УДК 517.946

А. М. Кузь, Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ РІВНЯНЬ, ГІПЕРБОЛІЧНИХ ЗА ГОРДІНГОМ

In a domain that is the Cartesian product of an interval $[0,T]$ and the space $\mathbb{R}^p$, we investigate a problem for Gårding hyperbolic equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable in a class of functions almost periodic in the space variables. A criterion for the uniqueness and sufficient conditions for the existence of a solution of the problem in different functional spaces are established. To solve the problem of small denominators that arises in the solution of the problem, the metric approach is used.

В области, являющейся декартовым произведением отрезка $[0,T]$ и пространства $\mathbb{R}^p$, исследована задача с интегральными условиями по временной координате для гиперболических по Гордингу уравнений с постоянными коэффициентами в классе почти периодических по пространственным переменным функций. Найдены критерий единственности и достаточные условия существования в различных функциональных пространствах решения задачи. Для решения проблемы малых знаменателей, которые возникли при построении решения задачи, использован метрический подход.

1. Вступ. Математичне моделювання багатьох фізичних та біологічних процесів призводить до задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними. Такі умови використовують, зокрема, у випадках, коли межа області є недоступною для проведення вимірювань або коли неможливо безпосередньо знайти певні фізичні величини, однак відомі їхні середні значення.

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними вивчались у різних аспектах у багатьох працях (див., наприклад, [1 – 12]). Такі задачі є умовно коректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників [8]. У статті [10] у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними, досліджено задачу з умовами у вигляді послідовних моментів за часом від шуканої функції для гіперболічного за Петровським рівняння зі сталими дійсними коефіцієнтами, однорідного за порядком диференціювання. Встановлено метричні оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

У праці [5] у класі періодичних за просторовими змінними функцій досліджено задачу з інтегральними умовами у вигляді послідовних моментів від шуканої функції для безтипного рівняння високого порядку з молодшими членами зі сталими коефіцієнтами. Встановлено класичну коректність задачі для майже всіх (щодо міри Гаусдорфа на прямій) значень верхньої межі інтегрування. В роботі [2] досліджено коректність задачі у просторах Соболєва скінченного порядку періодичних по x функцій з умовами

$$\int_0^T \begin{pmatrix} b_{11}(\tau) & b_{12}(\tau) \\ b_{21}(\tau) & b_{22}(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(\tau,\cdot) \\ \partial u(\tau,\cdot)/\partial t \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

для гіперболічного рівняння $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(t)\Delta u = 0$ в області $\big\{(t,x)\colon t \in (0,T),\ x \in \Omega_p\big\}$, де $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор.

У даній праці, що є розвитком [6], досліджено однозначну розв'язність задачі із загальнішими умовами за часовою координатою (частинним випадком яких є умови типу Діріхле або інтегральні умови у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції) у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій для гіперболічного за Гордінгом рівняння високого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами.

2. Основні позначення. $\mathbb{Z}_+^p$ — множина точок з $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$, з цілими невід'ємними координатами;

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \qquad dx = dx_1 \ldots dx_p;$$

$$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p, \qquad \|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2}, \qquad |k| = |k_1| + \ldots + |k_p|;$$

$$s = (s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p, \qquad |s| = s_1 + \ldots + s_p;$$

$$\hat{s} = (s_0, s_1, \ldots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^{p+1}, \qquad |\hat{s}| = s_0 + s_1 + \ldots + s_p;$$

$$\mu_k = (\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p, \qquad \|\mu_k\| = \sqrt{\mu_{k_1}^2 + \ldots + \mu_{k_p}^2}, \qquad |\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \ldots + |\mu_{k_p}|;$$

$$(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \ldots + \mu_{k_p} x_p; \qquad D^p = (0, T) \times \mathbb{R}^p, \quad \Pi_H^p = [0, H]^p;$$

C_n^m — кількість усіх комбінацій з n елементів по m; $[a]$ і $\{a\}$ — ціла і дробова частини числа $a \in \mathbb{R}$; S_q — симетрична група всіх перестановок перших q натуральних чисел; ρ_ω — число інверсій у перестановці $\omega = (i_1, \ldots, i_q) \in S_q$; $\mathcal{J}_{2n}$ — множина всіх векторів $J = (j_1, \ldots, j_{2n})$, $j_q \in \{0, 1\}$, $q \in \{1, \ldots, 2n\}$; C_j, $j = 1, 2, \ldots,$ — додатні сталі, які не залежать від k та μ_k.

3. Функціональні простори. $C_B^h(\overline{D}^p)$ — простір функцій $u(t,x)$, які є h разів неперервно диференційовними в $\overline{D}^p$ за всіма змінними і майже періодичними [13, 14] по x рівномірно по $t \in [0,T]$ із нормою $\left\|u; C_B^h(\overline{D}^p)\right\| = \sum_{0 \leqslant |\hat{s}| \leqslant h} \max\limits_{t \in [0,T]} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^p} \left| \dfrac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|$; $C_B^h(\mathbb{R}^p)$ — простір функцій із $C_B^h(\overline{D}^p)$, які не залежать від t; $\mathcal{T}_B$ — простір скінченних тригонометричних поліномів $v(x) = \sum_{|k| \leqslant N} v_k \exp(i\mu_k, x)$ з комплексними коефіцієнтами, у якому збіжність визначається таким чином: $v_q \xrightarrow[q \to \infty]{\mathcal{T}_B} v$, якщо, починаючи з деякого номера, степені всіх поліномів v_q, $q \in \mathbb{N}$, не перевищують деякого фіксованого числа N і $v_{qk} \xrightarrow[q \to \infty]{} v_k$ при кожному $k \in \mathbb{Z}^p$; $W_B^{\alpha,\beta}$, α, $\beta \in \mathbb{R}$, — простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{T}_B$ за нормою [15] $\left\|v; W_B^{\alpha,\beta}\right\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |v_k|^2 \big(1 + |\mu_k|\big)^{2\alpha} \exp\big(2\beta|\mu_k|\big)\right)^{1/2}$; $C^h\big([0,T], W_B^{\alpha,\beta}\big)$ — простір функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $d^j u(t,\cdot)/dt^j$, $j \in \{0, 1, \ldots, h\}$, належать простору $W_B^{\alpha,\beta}$ і є неперервними по $t \in [0,T]$ у нормі цього простору, $\left\|u; C^h\big([0,T], W_B^{\alpha,\beta}\big)\right\| = \sum_{j=0}^n \max\limits_{t \in [0,T]} \left\|d^j u(t,\cdot)/dt^j; W_B^{\alpha,\beta}\right\|$; $\mathcal{T}'_B$ — простір усіх антилінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{T}_B$. Послідовність $f_q \in \mathcal{T}'_B$ збігається до $f \in \mathcal{T}'_B$, якщо $\langle f_q, v\rangle \xrightarrow[q \to \infty]{} \langle f, v\rangle$ для довільного $v \in \mathcal{T}_B$ $\big(\langle f, v\rangle$ позначає дію функціонала $f \in \mathcal{T}'_B$ на елемент $v \in \mathcal{T}_B$ $\big)$. Елементи простору $\mathcal{T}'_B$ будемо називати узагальненими майже періодичними функціями. Простір $\mathcal{T}_B$ неперервно вкладається у $\mathcal{T}'_B$ таким чином: якщо $w \in \mathcal{T}_B$, то елемент $f_w \in \mathcal{T}'_B$, який відповідає елементові w, визначається так:

