УДК 519.21

В. Н. Радченко (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С ОБЩИМИ СЛУЧАЙНЫМИ МЕРАМИ

We consider the heat conduction equation and the wave equation having constant coefficients and also a term given by an integral with respect to a stochastic measure. Only the condition of sigma-additivity in probability is imposed on the stochastic measure. Solutions of the considered equations are presented and, for every such equation, the coincidence of the solutions satisfying some additional conditions is proved.

Розглядаються вказані рівняння, що мають постійні коефіцієнти і містять доданок, заданий інтегралом за випадковою мірою. На випадкову міру накладено лише умову сигма-адитивності за ймовірністю. Наведено розв'язки цих рівнянь, для кожного такого рівняння доведено збіг розв'язків, що задовольняють певні додаткові умови.

1. Введение. Цель данной работы — решение задач Коши вида

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} = a^2 \Delta_x V_t + f\dot{\mu}, \quad t>0, \qquad V_t\big|_{t=+0} = \dot{\nu}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 V_t}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial x^2} + f\dot{\mu}^\sigma, \quad t>0, \qquad \frac{\partial V_t}{\partial t}\bigg|_{t=+0} = \dot{\zeta}^\sigma, \qquad V_t\big|_{t=+0} = \dot{\nu}^\sigma, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $f\dot{\mu}$ и $\dot{\nu}$ — обобщенные случайные функции (о. с. ф.), порожденные случайными мерами, $\dot{\mu}^\sigma$, $\dot{\zeta}^\sigma$ и $\dot{\nu}^\sigma$ — о. с. ф., порожденные σ-конечными случайными мерами. Точные определения этих понятий, а также уравнений в (1), (2) даны ниже.

Будет приведен явный вид о. с. ф. — решений (1) и (2), доказано совпадение решений уравнения, удовлетворяющих дополнительному условию. В качестве вспомогательных утверждений будут получены некоторые свойства о. с. ф.

Стохастические дифференциальные уравнения в частных производных (СДУЧП) описывают различные процессы в физических и биологических моделях при наличии случайных воздействий (см., например, [1, 2]).

Понятие о. с. ф. как линейного непрерывного отображения из классов функций в множество случайных величин использовано в [3] (гл. III). В дальнейшем о. с. ф. использовались для решения СДУЧП. Такие уравнения могут пониматься по-разному, с различными способами соединения стохастических составляющих, производных по времени и по пространственным переменным (подробнее см. [4]). Для нахождения обобщенного решения (неизвестной о. с. ф.) уравнение записывалось в интегральной (слабой форме) с наличием основной функции из соответствующего пространства и некоторого стохастического интеграла.

В работе [5] (гл. 4) рассмотрены параболические СДУЧП, где в интегральной записи в качестве стохастической части использован интеграл Ито по отрезку времени, а по пространственным переменным производные брались в обычном смысле. Аналогичные уравнения в областях изучены в [6].

В статье [7] построен стохастический интеграл по мартингальной мере $M_t(A)$, $A \subset \mathbb{R}^d$, $t \ge 0$. Уравнение, записанное в слабой форме, содержало интеграл по $M(dx, dt)$, а искомыми объектами были о. с. ф., определенные на основных функциях Шварца в $\mathbb{R}^{d+1}$. Обобщение этого интеграла с применениями к решению волнового уравнения в многомерном случае приведены в [8 – 10].

В [11] исследуются СДУЧП, в которых стохастической составляющей является белый шум, произведения случайных величин (значений случайных функций) берутся в смысле Вика, а все эти случайные величины должны при-

© В. Н. РАДЧЕНКО, 2008

надлежать специальным образом определенным пространствам Кондратьева. Стохастический интеграл рассматривается в обобщенном смысле Скорохода по винеровскому процессу.

В [12] (гл. 2) рассмотрены СДУЧП как операторные уравнения, а значения о. с. ф. принадлежат некоторому гильбертовому пространству.

Во всех указанных работах интегратор или значения о. с. ф. должны иметь второй момент, а во многих случаях еще и дополнительное свойство мартингальности. В данной статье такие условия не налагаются, рассматриваются интегралы от действительных функций по общим случайным мерам и показано как через такие интегралы записывается решение для каждой из задач (1) и (2).

В п. 2 данной работы приведены основные определения, в п. 3 получены нужные нам свойства о.с.ф., в п. 4 рассмотрено решение уравнения (1), а в п. 5 — уравнения (2).

