УДК 512.54

Е. Н. Яковлева (Лесосиб. пед. ин-т — фил. Сиб. федерал. ун-та, Россия)

РАЗРЕШИМЫЕ ПОДГРУППЫ В ГРУППАХ С САМОНОРМАЛИЗУЕМОЙ ПОДГРУППОЙ*

The construction of some soluble finite subgroups in groups with self-normalizing subgroup is studied.

Вивчається будова деяких розв'язних скінченних підгруп у групах із самонормалізовною підгрупою.

Исследования групп с заданными свойствами для системы подгрупп составляют одно из основных направлений в общей теории групп.

В данной работе изучается строение разрешимых конечных подгрупп, содержащих фиксированный элемент простого нечетного порядка, в группах с самонормализуемой подгруппой.

Группы с самонормализуемыми подгруппами часто встречаются в работах В. П. Шункова и его учеников (см. [1, 2]). Частным случаем таких групп являются бесконечные группы Фробениуса. Поэтому была поставлена задача получить информацию о строении разрешимых подгрупп вида $T \leftthreetimes (a)$, которые являются основным инструментом изучения групп с самонормализуемыми подгруппами.

Теорема. *Пусть G — группа, H — ее подгруппа, имеющая конечную периодическую часть, $N_G(H) = H$, a — элемент простого порядка $p \neq 2$ из H и нормализатор любой нетривиальной (a)-инвариантной конечной подгруппы из H содержится в H.*

Тогда любая конечная разрешимая подгруппа K вида $T \leftthreetimes (a)$ из G, содержащая a и не принадлежащая H, имеет вид $K = L(K) \leftthreetimes (M((b) \leftthreetimes (f)))$, где $L(K)$ — нильпотентный радикал группы K, M — силовская 2-подгруппа из K.

Для доказательства теоремы предварительно докажем ряд лемм.

Пусть G — группа, H, K — ее подгруппы, a — элемент из H, удовлетворяющие условиям теоремы, $\overline{K} = K / L(K)$, $L(\overline{K})$ — нильпотентный радикал группы $\overline{K}$. Группа имеет конечную периодическую часть, если множество всех ее элементов конечного порядка образует конечную подгруппу.

Лемма 1. *Пересечение $L(K) \bigcap H$ тривиально.*

Доказательство. Нильпотентный радикал $L(K)$ группы K не содержится в подгруппе H, иначе в силу того, что $L(K)$ — (a)-инвариантная подгруппа из H, по условию теоремы получаем $K < H$, а это противоречит тому, что подгруппа K не принадлежит H.

Предположим, что $D = L(K) \bigcap H \neq 1$. Очевидно, D — (a)-инвариантная подгруппа и согласно доказанному выше $D \neq L(K)$. Поскольку $L(K)$ — нильпотентная группа, в силу нормализаторного условия в нильпотентных группах каждая ее собственная подгруппа отлична от своего нормализатора. Тогда, так как по условию теоремы $N_{L(K)}(D) < H$, получаем, что H пересекается с $L(K)$ по подгруппе большей, чем группа D. Пришли к противоречию. Следовательно, $L(K) \bigcap H = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Группа $L(K) \leftthreetimes (a)$ является группой Фробениуса.*

Доказательство. Предположим, что в $L(K)$ существует неединичный

---

* Поддержана грантом РФФИ N05-01-00576.

элемент $k \in C_G(a)$. Тогда $k \in N_G((a))$ и по условию теоремы $N_G((a)) < H$. Отсюда $k \in H$, что противоречит лемме 1. Значит, элемент a действует на $L(K)$ регулярно.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если V — (a)-инвариантная q-подгруппа из K и в ней существует нетривиальный элемент t из $C_K(a)$, то q не делит порядок группы $L(K)$.*

Доказательство. Возьмем (a)-инвариантную q-подгруппу V из K. Предположим, что порядок $L(K)$ делится на q. Обозначим $Q = V \cdot U$, где U — силовская подгруппа из $L(K)$. Группа U нормальна в Q. Поскольку нормальная подгруппа нетривиально пересекается с центром, то $N = U \bigcap Z(Q) \neq$ $\neq 1$. Из того, что V и $L(K)$ являются (a)-инвариантными подгруппами, легко видеть, что N также является (a)-инвариантной подгруппой.