$$\langle f_w, v\rangle = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi_H^p} w(x)\overline{v(x)}dx \qquad \forall v \in \mathcal{T}_B.$$

Для довільної функції $f \in \mathcal{T}_B'$ нерівність $\langle f, \exp(i\mu, x)\rangle \neq 0$ справджується не більше ніж для зліченної кількості векторів $\mu \in \mathbb{R}^p$. Сукупність векторів $\{\mu_k, k \in \mathbb{Z}^p\}$, для яких $\langle f, \exp(i\mu_k, x)\rangle \neq 0$, називається спектром узагальненої майже періодичної функції f, а ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} f_k \exp(i\mu_k, x)$, де $f_k = \langle f, \exp(i\mu_k, x)\rangle$, — рядом Фур'є цієї функції. $C^h\big([0,T], \mathcal{T}_B\big)$ $\Big(C^h([0,T], \mathcal{T}_B')\Big)$ — простір функцій $u(t,x)$, які є h разів неперервно диференційовними в $\overline{D}^p$ за змінною t і для довільного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $d^j u(t,\cdot)/dt^j$, $j \in \{0,1,\ldots,h\}$, належать простору $\mathcal{T}_B$ $(\mathcal{T}_B')$.

Теорема 1. *Для довільної узагальненої майже періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі $\mathcal{T}_B'$. Навпаки, послідовність частинних сум будь-якого тригонометричного ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} a_k \exp(i\mu_k, x)$, $a_k \in \mathbb{C}$, збігається у $\mathcal{T}_B'$ до деякого елемента $f \in \mathcal{T}_B'$ і цей ряд збігається з рядом Фур'є для f.*

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 6.2 у [16] (§6).

***Наслідок* 1.** *Простір $\mathcal{T}_B$ є щільним у $\mathcal{T}_B'$.*

4. Постановка задачі. В області D^p розглядаємо задачу

$$L[u] := \sum_{|\hat{s}|\leqslant 2n} A_{\hat{s}} \frac{\partial^{|\hat{s}|} u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}} = 0, \quad n \geqslant 1, \tag{1}$$

$$U_j[u] := \alpha_j \left.\frac{\partial^{2(j-1)}u}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=0} + \beta_j \int\limits_0^T t^{r_j} u(t,x)dt = \varphi_j(x),$$

$$j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{2}$$

$$U_{n+j}[u] := \alpha_{n+j} \left.\frac{\partial^{2(j-1)}u}{\partial t^{2(j-1)}}\right|_{t=T} + \beta_{n+j} \int\limits_0^T t^{r_{n+j}} u(t,x)dt = \varphi_{n+j}(x),$$

де $A_{\hat{s}} \in \mathbb{C}$, $A_{(2n,0,\ldots,0)} = 1$; α_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \neq 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,\ldots,2n\}$, $r_q > r_s$, $q > s$, $r = r_1 + \ldots + r_{2n}$. Вважаємо, що оператор L є гіперболічним за Гордінгом [17, с. 148], тобто для всіх $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_p) \in \mathbb{R}^p$

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\xi) \leqslant C_0, \quad j \in \{1,\ldots,2n\}, \tag{3}$$

де $\lambda_j(\xi)$ — корені рівняння

$$\sum_{|\hat{s}|\leqslant 2n} A_{\hat{s}} (i\xi_1)^{s_1}\ldots(i\xi_p)^{s_p}\lambda^{s_0} = 0, \tag{4}$$

$C_0 \in \mathbb{R}$ — деяка стала, а функції $\varphi_j(x), j \in \{1,\ldots,2n\}$, є майже періодичними із заданим спектром $M_p := \{\mu_k, k \in \mathbb{Z}^p\}$, $\mu_{-k} = -\mu_k$,

$$d_2|k|^\sigma \leqslant |\mu_k| \leqslant d_1|k|^\sigma, \quad d_1, d_2, \sigma > 0. \tag{5}$$

Кожна з функцій $\varphi_j(x)$ розвивається в ряд Фур'є

$$\varphi_j(x)=\sum_{\mu_k\in M_p}\varphi_{jk}\exp(i\mu_k,\,x), \tag{6}$$

$$\varphi_{jk}=\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H^p}\int\limits_{\Pi_H^p}\varphi_j(x)\exp(-i\mu_k,\,x)dx,\quad \mu_k\in M_p.$$

Далі нам знадобляться наступні твердження.

Лема 1. *Якщо функція v належить $C_B^h(\mathbb{R}^p)$ і має спектр M_p, то для її коефіцієнтів Фур'є справджуються оцінки*

$$|v_k|\leqslant(2p)^h(h+1)\frac{\left\|v;C_B^h(\mathbb{R}^p)\right\|}{\big(1+|\mu_k|\big)^h},\quad \mu_k\in M_p. \tag{7}$$

Доведення проводиться за схемою доведення леми 1 у [6].