2. Основные определения. Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ — множество всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d \geq 1$, с компактным носителем. Сходимость в $\mathcal{D}$ определяем стандартным образом — для последовательности функций их носители равномерно ограничены, а производные любого порядка равномерно сходятся.

Определение 1. *Обобщенной случайной функцией (о.с.ф.) называется линейное непрерывное отображение* $\xi\colon \mathcal{D} \to L_0$.

Множество всех о. с. ф. будем отображать через $\mathcal{D}'_r = \mathcal{D}'_r(\mathbb{R}^d)$. Производная $D^\beta \xi$ о. с. ф. ξ также определяется обычным образом:

$$\left(D^\beta \xi, \varphi\right) = (-1)^{\beta_1 + \ldots + \beta_d}\left(\xi, D^\beta \varphi\right), \quad \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_d), \quad \beta_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{3}$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ — полное вероятностное пространство. Через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ обозначим множество всех случайных величин (точнее говоря, их классов P-эквивалентности). Сходимость в L_0 означает сходимость по вероятности.

Через $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ будем обозначать σ-алгебру борелевских подмножеств $\mathbb{R}^d$.

Определение 2. *Случайной мерой называется* σ*-аддитивное отображение* $\mu\colon \mathcal{B} \to L_0$.

Отметим, что мы не налагаем на μ требований неотрицательности или существования моментов, в этом смысле такие случайные меры можно назвать общими. Всюду далее μ будет обозначать случайную меру.

Приведем некоторые примеры. Если $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом (например, винеровским процессом), то $\mu(A) = \int_0^T I_A(t)\, dX(t)$ будет случайной мерой на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Аналогичным образом определяет случайную меру дробное броуновское движение $B^H(t)$ при значении параметра Харста $H > 1/2$ (это следует из неравенства (1.5) [13]). Другие примеры, а также условия того, что значения случайного процесса с независимыми приращениями порождают случайную меру, можно найти в [14] (гл. 7, 8).

В работе [15] рассмотрены случайные меры на произвольных σ-алгебрах, построен и изучен интеграл вида $\int_A f\, d\mu$, где f — измеримая действительная функция. Его конструкция приводится стандартно с использованием приближения простыми функциями. (Аналогичное построение выполнено в [14] (гл. 7), см. также [16].) В частности, любая ограниченная измеримая функция f будет интегрируемой по любой мере μ. Для этого интеграла имеет место аналог теоремы Лебега о мажорируемой сходимости (см. следствие 1.2 [15] или предложение 7.1.1 [14]).

Для случайной меры λ определим о. с. ф. $\dot{\lambda}$ по правилу

$$\left(\dot{\lambda}, \varphi\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, d\lambda(x), \quad \varphi \in \mathcal{D} \tag{4}$$

(для обоснования непрерывности достаточно использовать аналог теоремы Лебега).

Обозначим $\mathcal{B}_j = \mathcal{B} \bigcap \{|x| \le j\}$.

Определение 3. σ-*Конечной случайной мерой называется отображение* μ^σ: $\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j \to L_0$ *такое, что* $\mu(A) = \mu^\sigma(A \bigcap \{|x| \le j\})$ *является случайной мерой для каждого* $j \ge 1$.

Примерами σ-конечной случайной меры могут служить $\mu^\sigma(A) = \int_0^\infty I_A(t) dX(t)$, $A \in \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j$, для квадратично интегрируемого мартингала $X(t)$, $t \ge 0$, и аналогичный интеграл по $B^H(t)$ при $H > 1/2$. Интегрирование действительных функций по σ-конечным случайным мерам рассмотрено в [15] (гл. 2).

Если λ — σ-конечная случайная мера, то (4) также задает о. с. ф. Для финитной φ содержащийся в (4) интеграл фактически берется по случайной мере.

Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца быстро убывающих функций (множество бесконечно дифференцируемых функций $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ таких, что $|x|^\alpha D^\beta \varphi(x)$ стремится к нулю при $|x| \to \infty$ для любых $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \in (\mathbb{N} \bigcup \{0\})^d$). Сходимость в $\mathcal{S}$ рассматривается в стандартном смысле (см., например, [17], § II.8).

По аналогии с определением 1 и теорией обычных (действительных) обобщенных функций введем следующее определение.

Определение 4. *Обобщенной случайной функцией медленного роста (о. с. ф. м. р.) называется линейное непрерывное отображение* $\xi: \mathcal{S} \to L_0$.

Множество всех о. с. ф. м. р. будем обозначать через $\mathcal{S}'_r = \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^d)$. Производные элементов $\mathcal{S}'_r$ также определяем по правилу (3).