По условию леммы в Q существует нетривиальный элемент t из $C_K(a)$, и так как $N < Z(Q)$, то $N < N_K((t))$. Согласно условию теоремы $C_K(a) < H$, следовательно, $t \in H$, и так как t — (a)-инвариантная подгруппа, по условию теоремы $N_K((t)) < H$. Следовательно, $N < H$, а так как $N < L(K)$, то $L(K) \bigcap H \neq 1$, что противоречит лемме 1. Значит, q не делит порядок $L(K)$.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если в нильпотентном радикале $L(\overline{K})$ группы $\overline{K}$ силовская 2-подгруппа $\overline{S}$ нетривиальна, то ее центр $Z(\overline{S})$ является циклическим и порядок группы $L(K)$ нечетен.*

Доказательство. Пусть $\overline{S} \neq 1$ — силовская 2-подгруппа из $L(\overline{K})$. Предположим, что порядок группы $L(K)$ четен. Если $(\overline{a})$ действует регулярно на $\overline{S}$, то по лемме 2 (a) действует на полном прообразе S группы $\overline{S}$ тоже регулярно. Следовательно, согласно теореме Хигмана – Томпсона [3, 4] S — нильпотентная группа. Поскольку $\overline{S}$ — нормальная подгруппа в $\overline{K}$, то $S \lhd K$. Таким образом, S — нильпотентная нормальная подгруппа в K, строго содержащая $L(K)$. Получили противоречие с тем, что $L(K)$ — нильпотентный радикал группы K. Значит, $(\overline{a})$ централизует некоторый неединичный элемент в $\overline{S}$.

Вернемся к полным прообразам. В подгруппе S найдется инволюция i, которая централизует элемент a. Тогда i централизует нетривиальный элемент m из силовской 2-подгруппы в $L(K)$ [5]. Поскольку $a \in C_k(i)$ и по условию теоремы нормализатор любой нетривиальной (a)-инвариантной конечной подгруппы из H содержится в H, то $C_k(i) < H$. Вследствие того, что $m \in C_k(i)$, получаем $L(K) \bigcap H \neq 1$, что противоречит лемме 1. Значит, порядок $L(K)$ нечетен.

Докажем, что центр $Z(\overline{S})$ силовской 2-подгруппы $\overline{S}$ из $L(\overline{K})$ является циклическим. Предположим, что это не так. Обозначим через $\overline{R}$ нижний слой центра $Z(\overline{S})$. Он, очевидно, $(\overline{a})$-инвариантен. Если $(\overline{a})$ действует на $\overline{R}$ регулярно, то возвращаемся к полному прообразу R группы $\overline{R}$. Он содержит $L(K)$. Поскольку по лемме 2 (a) действует на $L(K)$ регулярно, то согласно теореме Хигмана – Томпсона [3, 4] R — нильпотентная группа. Далее, так как $\overline{R}$ — характеристическая подгруппа в нильпотентном радикале $L(\overline{K})$ группы $\overline{K}$, то $\overline{R} \rhd \overline{K}$. Тогда R является нильпотентной нормальной подгруппой из K, строго содержащей подгруппу $L(K)$. Получили противоречие с тем, что $L(K)$ – нильпотентный радикал группы K. Следовательно, $(\overline{a})$ централизует нетривиальный элемент t в $\overline{R}$. Тогда по теореме Машке существует $(\overline{a})$-инвариантное дополнение $\overline{V}$ к группе $(t) = T$ такое, что $\overline{R} = \overline{V} \times \overline{T}$.

Пусть подгруппа $\overline{V}$ не является циклической. Как и в случае группы $\overline{R}$, получим $\overline{V} = \overline{V}_1 \times \overline{T}_1$, где $\overline{T}_1$ — циклическая подгруппа из $C_{\overline{K}}(\overline{a})$. Таким образом, $\overline{R} = \overline{V}_1 \times \overline{T}_1 \times \overline{T}$ и $\overline{T}_1 \times \overline{T} < C_{\overline{K}}(\overline{a})$. Отсюда с учетом того, что порядок $L(K)$ нечетен, переходя к прообразам, можно найти $(\overline{a})$-инвариантную элементарную абелеву 2-подгруппу A из $C_K(a)$ и, значит, из H. Тогда согласно теореме Бернсайда [6] некоторая инволюция из группы A прообраза группы $\overline{T}_1 \times \overline{T}$ централизует нетривиальный элемент в $L(K)$. Получаем $L(K) \cap H \neq \neq 1$, что противоречит лемме 1. Следовательно, $\overline{V}$ — циклическая группа.