Лема 2. *Для довільних $x_q,\,y_q\in\mathbb{C}$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, справджується рівність*

$$\prod_{q=1}^{n}(x_q+y_q)=\sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}\prod_{q=1}^{n}x_q^{j_q}\prod_{s=1}^{n}y_s^{1-j_s}.$$

Доведення проводиться методом математичної індукції.

5. Єдиність розв'язку задачі. Майже періодичний по x зі спектром M_p розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{\mu_k\in M_p}u_k(t)\exp(i\mu_k,\,x). \tag{8}$$

Підставляючи ряди (6), (8) у рівняння (1) та умови (2), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $u_k(t)$, відповідно, таку задачу:

$$l[u_k]:=\sum_{|\hat{s}|\leqslant 2n}A_{\hat{s}}(i\mu_{k_1})^{s_1}\ldots(i\mu_{k_p})^{s_p}u_k^{(s_0)}(t)=0, \tag{9}$$

$$\begin{gathered}U_j[u_k]:=\alpha_j\frac{d^{2(j-1)}u_k(0)}{dt^{2(j-1)}}+\beta_j\int\limits_0^T t^{r_j}u_k(t)dt=\varphi_{jk},\\ \hfill j\in\{1,\ldots,n\}.\\ U_{n+j}[u_k]:=\alpha_{n+j}\frac{d^{2(j-1)}u_k(T)}{dt^{2(j-1)}}+\beta_{n+j}\int\limits_0^T t^{r_{n+j}}u_k(t)dt=\varphi_{n+j,k},\end{gathered} \tag{10}$$

Нехай $\lambda_{lk}:=\lambda_l(\mu_k)$, $l\in\{1,\ldots,m\}$, — різні корені рівняння (4) при $\xi=\mu_k$, $\mu_k\in M_p$, із кратностями n_l відповідно, $n_1+\ldots+n_m=2n$. Для спрощення викладок вважаємо, що числа m і n_l не залежать від μ_k і $\lambda_l(\mu_k)\neq 0$, $\mu_k\in M_p$, $l\in\{1,\ldots,m\}$.

Для коренів λ_{lk} справджуються такі оцінки [18]:

$$|\lambda_{lk}|\leqslant C_1\big(1+|\mu_k|\big),\qquad C_1=(2n)^p\max_{|\hat{s}|\leqslant 2n}\{A_{\hat{s}}\},\qquad l\in\{1,\ldots,m\},\quad \mu_k\in M_p. \tag{11}$$

Із (11) випливає, що стала $C_2 := -\min\Big\{0, \inf_{\mu_k\in M_p}\min_{l\in\{1,\dots,m\}}\big\{\operatorname{Re}\lambda_{lk}/\big(1+|\mu_k|\big)\big\}\Big\}$ існує і є скінченною, причому

$$\operatorname{Re}\lambda_{lk} \geqslant -C_2\big(1+|\mu_k|\big), \qquad l\in\{1,\dots,m\}, \quad \mu_k\in M_p. \tag{12}$$

Нехай $f_{qk} := f_q(\mu_k,t)$, $q\in\{1,\dots,2n\}$, $\mu_k\in M_p$, — нормальна фундаментальна система розв'язків рівняння (9). Для кожного $\mu_k\in M_p$ характеристичний визначник задачі (9), (10) є таким:

$$\Delta(\mu_k,T) := \det\|U_j[f_{qk}]\|_{q,j=1}^{2n} =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 f_1(\mu_k,0)+\beta_1 I_{11} & \dots & \alpha_1 f_{2n}(\mu_k,0)+\beta_1 I_{2n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n f_1^{(2(n-1))}(\mu_k,0)+\beta_n I_{1n} & \dots & \alpha_n f_{2n}^{(2(n-1))}(\mu_k,0)+\beta_n I_{2n,n} \\ \alpha_{n+1} f_1(\mu_k,T)+\beta_{n+1} I_{1,n+1} & \dots & \alpha_{n+1} f_{2n}(\mu_k,T)+\beta_{n+1} I_{2n,n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{2n} f_1^{(2(n-1))}(\mu_k,T)+\beta_{2n} I_{1,2n} & \dots & \alpha_{2n} f_{2n}^{(2(n-1))}(\mu_k,T)+\beta_{2n} I_{2n,2n} \end{vmatrix}, \tag{13}$$

де

$$I_{qj} := I_{qj}(\mu_k,T) = \int\limits_0^T t^{r_j} f_q(\mu_k,t)dt, \quad q,\ j\in\{1,\dots,2n\}. \tag{14}$$

Задача (9), (10) не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(\mu_k,T)\neq 0$ [20].

Теорема 2. *Для того щоб задача* (1), (2) *мала не більше одного майже періодичного по* x *із спектром* M_p *розв'язку у просторі* $C^{2n}\big([0,T],\mathcal{T}_B\big)\big(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_B)\big)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\Delta(\mu_k,T)\neq 0 \quad \forall\mu_k\in M_p. \tag{15}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 у [6].

6. Існування розв'язку задачі. Далі вважатимемо, що виконується умова (15). Тоді для кожного $\mu_k\in M_p$ існує єдиний розв'язок задачі (9), (10), який зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{q,j=1}^{2n}\frac{\Delta_{jq}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)}\varphi_{jk} f_q(\mu_k,t), \tag{16}$$

де $\Delta_{jq}(\mu_k,T)$ — алгебраїчне доповнення у визначнику $\Delta(\mu_k,T)$ елемента j-го рядка та q-го стовпця. На підставі формул (8) і (16) формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{\mu_k\in M_p}\left(\sum_{q,j=1}^{2n}\frac{\Delta_{jq}(\mu_k,T)}{\Delta(\mu_k,T)}\varphi_{jk} f_q(\mu_k,t)\right)\exp(i\mu_k,x). \tag{17}$$

Із (17) та теорем 1, 2 випливає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай справджується умова* (15). *Якщо функції* $\varphi_j(x)$ *належать* $\mathcal{T}_B\,(\mathcal{T}'_B)$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^{2n}\big([0,T],\mathcal{T}_B\big)\big(C^{2n}([0,T],\mathcal{T}'_B)\big)$, *який зображується формулою* (17).

В інших випадках питання існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки вираз $|\Delta(\mu_k,T)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k\in M_p$.