Для произвольной случайной меры λ и $\varphi \in \mathcal{S}$ равенство (4) задает о. с. ф. м. р.

Производная по t от случайного процесса (т. е. от L_0-значной функции на $[0, +\infty)$ или $(0, +\infty)$) в этой работе рассматривается в смысле сходимости по вероятности, а именно, для процесса $\eta(t)$ положим

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = \mathrm{p}\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\eta(t + \Delta t) - \eta(t)}{\Delta t}, \quad t > 0. \tag{5}$$

Отметим, что для данной производной из условий

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = 0 \text{ п. н.}, \quad t > 0, \qquad \mathrm{p}\lim_{\Delta t \to +0} \eta(t) = \eta(0)$$

не следует, что $\eta(t) = \eta(0)$ п. н., $t \ge 0$. В качестве соответствующего примера можно взять однородный процесс Пуассона на $[0, 1]$.

Далее мы получим некоторые вспомогательные утверждения, а затем рассмотрим решение некоторых уравнений в частных производных с о. с. ф. и о. с. ф. м. р.

3. Свойства обобщенных случайных функций. Следующее утверждение имеет известный аналог для действительных обобщенных функций.

Лемма 1. *Пусть* $\xi_k = \mathcal{S}'_r$, $k \ge 1$, *таковы, что для каждой* $\varphi \in \mathcal{S}$ *будет* $(\xi_k, \varphi) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $k \to \infty$. *Пусть* $\varphi_k \to 0$ *в* $\mathcal{S}$. *Тогда* $(\xi_k, \varphi_k) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $k \to \infty$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ при всех $k \ge 1$ выполняются неравенства $\|(\xi_k, \varphi_k)\| > \varepsilon_0$ (используем полунорму, метризующую сходимость по вероятности). Пошагово строим последовательность k_n, $n \ge 1$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d,\, 0 \le \alpha,\, \beta_1 + \ldots + \beta_d \le n} |x|^\alpha \left| D^\beta \varphi_{k_n}(x) \right| \le 2^{-n}, \tag{6}$$

$$\left\| (\xi_{k_j}, \varphi_{k_n}) \right\| \le \frac{\varepsilon_0}{3 \cdot 2^n}, \quad 1 \le j \le n-1,$$

$$\left\| (\xi_{k_n}, \varphi_{k_j}) \right\| \le \frac{\varepsilon_0}{3(n-1)}, \quad 1 \le j \le n-1$$

(при выборе k_1 используем лишь условие (6)). Рассмотрим $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{k_n}(x)$. Из условий (6) имеем, что $\varphi \in \mathcal{S}$. Для каждого $n \ge 2$

$$\left\| (\xi_{k_n}, \varphi) \right\| = \lim_{r \to \infty} \left\| \left(\xi_{k_n}, \sum_{j=1}^{r} \varphi_{k_j} \right) \right\| \ge$$

$$\ge \lim_{r \to \infty} \left(\left\| (\xi_{k_n}, \varphi_{k_n}) \right\| - \sum_{j=1}^{n-1} \left\| (\xi_{k_n}, \varphi_{k_j}) \right\| - \sum_{j=n+1}^{r} \left\| (\xi_{k_n}, \varphi_{k_j}) \right\| \right) \ge$$

$$\ge \varepsilon_0 - (n-1) \frac{\varepsilon_0}{3(n-1)} - \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{3 \cdot 2^j} \ge \frac{\varepsilon_0}{3}.$$

Это противоречит тому, что $(\xi_{k_n}, \varphi) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $n \to \infty$.

Лемма доказана.

Также будем использовать производную в пространстве $\mathcal{S}$. Для функции $\varphi_t\colon (0, +\infty) \to \mathcal{S}$ положим

$$\frac{\partial \varphi_t}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi_{t + \Delta t} - \varphi_t}{\Delta t}, \quad t > 0,$$

где предел берется в $\mathcal{S}$.

Пусть отображение $V_t\colon (0, +\infty) \to \mathcal{S}'_r$ таково, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{S}$ процесс $\eta(t) = (V_t, \varphi)$, $t > 0$, имеет производную в смысле (5). Тогда будем обозначать

$$\left(\frac{\partial V_t}{\partial t}, \varphi \right) = \frac{d}{dt} (V_t, \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Так определенная $\partial V_t / \partial t$ будет о. с. ф. м. р. Ее непрерывность можно доказать аналогично теореме III.32 [18], используя теорему о равномерной ограниченности для линейных пространств, которые не являются счетным объединением замкнутых неплотных подмножеств (см., например, теорему II.1.1 [19]). Тогда $\mathcal{S}$ (и сужение $\mathcal{D}$ на компакт — используем это ниже) будет таким пространством, поскольку является полным метрическим.