Поскольку $\overline{V}$ — (a)-инвариантная группа порядка 2, то $\overline{V} < C_{\overline{K}}(\overline{a})$ и $\overline{V} \times \overline{T}$ — элементарная абелева 2-группа из $C_{\overline{K}}(\overline{a})$. Рассуждая, как и в случае подгруппы $\overline{T}_1 \times \overline{T}$, снова получаем противоречие. Следовательно, нижний слой $\overline{R}$ является циклическим, а значит, центр $Z(\overline{S})$ также циклический.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если в нильпотентном радикале $L(\overline{K})$ группы $\overline{K}$ силовская 2-подгруппа $\overline{S}$ нетривиальна, то все силовские q-подгруппы, $q \neq 2$, из $\overline{K}$ циклические.*

Доказательство. Пусть Q — (a)-инвариантная q-подгруппа из K, где q нечетно. Согласно лемме 3 порядок $L(K)$ не делится на q. Рассмотрим группу $D = L(K) \leftthreetimes Q \leftthreetimes (a)$, где Q — q-подгруппа, являющаяся (a)-инвариантным прообразом группы $\overline{Q}$. Поскольку (a) действует на $L(K)$ регулярно и $C_D(L(K)) < L(K)$, по лемме Подуфалова [7] $Q \times (a)$. Если Q — нециклическая группа, то в ней существует элементарная абелева q-подгруппа A порядка q^2. Она централизуется элементом a. Тогда по теореме Бернсайда [6] неединичный элемент $k \in A$ централизует нетривиальный элемент в $L(K)$. С учетом того, что $A < C_K(a)$ и $C_K(a) < H$, $a \in C_K(a)$, получаем $L(K) \cap H \neq 1$, что противоречит лемме 1. Значит, Q — циклическая группа.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если в нильпотентном радикале $L(\overline{K})$ силовская 2-подгруппа тривиальна, то все силовские q-подгруппы из $L(\overline{K})$ циклические.*

Доказательство. Пусть $\overline{Q}$ — силовская q-подгруппа из $L(\overline{K})$ и $q \neq 2$, p. Тогда $C_{\overline{K}}(\overline{a}) \cap \overline{Q} \neq 1$. Действительно, если это не так, то $(\overline{a})$ действует на $\overline{Q}$ регулярно. Тогда (a) действует регулярно на полном прообразе Q, так как a действует регулярно на $L(K)$ и по лемме 3 порядок $L(K)$ не делится на q. По теореме Томпсона Q — нильпотентная группа. Поскольку $\overline{Q} \lhd \overline{K}$, то $Q \lhd K$. Получили противоречие с тем, что $L(K)$ — нильпотентный радикал группы K. Значит, $C_{\overline{K}}(\overline{a}) \cap \overline{Q} \neq 1$.

Теперь возьмем прообраз Q группы $\overline{Q}$ и рассмотрим группу $L(K) \leftthreetimes Q \leftthreetimes (a)$. Поскольку (a) действует на $L(K)$ регулярно и порядок $L(K)$ не делится на q, то по лемме Подуфалова $Q \times (a)$. Если Q — нециклическая, то, так как $q \neq 2$, в ней существует элементарная абелева q-подгруппа D порядка q^2 [8]. Как доказано выше, элемент a централизует D. По теореме Бернсайда [6] неединичный элемент $d \in D$ централизует нетривиальный элемент в $L(K)$, но a поэлементно перестановочен с D. Следовательно, $L(K) \cap H \neq 1$. Пришли к противоречию с леммой 1. Значит, Q — циклическая группа.

Рассмотрим случай, когда $q = p$. Возьмем прообраз Q группы $\overline{Q}$ и рассмотрим группу $L(K)\leftthreetimes Q$. Если Q нециклическая, то в ней найдется элементарная абелева p-подгруппа A порядка p^2. По теореме Бернсайда неединичный элемент $k \in A$ централизует нетривиальный элемент в $L(K)$. Поскольку $A < C_K(a)$ и $C_K(a) < H$, $a \in C_K(a)$, то $L(K) \bigcap H \neq 1$, что противоречит лемме 1. Значит, Q — циклическая группа.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Порядок группы* $L(\overline{K}) = L(K / L(K))$ *взаимно прост с порядком группы* $L(K)$.