Позначимо

$$C_3=4^nC_1\max\big\{1,\exp(C_0T)\big\},\qquad C_4=\max_{1\leqslant j\leqslant 2n}\Big\{\max\big\{\,C_3|\alpha_j|,\,|\beta_j|C_3T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}\big\}\Big\}.$$

Лема 3. *Для алгебраїчних доповнень елементів визначника* $\Delta(\mu_k,T)$ *справджуються оцінки*

$$\big|\Delta_{jl}(\mu_k,T)\big|\leqslant C_5\big(1+|\mu_k|\big)^{4n^2-n+l},\qquad j,\ l\in\{1,\ldots,2n\},\quad \mu_k\in M_p, \tag{18}$$

де $C_5=(2n-1)!\,(C_4)^{2n-1}$.

Доведення. Для кожної з функцій $f_q(\mu_k,t)$, враховуючи (3), (11) та лему 12.7.7 у [19], отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}}f_q(\mu_k,t)\right|\leqslant C_3\big(1+|\mu_k|\big)^{2n+j-q}, \tag{19}$$

$$j\in\{1,\ldots,2n+1\},\quad q\in\{1,\ldots,2n\},\quad \mu_k\in M_p.$$

Для елементів

$$U_j[f_{qk}]=\begin{cases}\alpha_jf_q^{(2(j-1))}(\mu_k,0)+\beta_jI_{qj}, & j\in\{1,\ldots,n\},\\[2mm] \alpha_jf_q^{(2(j-n-1))}(\mu_k,T)+\beta_jI_{qj}, & j\in\{n+1,\ldots,2n\},\end{cases}\qquad q\in\{1,\ldots,2n\},$$

визначника $\Delta(\mu_k,T)$ на підставі (14) та (19) отримуємо

$$|U_j[f_{qk}]|\leqslant|\alpha_j||f_q^{(2(j-1))}(\mu_k,0)|+|\beta_j||I_{qj}|\leqslant$$

$$\leqslant|\alpha_j|+|\beta_j|C_3T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}(1+|\mu_k|)^{2n+1-q}\leqslant$$

$$\leqslant C_4(1+|\mu_k|)^{2n+1-q},\qquad j\in\{1,\ldots,n\},\quad q\in\{1,\ldots,2n\}, \tag{20}$$

$$|U_j[f_{qk}]|\leqslant|\alpha_j||f_q^{(2(j-n-1))}(\mu_k,T)|+|\beta_j||I_{qj}|\leqslant$$

$$\leqslant C_3(1+|\mu_k|)^{2n+1-q}\left(|\alpha_j|(1+|\mu_k|)^{2(j-n-1)}+|\beta_j|T^{r_j+1}(r_j+1)^{-1}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C_4(1+|\mu_k|)^{4n-1-q},\qquad j\in\{n+1,\ldots,2n\},\quad q\in\{1,\ldots,2n\}. \tag{21}$$

Для алгебраїчних доповнень визначника $\Delta(\mu_k,T)$ справджуються формули [21]

$$\Delta_{jl}(\mu_k,T)=\sum_{\omega\in S_{2n-1}}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{\substack{q=1\\ q\neq l,i_q\neq j}}^{2n}U_{i_q}[f_{qk}],\quad j,\ l\in\{1,\ldots,2n\}. \tag{22}$$

На підставі формул (20) – (22) отримуємо

$$\bigl|\Delta_{jl}(\mu_k,T)\bigr|\leqslant\sum_{\omega\in S_{2n-1}}\prod_{\substack{q=1\\ q\neq l,i_q\neq j}}^{2n}\bigl|U_{i_q}[f_{qk}]\bigr|\leqslant(2n-1)!\prod_{\substack{q=1\\ q\neq l}}^{2n}\bigl|U_q[f_{qk}]\bigr|\leqslant$$

$$\leqslant(2n-1)!(C_4)^{2n-1}\bigl(1+|\mu_k|\bigr)^{4n^2-n+l}=C_5\bigl(1+|\mu_k|\bigr)^{4n^2-n+l},\quad j,\ l\in\{1,\ldots,2n\}.$$

З отриманих нерівностей випливає доведення леми.

Теорема 4. *Нехай справджується умова* (15) *та існують сталі* $\eta>0$ *і* $\theta\geqslant 0$ *такі, що для всіх* (*крім, можливо, скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k\in M_p$ *виконується нерівність*

$$\bigl|\Delta(\mu_k,T)\bigr|>\bigl(1+|\mu_k|\bigr)^{-\eta}\exp\bigl(-\theta|\mu_k|\bigr). \tag{23}$$

Якщо функції $\varphi_j(x)$ *належать* $W_B^{4n^2+n+\eta+\alpha+1,\,\beta+\theta}$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$, *то існує розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^{2n}\bigl([0,T],W_B^{\alpha,\,\beta}\bigr)$, *який зображується формулою* (17) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\ldots,2n\}$.

Доведення. На підставі формули (8) отримуємо

$$\Bigl\|u;C^{2n}\bigl([0,T],W_B^{\alpha,\,\beta}\bigr)\Bigr\|=\sum_{l=0}^{2n}\max_{t\in[0,T]}\left(\sum_{\mu_k\in M_p}|u_k^{(l)}(t)|^2\bigl(1+|\mu_k|\bigr)^{2\alpha}\exp\bigl(2\beta|\mu_k|\bigr)\right)^{1/2}, \tag{24}$$

де $u_k(t)$ визначені формулами (16). Враховуючи (16), (19), (23) і лему 3, отримуємо такі оцінки:

$$\max_{t\in[0,T]}\Bigl|u_k^{(l)}(t)\Bigr|\leqslant C_3\sum_{q,j=1}^{2n}\frac{|\Delta_{jq}(\mu_k,T)|}{|\Delta(\mu_k,T)|}|\varphi_{jk}|\bigl(1+|\mu_k|\bigr)^{2n+l+1-q}\leqslant$$

$$\leqslant C_6\sum_{j=1}^{2n}|\varphi_{jk}|\bigl(1+|\mu_k|\bigr)^{4n^2-n+l+\eta+1}\exp\bigl(\theta|\mu_k|\bigr),\qquad l\in\{0,1,\ldots,2n\},\quad \mu_k\in M_p, \tag{25}$$

де $C_6=2nC_3C_5$. На підставі (24) та оцінок (25) дістаємо оцінку

$$\Bigl\|u;C^{2n}([0,T],W_B^{\alpha,\,\beta})\Bigr\|\leqslant$$

$$\leqslant(2n+1)C_6\sum_{j=1}^{2n}\left(\sum_{\mu_k\in M_p}|\varphi_{jk}|^2\bigl(1+|\mu_k|\bigr)^{2(4n^2+n+\eta+\alpha+1)}\exp\bigl(2(\beta+\theta)|\mu_k|\bigr)\right)^{1/2}=$$

$$=(2n+1)C_6\sum_{j=1}^{2n}\Bigl\|\varphi_j;W_B^{4n^2+n+\alpha+\eta+1,\,\beta+\theta}\Bigr\|.$$

З отриманої нерівності випливає доведення теореми.