Лемма 2. *Пусть для отображения* $V_t\colon (0, +\infty) \to \mathcal{S}'_r$ *существует* $\partial V_t / \partial t$, *а для* φ_t: $(0, +\infty) \to \mathcal{S}$ *определена* $\partial\varphi_t/\partial t$ *при некотором* $t > 0$. *Тогда существует следующая производная в смысле* (5):

$$\frac{d}{dt}(V_t, \varphi_t) = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t}, \varphi_t\right) + \left(V_t, \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}\right), \quad t > 0. \tag{7}$$

Доказательство. Используя определение (5) и существование указанных производных, имеем

$$\mathrm{p}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{V_{t+\Delta t} - V_t}{\Delta t}, \varphi_t\right) = \left(\frac{\partial V_t}{\partial t}, \varphi_t\right), \qquad \mathrm{p}\lim_{\Delta t\to 0}\left(V_t, \frac{\varphi_{t+\Delta t} - \varphi_t}{\Delta t}\right) = \left(V_t, \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}\right).$$

По лемме 1

$$\mathrm{p}\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{V_{t+\Delta t} - V_t}{\Delta t}, \varphi_{t+\Delta t} - \varphi_t\right) = 0.$$

Остается сложить записанные равенства.

Лемма доказана.

Соответствующие утверждения имеют место и для пространств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'_r$, в которых $\partial\varphi_t/\partial t$ и $\partial V_t/\partial t$ определяются так же, и $\partial V_t/\partial t$ будет о. с. ф.

Лемма 3. *Пусть* $\xi_k \in \mathcal{D}'_r$, $k \geq 1$, *таковы, что для каждой* $\varphi \in \mathcal{D}$ *будет* $(\xi_k, \varphi) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $k \to \infty$. *Пусть* $\varphi_k \to 0$ *в* $\mathcal{D}$. *Тогда* $(\xi_k, \varphi_k) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$, $k \to \infty$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1, лишь вместо (6) используется условие

$$\sup_{x\in K,\, 0\leq \beta_1+\ldots+\beta_d \leq n} \left|D^{\beta}\varphi_{k_n}(x)\right| \leq 2^{-n}$$

(здесь $K \subset \mathbb{R}^d$ — компакт такой, что $\bigcup_k \operatorname{supp}\varphi_k \subset K$).

Лемма 4. *Пусть для отображения* V_t: $(0, +\infty) \to \mathcal{D}'_r$ *существует* $\partial V_t/\partial t$, *а для* φ_t: $(0, +\infty) \to \mathcal{D}$ *определена* $\partial\varphi_t/\partial t$, $t > 0$. *Тогда выполняется* (7).

Доказательство аналогично доказательству леммы 2, лишь вместо леммы 1 используется ссылка на лемму 3.

Приведем также следующий факт о дифференцировании интеграла по параметру.

Лемма 5. *Пусть* λ *— случайная мера, функция* $h(t, x)$: $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *для каждого фиксированного* $t \in (0, +\infty)$ *интегрируема по* λ. *Пусть для всех* x, t *существует* $\frac{\partial}{\partial t}h(t,x)$ *и* $\left|\frac{\partial}{\partial t}h(t,x)\right| \leq g(x)$, g *интегрируема по* λ. *Тогда для процесса*

$$\eta(t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(t, x)\, d\lambda(x), \quad t \in (0, +\infty),$$

существует производная в смысле равенства (5):

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial}{\partial t} h(t, x)\, d\lambda(x).$$

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{p}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} = \mathrm{p}\lim_{\Delta t\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{h(t+\Delta t, x) - h(t, x)}{\Delta t}\, d\lambda(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t, x) - h(t, x)}{\Delta t}\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\partial}{\partial t}h(t, x)\, d\lambda(x).$$

Переход к пределу в интеграле следует из аналога теоремы Лебега, так как

$$\left|\frac{h(t+\Delta t, x) - h(t, x)}{\Delta t}\right| \leq g(x).$$

Лемма доказана.

4. Решение уравнения теплопроводности со случайной мерой в правой части. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $f = f(t, x)$ — непрерывная по t, ограниченная, измеримая, действительная функция на $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$, μ и ν — случайные меры. Будем рассматривать $f\dot{\mu} = f(t, x)\,\dot{\mu}(x)$, которая для каждого $t > 0$ является о. с. ф. из $\mathcal{S}'_r = \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^d)$, определенной по правилу

$$(f\dot{\mu}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t, x)\,\varphi(x)\,d\mu(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{8}$$

О. с. ф. $\dot{\nu}$ определяется аналогичным образом по равенству (4).