Доказательство. Пусть q — делитель порядков групп $L(K)$ и $L(\overline{K})$. В нильпотентном радикале $L(\overline{K})$ возьмем максимальную q-подгруппу $\overline{Q}$, которая нормальна в $\overline{K}$. Перейдем к прообразам и рассмотрим группу $(L(K)\cdot Q)\leftthreetimes(a)$, где в качестве прообраза группы $\overline{Q}$ использована (a)-инвариантная q-подгруппа Q, содержащая силовскую q-подгруппу из $L(K)$. Если бы (a) действовала на Q регулярно, то по теореме Хигмана – Томпсона $L(K)\cdot Q$ была бы нильпотентной группой. Поскольку $L(K)\cdot Q$ нормальна, получаем противоречие с тем, что $L(K)$ — нильпотентный радикал. Значит, (a) централизует некоторый нетривиальный элемент $b \in Q$ и, следовательно, $C_K(b) < H$. По предположению $L = L(K) \bigcap Q \neq 1$. Так как $L \lhd Q$, по свойствам конечных примарных подгрупп существует нетривиальный элемент l такой, что $l \in Z(Q) \bigcap L$, значит, $l \in C_K(b) < H$. Следовательно, $L(K) \bigcap H \neq$ $\neq 1$, что противоречит лемме 1. Значит, q не делит порядок $L(K)$.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Если в нильпотентном радикале* $L(\overline{K})$ *силовская* 2*-подгруппа тривиальна, то все силовские* q*-подгруппы из* $\overline{K}$ *циклические и* $(\overline{a}) \in L(\overline{K})$.

Доказательство. Пусть $\overline{Q}$ — силовская q-подгруппа из $\overline{K}$. Предположим, что $\overline{Q}$ не является циклической.

Пусть группа $(\overline{a})$ неперестановочна с силовской p'-подгруппой $\overline{S}_a$ из $L(\overline{K})$. Рассмотрим группу $\overline{S}_a \leftthreetimes (\overline{a})$. Она является группой Фробениуса, так как $\overline{S}_a$ — циклическая группа. Возвращаясь к прообразам, получаем, что группа $\overline{S}_a \leftthreetimes (\overline{a})$ — группа Фробениуса, так как (a) действует регулярно на $L(K)$, а по лемме 7 порядок группы S_a взаимно прост с порядком группы $L(K)$. Группа S_a нильпотентна и нормальна, что противоречит определению нильпотентного радикала $L(K)$. Если в $L(\overline{K})$ есть p-подгруппа P и она не циклическая, то в ней содержится элементарная абелева p-подгруппа порядка p^2, содержащая элемент a. Применяя теорему Бернсайда [6], получаем $L(K) \bigcap$ $\bigcap H \neq 1$, что противоречит лемме 1. Таким образом, $(\overline{a})$ перестановочна со всеми силовскими подгруппами из $L(\overline{K})$, т. е. $(\overline{a}) \in L(\overline{K})$.

Нетривиальный элемент $k \in \overline{Q}$ централизует $(\overline{a})$. Действительно, учитывая строение группы $K = T\leftthreetimes(a)$, согласно лемме Фраттини [5], группу $\overline{Q}$ можно взять $(\overline{a})$-инвариантной. Если $\overline{Q}$ — $2'$-группа, то ее прообраз — силовская примарная $2'$-подгруппа Q — нециклическая, и в ней найдется элементарная абелева q-подгруппа A порядка p^2, в которой по теореме Бернсайда найдется нетривиальный элемент, который централизует (a). Пусть $\overline{Q}$ — 2-группа. Из строения группы $\overline{a} \leftthreetimes \overline{Q}$ следует, что если любой элемент из $\overline{Q}$ действует регулярно на $(\overline{a})$, то $\overline{Q}$ вкладывается в группу автоморфизмов циклической группы. Пришли к противоречию.

Следовательно, по лемме 3 q не делит порядок $L(K)$.

Теперь возьмем прообраз Q группы $\overline{Q}$ и рассмотрим группу $L(K)\leftthreetimes Q \leftthreetimes$

$\leftthreetimes (a)$. Поскольку по лемме 2 (a) действует на $L(K)$ регулярно и с учетом строения группы K также регулярно действует на Q, по лемме Подуфалова $Q \times (a)$. Если Q — нециклическая, то с учетом того, что $q \neq 2$, в ней существует элементарная абелева q-подгруппа D порядка q^2. Она централизует элемент a. По теореме Бернсайда $1 \neq d \in D$ централизует нетривиальный элемент в $L(K)$, но элемент a перестановочен с D. Следовательно, $L(K) \cap \cap H \neq 1$, что противоречит лемме 1. Значит, Q — циклическая группа.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\overline{S}$ — силовская 2-подгруппа из $L(\overline{K})$, $\overline{M}$ — силовская 2-подгруппа из $\overline{K}$.

Возможны три случая:

1) $\overline{M} \cap L(\overline{K}) = 1$, т. е. $\overline{S} = \overline{1}$;

2) $\overline{M} < L(\overline{K})$, т. е. $\overline{M} = \overline{S}$;

3) $\overline{M}$ не является подгруппой $L(\overline{K})$, но $\overline{M} \cap L(\overline{K}) \neq 1$.

Докажем теорему для этих случаев.