7. Метричні оцінки малих знаменників. Вияснимо можливість виконання нерівності (23), використавши методику роботи [4]. Позначимо $\bar{n}_j = n_1 + \ldots + n_{j-1}$, $j \in \{2, \ldots, m+1\}$;

$$\zeta_q = q - 1 - \bar{n}_l, \qquad \theta_q = l, \quad q \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{26}$$

де $l := l(q)$ однозначно визначається з нерівності $\bar{n}_l < q \leq \bar{n}_{l+1}$.

Функції

$$u_{qk} := u_{qk}(t) = t^{\zeta_q} \exp(\lambda_{\theta_q,k} t), \quad q \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{27}$$

де ζ_q, θ_q визначені формулами (26), утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (9).

Для фундаментальної системи (27) характеристичний визначник

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) := \det \left\| U_j[u_{qk}] \right\|_{q,j=1}^{2n}, \quad \mu_k \in M_p,$$

задачі (9), (10) має вигляд

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = \begin{vmatrix} \alpha_1 P_1^0(0) + \beta_1 \tilde{I}_{11} & \ldots & \alpha_1 P_{2n}^0(0) + \beta_1 \tilde{I}_{2n,1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n P_1^{2(n-1)}(0) + \beta_n \tilde{I}_{1n} & \ldots & \alpha_n P_{2n}^{2(n-1)}(0) + \beta_n \tilde{I}_{2n,n} \\ \alpha_{n+1} P_1^0(T) + \beta_{n+1} \tilde{I}_{1,n+1} & \ldots & \alpha_{n+1} P_{2n}^0(T) + \beta_{n+1} \tilde{I}_{2n,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{2n} P_1^{2(n-1)}(T) + \beta_{2n} \tilde{I}_{1,2n} & \ldots & \alpha_{2n} P_{2n}^{2(n-1)}(T) + \beta_{2n} \tilde{I}_{2n,2n} \end{vmatrix}, \tag{28}$$

де

$$P_q^h(t) := \frac{d^h}{dt^h} u_{qk}(t) = \exp(\lambda_{\theta_q,k} t) \sum_{j=0}^{\min\{h,\zeta_q\}} C_h^j \frac{\zeta_q!}{(\zeta_q - j)!} \lambda_{\theta_q,k}^{h-j} t^{\zeta_q - j}, \tag{29}$$

$$h \in \big\{0, 2, \ldots, 2(n-1)\big\}, \quad q \in \{1, \ldots, 2n\},$$

$$\tilde{I}_{qj} := \tilde{I}_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, T) = \int_0^T t^{r_j + \zeta_q} \exp(\lambda_{\theta_q,k} t) dt =$$

$$= Q_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, T) \exp(\lambda_{\theta_q,k} T) - Q_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, 0), \quad q,\ j \in \{1, \ldots, 2n\}, \tag{30}$$

$$Q_{qj}(\lambda_{\theta_q,k}, t) = \sum_{h=1}^{r_j + \zeta_q + 1} \frac{(-1)^{h+1} (r_j + \zeta_q)!}{(r_j + \zeta_q - h + 1)!} \frac{t^{r_j + \zeta_q - h + 1}}{(\lambda_{\theta_q,k})^h}, \quad q,\ j \in \{1, \ldots, 2n\}. \tag{31}$$

Визначники $\widetilde{\Delta}(\mu_k, T)$ і $\Delta(\mu_k, T)$ пов'язані співвідношенням

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = W(\mu_k) \Delta(\mu_k, T), \tag{32}$$

в якому

$$W(\mu_k) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{q=1}^{n_j-1} q! \prod_{m \geq j > l \geq 1} \big(\lambda_j(\mu_k) - \lambda_l(\mu_k)\big)^{n_j n_l} \tag{33}$$

є значенням вронскіана системи функцій (27) при $t = 0$. Позначимо

$$\Lambda = (\underbrace{\lambda_{1k}, \ldots, \lambda_{1k}}_{n_1}, \ldots, \underbrace{\lambda_{mk}, \ldots, \lambda_{mk}}_{n_m}) = (\lambda_{\theta_1,k}, \ldots, \lambda_{\theta_{2n},k}),$$

$$\Lambda_\omega = (\lambda_{\theta_{i_1},k}, \ldots, \lambda_{\theta_{i_{2n}},k}), \qquad (J, \Lambda_\omega) = j_1 \lambda_{\theta_{i_1},k} + \ldots + j_{2n} \lambda_{\theta_{i_{2n}},k}, \qquad \omega \in S_{2n}, \quad J \in \mathcal{J}_{2n}. \tag{34}$$

Для кожного $\mu_k \in M_p$ визначник (28) обчислюється за формулою [21]

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{2n} \left(\alpha_q v_{i_q} + \beta_q \tilde{I}_{i_q,q} \right),$$

$$v_{i_q} = \begin{cases} P_{i_q}^{2(q-1)}(0), & q \in \{1, \ldots, n\}, \\ P_{i_q}^{2(q-n-1)}(T), & q \in \{n+1, \ldots, 2n\}. \end{cases} \tag{35}$$

Врахувавши (30) та лему 2, запишемо рівність (35) таким чином:

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \prod_{q=1}^{2n} \Big(\beta_q Q_{i_q,q}(\lambda_{\theta_{i_q},k}, T) \exp(\lambda_{\theta_{i_q},k} T) + \big(\alpha_q v_{i_q} - \beta_q Q_{i_q,q}(\lambda_{\theta_{i_q},k}, 0) \big) \Big) =$$

$$= \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \left[\sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_{2n}=0}^{1} \Delta_1(\omega, J, T) \Delta_2(\omega, J, T) \right], \tag{36}$$

де

$$\Delta_1(\omega, J, T) = \prod_{q=1}^{2n} \beta_q^{j_q} Q_{i_q,q}^{j_q}(\lambda_{\theta_{i_q},k}, T) \exp(j_q \lambda_{\theta_{i_q},k} T), \tag{37}$$

$$\Delta_2(\omega, J, T) = \prod_{s=1}^{2n} \big(\alpha_s v_{i_s} - \beta_s Q_{i_s,s}(\lambda_{\theta_{i_s},k}, 0) \big)^{1-j_s}. \tag{38}$$

На підставі формул (29), (31), (35) і (38) зобразимо $\Delta_2(\omega, J, T)$ у вигляді

$$\Delta_2(\omega, J, T) = P_1(\omega, J, T) \exp\left(\sum_{s=n+1}^{2n} (1 - j_s) \lambda_{\theta_{i_s},k} T \right) + P_2(\omega, J), \tag{39}$$

де $P_1(\omega, J, T)$ — многочлен за змінною T з комплексними коефіцієнтами, $\deg P_1(\omega, J, T) \leqslant \leqslant \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{m} n_q(n_q - 1)$, а доданок $P_2(\omega, J)$ не залежить від T. Позначимо

$$\beta(J) = \prod_{q=1}^{2n} \beta_q^{j_q}, \qquad Q_J(\Lambda_\omega, T) = \prod_{q=1}^{2n} Q_{i_q,q}^{j_q}(\lambda_{\theta_{i_q},k}, T). \tag{40}$$

На підставі формул (36), (37) і (39) отримуємо

$$\widetilde{\Delta}(\mu_k, T) = \sum_{\omega \in S_{2n}} (-1)^{\rho_\omega} \left(\sum_{j_1=0}^{1} \ldots \sum_{j_{2n}=0}^{1} \overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T) \exp\big((J, \Lambda_\omega)T\big) \right), \tag{41}$$

де $\overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T)$, $J \in \mathcal{J}_{2n}$, $\omega \in S_{2n}$, — многочлени за змінною T з комплексними коефіцієнтами, причому

$$\deg \overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T) \leqslant \deg Q_J(\Lambda_\omega, T) + \deg P_1(J, T). \tag{42}$$

З (31) випливає, що $\deg Q_{i_q,q}(\lambda_{lk}, T) = r_q + \zeta_{i_q}$, $q \in \{1, \ldots, 2n\}$, звідки, враховуючи (40), отримуємо

$$\deg Q_J(\Lambda_\omega, T) = \sum_{q=1}^{2n} j_q \deg Q_{i_q,q}(\lambda_{lk}, T) = \sum_{q=1}^{2n} j_q (r_q + \zeta_{i_q}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{q=1}^{2n} (r_q + \zeta_{i_q}) = \sum_{q=1}^{2n} r_q + \sum_{l=1}^{m} \sum_{q=1}^{n_l-1} q = r + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1), \qquad J \in \mathcal{J}_{2n}, \quad \omega \in S_{2n}, \tag{43}$$

де $r = r_1 + \ldots + r_{2n}$. З нерівностей (42), (43) випливає, що

$$\deg \overline{Q}_J(\Lambda_\omega, T) \leqslant r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1), \qquad J \in \mathcal{J}_{2n}, \quad \omega \in S_{2n}. \tag{44}$$

Для кожного $\mu_k \in M_p$ розглянемо функцію $\Delta(\mu_k, \tau)$, що визначена на інтервалі $(0, \infty)$ формулою (13), в якій T потрібно замінити на τ. З формул (32), (41) та нерівностей (44) випливає, що $\Delta(\mu_k, \tau)$ є квазімногочленом

$$\Delta(\mu_k, \tau) = \frac{1}{W(\mu_k)} \sum_{J \in \mathcal{J}_{2n}} \exp\big((J, \Lambda)\tau\big) F_J(\tau), \tag{45}$$

в якому $F_J(\tau)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня $N_J - 1$, де $N_J \leqslant 1 + r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1)$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує 4^n. З формули (45) випливає, що функція $\Delta(\mu_k, \tau)$ є аналітичною на інтервалі $\tau \in (0, \infty)$. Продовжимо її аналітично на $\mathbb{R}$ і отриману функцію позначимо $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mu_k, \tau)$. Через $E\big(\mathcal{D}, \varepsilon, [0, H]\big)$ позначимо множину тих $\tau \in [0, H]$, для яких виконується нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k, \tau)| \leqslant \varepsilon$. За теоремою 2.1 із [4] для кожного $\mu_k \in M_p$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E\big(\mathcal{D}, \varepsilon, [0, H]\big) \leqslant C_7 B(\mu_k) \left(\frac{4\varepsilon \Psi(\mu_k)}{G(\mu_k)} \right)^{1/(N-1)}, \quad C_7 := C_7(N, H),$$

де

$$N := \sum_{J \in \mathcal{J}_{2n}} N_J \leqslant 4^n \Big(1 + r + \sum_{l=1}^{m} n_l(n_l - 1) \Big), \tag{46}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J\in\mathcal{J}_{2n}} \big|(J,\Lambda)\big|, \quad \mu_k \in M_p, \tag{47}$$

$$\Psi(\mu_k) := \max_{\tau\in[0,H]} \exp\left(-\Big(\min_{J\in\mathcal{J}_{2n}} \mathrm{Re}(J,\Lambda)\Big)\tau\right), \quad \mu_k \in M_p, \tag{48}$$

$$G(\mu_k) := \max_{1\leqslant j\leqslant 4^n} \left\{ \left| \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{j-1} \mathcal{D}(\mu_k,\tau)\Big|_{\tau=0} \right| \big(B(\mu_k)\big)^{-j} \right\}, \quad \mu_k \in M_p. \tag{49}$$

Враховуючи (11), (34) і (47), маємо

$$B(\mu_k) \leqslant 1 + \sum_{l=1}^{m} n_l|\lambda_{lk}| \leqslant C_8\big(1+|\mu_k|\big), \tag{50}$$