Рассмотрим задачу Коши (1) относительно неизвестного процесса $(V_t)_{t>0}$, который для каждого t принимает значения в множестве $\mathcal{S}'_r = \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$.

Уравнение (1) для неизвестного V принимает вид

$$\frac{d}{dt}(V_t, \varphi) = a^2(V_t, \Delta_x \varphi) + \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(t, x)\,\varphi(x)\,d\mu(x), \quad t > 0, \tag{9}$$

$$\operatorname{p}\lim_{t \to +0}(V_t, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,d\nu(x), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{10}$$

Производная по t от случайного процесса в левой части (9) рассматривается в смысле (5), $\Delta_x = \sum_{k=1}^d \partial^2/\partial x_k^2$.

Мы будем использовать фундаментальное решение классического уравнения теплопроводности

$$\mathcal{E}(t, x) = (4a^2\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Напомним, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t, x)\,dx = 1, \quad t > 0, \quad \mathcal{E}(t, x) \to \delta(x) \quad \text{в} \quad \mathcal{S}', \quad t \to +0 \tag{11}$$

(см., например, § 16.1 [17]; сходимость там отмечена в $\mathcal{D}'$, но мы можем использовать плотность $\mathcal{D}$ в $\mathcal{S}$). С помощью равенства

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} - a^2 \Delta_x \mathcal{E} = 0, \quad t > 0, \tag{12}$$

легко проверить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t-s, x-y)\varphi(y)\,dy = \varphi(x) + a^2 \int\limits_s^t du \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(u-s, x-y)\Delta_y \varphi(y)\,dy,$$

$$\varphi \in \mathcal{S}, \quad t > s, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{13}$$

Теорема 1. *Процесс* $(V_t)_{t>0}$ *со значениями в* $\mathcal{S}'_r$, *заданный равенством*

$$(V_t, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int\limits_{[0,t]} f(s, x)\,ds \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t-s, x-y)\varphi(y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\nu(x) \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t, x-y)\varphi(y)\,dy, \quad \varphi \in \mathcal{S}, \tag{14}$$

будет решением задачи (9), (10).

Доказательство. Из (11), указанной ограниченности f и φ, аналога теоремы Лебега легко получаем существование содержащихся в (14) интегралов и то, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int_{[0,t]} f(s,x)\,ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t-s, x-y)\varphi(y)\,dy \xrightarrow{\mathsf{P}} 0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\nu(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t, x-y)\varphi(y)\,dy \xrightarrow{\mathsf{P}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,d\nu(x), \quad t \to +0.$$

Поэтому (10) выполняется.

Используя (13) и (14), имеем

$$(V_t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,d\mu(x) \int_{[0,t]} f(s,x)\,ds +$$

$$+ a^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int_{[0,t]} f(s,x)\,ds \int_s^t du \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(u-s, x-y)\Delta_y\varphi(y)\,dy +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) d\nu(x) + a^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\nu(x) \int_0^t du \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(u, x-y)\Delta_y\varphi(y)\,dy.$$

Отсюда, используя лемму 5 и (11), ограниченность $\Delta_y\varphi$ и f, указанную непрерывность f, легко получаем

$$\frac{d}{dt}(V_t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\varphi(x)\,d\mu(x) +$$

$$+ a^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \frac{\partial}{\partial t} \int_{[0,t]} f(s,x)\,ds \int_s^t du \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(u-s, x-y)\Delta_y\varphi(y)\,dy +$$

$$+ a^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\nu(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t, x-y)\Delta_y\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(t,x)\varphi(x)\,d\mu(x) +$$

$$+ a^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\mu(x) \int_{[0,t]} f(s,x)\,ds \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t-s, x-y)\Delta_y\varphi(y)\,dy +$$

$$+ a^2 \int_{\mathbb{R}^d} d\nu(x) \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t, x-y)\Delta_y\varphi(y)\,dy,$$

что соответствует (9).

Теорема доказана.

Далее мы покажем, что решения уравнения, удовлетворяющие некоторому дополнительному условию, совпадают.

