедливы для $m \geq 18$.

8. Некоторые следствия. Обсудим полученный результат. Пусть γ_1 и γ_2 — коэффициенты асимметрии и эксцесса с. в. ε_j,

$$Z(\theta) = \Lambda_n^{i_1 i_2}\left(\Lambda_n^{l_1 l_2}\Pi_{(i_1 i_2)(l_1)}\Pi_{(l_2)} - \Pi_{(i_1 i_2)}\right).$$

В работе [5] показано, что для стандартной оценки $\hat{\sigma}_n^2$ равномерно по $\theta \in Q$ справедливы соотношения

$$\Delta\left(\hat{\sigma}_n^2\right) = E_\theta^n n^{1/2}\left(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2\right) = -q\sigma^2 n^{-1/2} + o(n^{-1}), \tag{40}$$

$$S\left(\hat{\sigma}_n^2\right) = E_\theta^n n\left(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2\right)^2 =$$

$$= \sigma^4\left((\gamma_2 + 2) + n^{-1}[q^2 - 2q(\gamma_2 + 1) + 2\gamma_1\sigma Z(\theta)]\right) + o(n^{-1}),$$

$$D\left(\hat{\sigma}_n^2\right) = D_\theta^n n^{1/2}\left(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma^2\right) =$$

$$= \sigma^4\left((\gamma_2 + 2) + n^{-1}[-2q(\gamma_2 + 1) + 2\gamma_1\sigma Z(\theta)]\right) + o(n^{-1}).$$

Из (40) вытекает, что статистическая процедура метода „складного ножа" уменьшает абсолютную величину смещения оценки дисперсии σ^2.

Рассмотрим разность

$$S\left(\hat{\sigma}_n^2\right) - S(J_n) = \sigma^4\left(q^2 - 2q(\gamma_2 + 2) + 2\gamma_1\sigma Z(\theta)\right)n^{-1} + o(n^{-1}).$$

Пусть $\gamma_1 = 0$. Тогда для $q > 2(\gamma_2 + 2)$ правая часть становится положительной для достаточно больших n. Для гауссовой $(0, \sigma^2)$ с. в. ε_j $(\gamma_2 = 0)$ для значений размерности $q = 1, 2, 3$ $S\left(\hat{\sigma}_n^2\right) < S(J_n)$.

Заметим, далее, что

$$D\left(\hat{\sigma}_n^2\right) - D(J_n) = 2\sigma^4\left(-2q(\gamma_2 + 1) + \gamma_1\sigma Z(\theta)\right)n^{-1} + o(n^{-1}), \tag{41}$$

и знак разности дисперсий зависит от знака выражения в правой части (41). В частности, при $\gamma_1 = 0$ всегда $D\left(\hat{\sigma}_n^2\right) < D(J_n)$.

11. *Бардадым Т. А., Иванов А. В.* Асимптотические разложения, связанные с функционалом метода „складного ножа". I // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 443–452.
12. *Иванов А. В.* Асимптотическое разложение моментов оценки наименьших квадратов векторного параметра нелинейной регрессии // Там же. – 1982. – **34**, № 2. – С. 164–170.

Получено 23.07.93