де $C_8 = mC_1 \max_{1\leqslant l\leqslant m}\{n_l\}$. На підставі (12), (34) і (48) отримуємо

$$\Psi(\mu_k) \leqslant \exp(2nC_2H\big(|\mu_k|+1)\big). \tag{51}$$

Оцінимо тепер знизу $G(\mu_k)$. Нехай $\eta_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\frac{\partial^q \mathcal{D}(\mu_k,\tau)}{\partial\tau^q}\bigg|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q<\eta_0, \\ C_9 \neq 0, & q=\eta_0, \end{cases} \qquad \forall \mu_k \in M_p. \tag{52}$$

Враховуючи (49), (50) та (52), одержуємо

$$G(\mu_k) = \left| \left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{\eta_0} \mathcal{D}(\mu_k,\tau)\Big|_{\tau=0} \right| \big(B(\mu_k)\big)^{-\eta_0} \geqslant C_{10}\big(1+|\mu_k|\big)^{-\eta_0}, \tag{53}$$

де $C_{10} = C_9(C_8)^{-\eta_0}$.

Існування такого натурального числа η_0, що справджуються умови (52), для частинного випадку задачі (1), (2) стверджує наступна лема.

Лема 4. *Якщо в умовах* (2) $\alpha_j = 0, j \in \{1,\ldots,2n\}$, *то умови* (52) *виконуються при* $\eta_0 = r + (2n+1)n$ *і*

$$C_9 = \prod_{q=1}^{2n-1} (q!)^{-1} \frac{\prod_{2n\geq j>l\geq 1}(r_j - r_l)(n-l)}{\prod_{j,\,l=1}^{2n}(r_j+l)}.$$

Доведення проводиться за схемою доведення леми 3.1 із [4].

Теорема 5. *Нехай справджуються умови* (52). *Для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}$) *чисел* $T>0$ *нерівність* (23) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in M_p$, *коли* $\theta = 2nC_2T$, *а* $\eta > \eta_0 + (p/\sigma+1)\Big(4^n\big(1+r+\sum_{l=1}^m n_l(n_l-1)\big)-1\Big)$.

Доведення. Розіб'ємо інтервал $[0,\infty)$ на відрізки $\mathrm{I}_q := [(q-1)T, qT]$, $q\in\mathbb{N}$. Нехай

$$\varepsilon_{\eta,\theta}(\mu_k) = \big(1+|\mu_k|\big)^{-\eta} \exp\big(-\theta|\mu_k|\big), \qquad A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_q,\mu_k) = E\big(\mathcal{D}(\mu_k,\tau), \varepsilon_{\eta,\theta}(\mu_k), \mathrm{I}_q\big), \quad \mu_k \in M_p.$$

Згідно з теоремою 2.1 із [4], враховуючи (5), (46), (50), (51) та (53), отримуємо оцінку

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_1,\mu_k) \leqslant C_{11}\big(1+|\mu_k|\big)\left(\frac{4(1+|\mu_k|)^{-\eta}\exp(-\theta|\mu_k|)\exp(2nC_2T|\mu_k|)}{(1+|\mu_k|)^{-\eta_0}}\right)^{1/(N-1)} =$$

$$= 4^{1/(N-1)}C_{11}\big(1+|\mu_k|\big)^{\frac{\eta_0-\eta}{N-1}+1} \leqslant 4^{1/(N-1)}C_{11}d_2|k|^{\left(\frac{\eta_0-\eta}{N-1}+1\right)\sigma} = C_{12}|k|^{-\left(\frac{\eta-\eta_0}{N-1}-1\right)\sigma}.$$

Позначимо $z=\left(\dfrac{\eta-\eta_0}{N-1}-1\right)\sigma$. Оскільки $z>\big((p/\sigma+1)-1\big)\sigma>p$, то ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|k|^{-z}$ збігається, а отже, збіжним є і ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_1,\mu_k)$. Тоді за лемою Бореля – Кантеллі [22] міра тих $\tau\in\mathrm{I}_1$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_1,\mu_k)$, дорівнює нулю. Аналогічно, виконавши заміну змінної $\tau=\bar\tau+(q-1)T$, $\bar\tau\in\mathrm{I}_1$, переконаємося, що міра тих $\tau\in\mathrm{I}_q$, $q\in\mathbb{N}$, які потрапляють у нескінченну кількість множин $A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_q,\mu_k)$, дорівнює нулю. Враховуючи, що інтервал $[0,\infty)$ є об'єднанням зліченної кількості інтервалів I_q, $q\in\mathbb{N}$, отримуємо, що нерівність $|\mathcal{D}(\mu_k,\tau)|>\varepsilon_{\eta,\theta}(\mu_k)$ виконується для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\tau>0$ та для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k\in M_p$. Оскільки $\mathcal{D}(\mu_k,\tau)=\Delta(\mu_k,\tau)$ на інтервалі $(0,\infty)$, то нерівність $\big|\Delta(\mu_k,T)\big|>\big(1+|\mu_k|\big)^{-\eta}\exp\big(-\theta|\mu_k|\big)$ виконується для майже всіх (щодо міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ та для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k\in M_p$, звідки випливає доведення теореми.

Наслідок 2. *Нехай для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $\mu_k\in M_p$ виконуються нерівності*

$$\operatorname{Re}\lambda_l(\mu_k)\geqslant-\kappa\ln|\mu_k|,\quad l\in\{1,\ldots,m\},\tag{54}$$

де $\kappa>0$ — деяка стала, що не залежить від μ_k. Тоді нерівність (23) *виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ та для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k\in M_p$, при $\theta=0$ і*

$$\eta>\eta_0+2n\kappa T+(p/\sigma+1)\left(4^n(1+r+\sum_{l=1}^{m}n_l\big(n_l-1\big))-1\right),\tag{55}$$

де η_0 — стала, визначена умовами (52).