Теорема 2. *Пусть* $V^{(1)}$ *и* $V^{(2)}$ — *два таких решения задачи* (9), (10), *что для* $U = V^{(1)} - V^{(2)}$, *любого* $\varphi \in \mathcal{S}$ *и*

$$\psi_{t,s}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{E}(t-s, x-y)\varphi(y)\,dy, \quad 0 < s < t,$$

из условия

$$\frac{d}{ds}(U_s, \psi_{t,s}) = 0 \ \textit{п. н.}, \quad 0 < s < t,$$

следует

$$(U_s, \psi_{t,s}) = \mathrm{p}\lim_{s\to+0}(U_s, \psi_{t,s}) \ \text{п. н.}, \quad 0 < s < t.$$

Тогда для всех $\varphi \in \mathcal{S}$ *будет*

$$\left(V_t^{(1)}, \varphi\right) = \left(V_t^{(2)}, \varphi\right) \ \text{п. н.}$$

Доказательство. Для данной функции U

$$\frac{d}{dt}(U_t, \varphi) = a^2 (U_t, \Delta_x \varphi), \quad t > 0, \tag{15}$$

$$\mathrm{p}\lim_{t\to+0}(U_t, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{16}$$

Имеем $\psi_{t,s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, поскольку по переменным (x, y) $\mathcal{E}(t-s, x-y)\,\varphi(y) \in \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$. Элементарными вычислениями с учетом (12) получаем

$$a^2 \Delta_x \psi_{t,s} + \frac{\partial \psi_{t,s}}{\partial s} = 0. \tag{17}$$

Используя лемму 2, (15) и (17), имеем

$$\frac{d}{ds}(U_s, \psi_{t,s}) = \left(\frac{\partial U_s}{\partial s}, \psi_{t,s}\right) + \left(U_s, \frac{\partial \psi_{t,s}}{\partial s}\right) =$$

$$= a^2 (U_s, \Delta_x \psi_{t,s}) + \left(U_s, \frac{\partial \psi_{t,s}}{\partial s}\right) = \left(U_s, a^2 \Delta_x \psi_{t,s} + \frac{\partial \psi_{t,s}}{\partial s}\right) = 0.$$

Согласно условию, наложенному в теореме на U, для всех $0 < s < t$

$$(U_s, \psi_{t,s}) = \mathrm{p}\lim_{s\to+0}(U_s, \psi_{t,s}) = 0 \ \text{п. н.}$$

Далее, устремляя $t \to s + 0$, из (11) получаем сходимость $\psi_{t,s} \to \varphi$ в $\mathcal{S}$, и для произвольной $\varphi \in \mathcal{S}$ имеем $(U_s, \varphi) = 0$ п. н.

Теорема доказана.

Выбор пространства $\mathcal{S}$ в качестве основных функций в данном пункте был обусловлен возможностью доказательства совпадения решений именно в $\mathcal{S}_r'$.

Полученные в [15] (гл. 1) предельные теоремы для интегралов дают возможность записывать условия непрерывной зависимости по вероятности полученного решения (14) от f, μ, ν. Приведем такие утверждения.

***Следствие* 1.** *Пусть* $f^{(n)}(t, x)$: $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, — *ограниченные измеримые функции, непрерывные по* t *при каждом фиксированном* $x \in \mathbb{R}^d$, *для некоторой интегрируемой по* μ *функции* g: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *будет* $\left|f^{(n)}(t, x)\right| \leq \leq g(x)$ *и*

$$\forall t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d: \quad f^{(n)}(t, x) \to f(t, x), \quad n \to \infty.$$

Пусть $V^{(n)}$ — *решение* (14) *задачи* (9), (10) *при* $f = f^{(n)}$. *Тогда*

$$\forall t > 0, \quad \varphi \in \mathcal{S}: \quad \left(V_t^{(n)}, \varphi\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} (V_t, \varphi), \quad n \to \infty,$$

где (V_t, φ) *определяется равенством* (14).

Доказательство. Утверждение следует непосредственно из аналога теоремы Лебега [15] (следствие 1.2).

***Следствие* 2.** *Пусть* $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$, $n \geq 1$, — *случайные меры, для некоторого* $c > 0$ *будет* $|f(t, x)| \leq c$ *и*

$$\forall A \in \mathcal{B}: \quad \mu^{(n)}(A) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mu(A), \qquad \nu^{(n)}(A) \xrightarrow{\mathsf{P}} \nu(A), \quad n \to \infty,$$

$$\sup_n \left|\mu^{(n)}(A)\right| < +\infty \ \text{п. н.}, \qquad \sup_n \left|\nu^{(n)}(A)\right| < +\infty \ \text{п. н.}$$

Пусть $V^{(n)}$ *— решение* (14) *задачи* (9), (10) *при* $\mu = \mu^{(n)}$, $\nu = \nu^{(n)}$. *Тогда*

$$\forall t > 0, \quad \varphi \in \mathcal{S}: \quad \left(V_t^{(n)}, \varphi\right) \xrightarrow{\mathsf{P}} (V_t, \varphi), \quad n \to \infty,$$

где (V_t, φ) *определяется равенством* (14).

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из следствия 1.5 [15], равномерная интегрируемость по $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$, $n \ge 1$, в смысле определения 1.8 [15] — из ограниченности соответствующих функций. (Также можно использовать следствие 1 [20].)

5. Решение волнового уравнения со случайной мерой в правой части (случай $d = 1$). В данном пункте рассматривается размерность $d = 1$, остаются в силе условия на a и f из п. 4. Пусть μ^σ, ζ^σ и ν^σ — σ-конечные случайные меры. Рассматриваем задачу Коши (2) относительно неизвестного процесса $(V_t)_{t>0}$, который для каждого t принимает значения в множестве $\mathcal{D}_r' = \mathcal{D}_r'(\mathbb{R}^d)$. Здесь о. с. ф. $\dot{\nu}^\sigma$ и $\dot{\zeta}^\sigma$ определяются по правилу (4), $f\dot{\mu}^\sigma$ — по (3) с заменой μ на μ^σ.

Уравнение (2) для неизвестного V принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2}(V_t, \varphi) = a^2\left(V_t, \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) + \int_{\mathbb{R}} f(t, x)\varphi(x)\, d\mu^\sigma(x), \quad t > 0, \tag{18}$$

$$\operatorname{p}\lim_{t \to +0} \frac{d}{dt}(V_t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\zeta^\sigma(x), \tag{19}$$

$$\operatorname{p}\lim_{t \to +0} (V_t, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, d\nu^\sigma(x), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{20}$$

Производные по t здесь также рассматриваются в смысле (5).

Теорема 3. *Процесс* $(V_t)_{t>0}$ *со значениями в* $\mathcal{D}_r'$, *заданный равенством*

$$(V_t, \varphi) = \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}} d\mu^\sigma(x) \int_{|0,t|} f(s, x)\, ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \varphi(u)\, du +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{\mathbb{R}} d\zeta^\sigma(x) \int_{x-at}^{x+at} \varphi(u)\, du + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\varphi(x + at) +$$

$$+ \varphi(x - at))\, d\nu^\sigma(x), \quad t > 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{21}$$

будет решением задачи (18) – (20).

Доказательство. Выполнение (18) – (20) для (21) проверяется непосредственной подстановкой с использованием аналога теоремы Лебега, леммы 5, ограниченности f и финитности φ.

Далее мы снова покажем, что решения уравнения, удовлетворяющие некоторому дополнительному условию, совпадают.

Теорема 4. *Пусть* $V^{(1)}$ *и* $V^{(2)}$ *— два таких решения задачи* (18) – (20), *что для* $U = V^{(1)} - V^{(2)}$, *любой* $\varphi \in \mathcal{D}$ *и*

$$\phi_{t,s}(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \varphi(u)\,du, \quad 0 < s < t,$$

из условия

$$\frac{d}{ds}\left\{\left(U_s, \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial U_s}{\partial s}, \phi_{t,s}\right)\right\} = 0 \ \textit{п. н.}, \quad 0 < s < t,$$

следует

$$\left(U_s, \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial U_s}{\partial s}, \phi_{t,s}\right) = \mathrm{p}\lim_{s\to+0}\left\{\left(U_s, \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial U_s}{\partial s}, \phi_{t,s}\right)\right\}.$$

Тогда для всех $\varphi \in \mathcal{D}$ *будет*

$$\left(V_t^{(1)}, \varphi\right) = \left(V_t^{(2)}, \varphi\right) \ \textit{п. н.}$$

Доказательство. Указанный процесс U удовлетворяет условиям

$$\frac{d^2}{dt^2}(U_t, \varphi) = a^2\left(U_t, \frac{d^2\varphi}{dx^2}\right), \quad t > 0, \tag{22}$$

$$\mathrm{p}\lim_{t\to+0}\frac{d}{dt}(U_t, \varphi) = 0, \qquad \mathrm{p}\lim_{t\to+0}(U_t, \varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}. \tag{23}$$

По переменной x будет $\phi_{t,s} \in \mathcal{D}$ и

$$\frac{\partial^2\phi_{t,s}}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2\phi_{t,s}}{\partial x^2}, \quad \phi_{t,s} \to 0, \qquad \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s} \to (-\varphi) \ \text{ в } \ \mathcal{D}, \quad t \to s + 0.$$