Доведення. На підставі (48), (54) отримуємо

$$\Psi(\mu_k)\leqslant(1+|\mu_k|)\exp(2n\kappa T).\tag{56}$$

Покладемо $\varepsilon_{\eta,\theta}(\mu_k)=\big(1+|\mu_k|\big)^{-\eta}$. Тоді, враховуючи (5), (46), (50), (53) та (56), одержуємо оцінку

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_1,\mu_k)\leqslant C_{13}\big(1+|\mu_k|\big)\left(4(1+|\mu_k|)^{-\eta+\eta_0}\right)^{1/(N-1)}=$$

$$=4^{1/(N-1)}C_{13}\big(1+|\mu_k|\big)^{\frac{\eta_0-\eta}{N-1}+1}\leqslant4^{1/(N-1)}C_{13}d_2|k|^{\left(\frac{\eta_0-\eta}{N-1}+1\right)\sigma}=C_{14}|k|^{-\left(\frac{\eta-\eta_0}{N-1}-1\right)\sigma},$$

де η справджує нерівність (55). Оскільки $\left(\dfrac{\eta-\eta_0}{N-1}-1\right)\sigma>p$, то ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|k|^{-z}$ збіжний, а отже, збіжним є і ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_1,\mu_k)$. Зі збіжності ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}A_{\eta,\theta}(\mathrm{I}_1,\mu_k)$ випливає наслідок.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови* (15) *і* (54), *а* $\varphi_j(x) \in C_B^{[\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2}(\mathbb{R}^p)$, $j \in \in \{1,\ldots,2n\}$, *де* η *справджує нерівність* (55). *Тоді існує розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C_B^{2n}(\overline{D}^p)$, *який зображується формулою* (17) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j \in \in \{1,\ldots,2n\}$.

Доведення. На підставі формул (17) і (19) отримуємо

$$\left\|u; C_B^{2n}(\overline{D}^p)\right\| \leqslant \sum_{|k|\geqslant 0}\left(C_{15}\sum_{q,j=1}^{2n}\frac{|\Delta_{jq}(\mu_k,T)|}{|\Delta(\mu_k,T)|}|\varphi_{jk}|(1+|\mu_k|)^{4n+1-q}\right), \tag{57}$$

де $C_{15}=(2n)!C_3$. За умов теореми на підставі леми 1 виконуються оцінки

$$|\varphi_{jk}| \leqslant C_{16}\frac{\left\|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2}(\mathbb{R}^p)\right\|}{(1+|\mu_k|)^{[\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2}}, \qquad j\in\{1,\ldots,2n\}, \quad \mu_k\in M_p, \tag{58}$$

де $C_{16}=(2p)^{[\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2}\big([\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2\big)$. З оцінок (5), (57), (58), леми 3 та наслідку 2 одержуємо

$$\left\|u; C_B^{2n}(\overline{D}^p)\right\| \leqslant C_{17}\sum_{|k|\geqslant 0}\big(1+|\mu_k|\big)^{\eta-1-[\eta+p/\sigma]}\left(\sum_{j=1}^{2n}\left\|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2}(\mathbb{R}^p)\right\|\right) \leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\left(\sum_{j=1}^{2n}\left\|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2}(\mathbb{R}^p)\right\|\right)\sum_{|k|\geqslant 0}\big(1+|k|\big)^{-z}, \tag{59}$$

де $C_{18}=C_{17}d_2$, а $z=p+\big(1-\{\eta+p/\sigma\}\big)\sigma$. Оскільки $z>p$, то ряд $\sum_{|k|\geqslant 0}\big(1+|k|\big)^{-z}$ є збіжним. Позначимо його суму через S_z. Тоді з (59) отримаємо

$$\left\|u; C_B^{2n}(\overline{D}^p)\right\| \leqslant C_{18}S_z\sum_{j=1}^{2n}\left\|\varphi_j; C_B^{[\eta+p/\sigma]+4n^2+3n+2}(\mathbb{R}^p)\right\|. \tag{60}$$

З оцінки (60) випливає доведення теореми.

8. Висновки. Результати можна поширити на випадок, коли розв'язок задачі (1), (2) шукається у класі функцій, квазіперіодичних по x [6, 23], а також на гіперболічні за Гордінгом системи рівнянь

$$L[\vec{u}] := \sum_{|\hat{s}|\leqslant 2n} A_{\hat{s}}\frac{\partial^{|\hat{s}|}\vec{u}(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\ldots\partial x_p^{s_p}}=0, \quad (t,x)\in D^p,$$

де $A_{\hat{s}}$ — матриці розміру $m\times m$ зі сталими комплексними коефіцієнтами,

$$\vec{u}(t,x)=\operatorname{col}\big(u_1(t,x),\ldots,u_m(t,x)\big).$$

1. *Дмитриев В. Б.* Нелокальная задача с нелинейными интегральными условиями для гиперболического уравнения // Вестн. Сам. гос. ун-та. – 2009. – № 1(18). – С. 26 – 32.
2. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку // Вісн. Нац. ун-ту „Львів. політехніка”. Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 625. – С. 12 – 19.

3. *Лукина Г. А.* Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега – де Фриза // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2011. – Вып. 8, № 17. – С. 52 – 61.
4. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74 – 85.
5. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студ. – 2007. – **28**, № 2. – С. 115 – 141.
6. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами для рівняння Клейна – Гордона у класі функцій, майже періодичних за просторовими змінними // Прикл. пробл. механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 41 – 53.
7. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887 – 892.
8. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
9. *Симотюк М. М., Медвідь О. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 4. – С. 98 – 107.
10. *Штабалюк П. І.* Про майже періодичні розв’язки однієї задачі з нелокальними умовами // Вісн. держ. ун-ту „Львів. політехніка”. Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С. 153 –165 .
11. *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bull. Georg. Nat. Acad. Sci. – 2011. – **5**, № 1. – P. 31 – 37.
12. *Mesluob S., Bouziani A.* Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations // J. Appl. Math. – 2001. – № 3. – P. 107 – 116.
13. *Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. В.* Элементы теории функций. – М.: Физматгиз, 1963. – 244 с.
14. *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions. – Cambridge: Dover Publ., Inc., 1954. – 180 p.
15. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 2. – С. 3 – 47.
16. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
17. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – Вып. 3. – 274 с.
18. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. -– Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
19. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов: в 4 т. — М.: Мир, 1986. — Т. 2. — 456 с.
20. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+xiv с.
21. *Ланкастер П.* Теория матриц. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
22. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.
23. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.

Одержано 09.04.12