Используя лемму 4 и (22), имеем

$$\frac{d}{ds}\left\{\left(U_s, \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial U_s}{\partial s}, \phi_{t,s}\right)\right\} = 0 \ \text{п. н.}, \quad 0 < s < t.$$

Из условия теоремы получаем

$$\left(U_s, \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial U_s}{\partial s}, \phi_{t,s}\right) = \mathrm{p}\lim_{s\to+0}\left\{\left(U_s, \frac{\partial\phi_{t,s}}{\partial s}\right) - \left(\frac{\partial U_s}{\partial s}, \phi_{t,s}\right)\right\} = 0.$$

Далее, устремляя здесь $t \to s + 0$, имеем $(U_s, \varphi) = 0$, что и дает совпадение решений.

Теорема доказана.

Теоремы 2.3 и 2.5 [15] дают возможность записывать условия непрерывной зависимости по вероятности решения (21) от f, μ^σ, ζ^σ, ν^σ.

Легко видеть, что в случае, когда μ^σ, ζ^σ и ν^σ будут случайными мерами на $\mathcal{B}$, процесс $(V_t)_{t>0}$, заданный равенством (21), определен для всех $\varphi \in \mathcal{S}$ и для каждого $t > 0$ будет о. с. ф. м. р. Повторяя доказательства теорем 3 и 4 с заменой $\mathcal{D}$ на $\mathcal{S}$, можно показать, что такой процесс $(V_t)_{t>0}$ удовлетворяет равенствам (18) – (20) для всех $\varphi \in \mathcal{S}$, и мы будем иметь совпадение решений данной задачи при указанных выше условиях.

1. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения глазами физика. – М.: Физматлит, 2001. – 528 с.
2. *Sturm A.* On convergence of population processes in random enviroments to the stochastic heat equation with colored noise // Electron. J. Probab. – 2003. – **8**, № 6. – P. 1 – 39.
3. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Обобщенные функции // Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. – М.: Физматгиз, 1961. – Вып. 4. – 472 с.

4. *Pardoux E.* Stochastic partial differential equations. A review // Bull. sci. math. Sér. 2^e. – 1993. – **117**. – P. 29 – 47.
5. *Розовский Б. Л.* Эволюционные стохастические системы. – М.: Наука, 1983. – 208 с.
6. *Kim K.-H.* Stochastic partial differential equations with variable coefficients in C^1 domains // Stochast. Process. and Appl. – 2004. – **112**. – P. 261 – 283.
7. *Walsh J. B.* An introduction to stochastic partial differential equations // Lect. Notes Math. – 1984. – **1180**. – P. 236 – 434.
8. *Dalang R. C.* Extending martingale measure stochastic integral with applications to spatially homogeneous SPDE's // Electron. J. Probab. – 1999. – **4**, № 6. – P. 1 – 29.
9. *Dalang R. C., Mueller C.* Some non-linear S.P.D.E.'s that are second order in time // Ibid. – 2003. – **8**, № 1. – P. 1 – 21.
10. *Conus D., Dalang R. C.* The non-linear stochastic wave equation in high dimensions // Ibid. – 2008. – **13**, № 22. – P. 629 – 670.
11. *Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T.* Stochastic partial differential equations. A modelling, white noise functional approach. – Boston: Birkhäuser, 1996. – 230 p.
12. *Розанов Ю. А.* Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. – М.: Физматлит, 1995. – 252 с.
13. *Memin J., Mishura Yu., Valkeila E.* Inequalities for the moments of Wiener integrals with respect to a fractional Brownian motion // Statist. Probab. Lett. – 2001. – **51**. – P. 197 – 206.
14. *Kwapień S., Woyczński W. A.* Random series and stochastic integrals: single and multiple. – Boston: Birkhäuser, 1992. – 360 p.
15. *Радченко В. Н.* Интегралы по общим случайным мерам // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 1999. – **27**. – 196 с.
16. *Радченко В. Н.* Интегралы по случайным мерам и случайные линейные функционалы // Теория вероятностей и ее применения. – 1991. – **36**, № 3. – С. 594 – 596.
17. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 512 с.
18. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 382 с.
19. *Иосида К.* Функциональный анализ: Пер. с англ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
20. *Радченко В. Н.* О сходимости интегралов по L_0-значным мерам // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 5. – С. 102 – 106.

Получено 17.05.07,
после доработки – 22.05.08