Пусть $\overline{S} = \overline{1}$. По лемме 8 силовские q-подгруппы из $\overline{K}$ являются циклическими. Согласно теореме [8] группа $\overline{K}$ метациклическая. Переходя к прообразам, получаем $K = L(K) \leftthreetimes (b) \leftthreetimes (f)$, причем по лемме 8 $a \in (b)$.

Если силовская 2-подгруппа $\overline{M}$ из $\overline{K}$ содержится в $L(\overline{K})$, т. е. совпадает с $\overline{S}$, то по лемме 5 все силовские q-подгруппы, $q \neq 2$, из $\overline{K}$ циклические. Поскольку фактор-группа $\overline{K} / \overline{S}$ — $2'$-группа, она является метациклической. Теперь переходим к прообразам. В качестве прообраза группы $\overline{M}$ в группе K возьмем силовскую 2-подгруппу M. Получаем $K = L(K) \leftthreetimes \big(M \cdot ((b) \leftthreetimes (f))\big)$, где $(b) \leftthreetimes (f)$ — 2-группа. По лемме 4 центр $Z(\overline{M})$ силовской 2-подгруппы $\overline{M}$ из нильпотентного радикала $L(\overline{K})$ циклический. Вследствие того, что согласно лемме 4 порядок $L(K)$ нечетен, прообраз центра $Z(\overline{M})$ в подгруппе M также будет центром в M и притом циклическим.

Рассмотрим случай, когда подгруппа $\overline{S} \neq \overline{1}$, но M не является подгруппой $L(\overline{K})$. Рассмотрим фактор-группу $\overline{K} / \overline{S}$. Нильпотентный радикал $L(\overline{K} / \overline{S})$ — циклическая группа нечетного порядка. Предположим, что это не так. Пусть в $L(\overline{K} / \overline{S})$ есть 2-элементы, тогда в $\overline{K}$ есть силовская 2-подгруппа $Q > \overline{S}$. Тогда $Q \cdot L(\overline{K})$ — нильпотентная нормальная подгруппа. Противоречие с максимальностью $L(\overline{K})$. Цикличность силовских подгрупп из нильпотентного радикала $L(\overline{K} / \overline{S})$ устанавливается так же, как в лемме 8. Тогда нильпотентный радикал $L(\overline{K} / \overline{S})$ разлагается в прямое произведение силовских подгрупп нечетного порядка и $L(\overline{K} / \overline{S})$ — циклическая группа. Поскольку $L(\overline{K} / \overline{S})$ — нильпотентный радикал группы $\overline{K} / \overline{S}$, то $C_{\overline{K}/\overline{L}}(L(\overline{K} / \overline{S})) < L(\overline{K} / \overline{S})$. Фактор-группа $\overline{K} / (L(\overline{K} / \overline{S}))$ вкладывается в подгруппу группы автоморфизмов группы $L(\overline{K} / \overline{S})$. А так как группа автоморфизмов циклической группы также циклическая, то и фактор-группа $\overline{K} / (L(\overline{K} / \overline{S}))$ является циклической. Переходя к прообразам, получаем $K = L(K) \leftthreetimes (M \cdot ((b) \leftthreetimes (f)))$.

Теорема доказана.

В заключение приведем известные результаты, использованные в данной статье.

Теорема Хигмана – Томпсона [3, 4]. *Любая конечная группа, обладающая регулярным автоморфизмом простого порядка p, нильпотентна и длина ее верхнего центрального ряда ограничена числом, зависящим только от p.*

Лемма Подуфалова [7]. *Пусть конечная группа $G = Q \leftthreetimes (x)$, где Q — нормальная q-подгруппа, x — элемент порядка p, q и p — различные простые числа. Если группа G действует точно на неединичной конечной $\{p, q\}$-группе так, что элемент x действует регулярно, то либо G — нильпотентная группа, либо $q = 2$.*

Лемма Фраттини [5]. *Пусть A — нормальная подгруппа конечной группы G, P — ее силовская p-подгруппа. Тогда $G = A \cdot N_G(P)$.*

Теорема [8]. *Если силовские подгруппы конечной группы G порядка g все цикличны, то G — метациклическая группа, порожденная двумя элементами a и b с определяющими отношениями*

$$a^m = 1, \quad b^n = 1, \quad b^{-1}ab = a^r, \quad mn = g, \quad [(r-1), mn] = 1, \quad r^n \equiv 1 \pmod{m}.$$

Обратно, группа, заданная этими определяющими отношениями, обладает только циклическими силовскими подгруппами.

Теорема Бернсайда [6]. *Пусть G — конечная функция вида $G = B \leftthreetimes L$, где B — нетривиальная p-группа, L — элементарная абелева q-группа порядка q^2 и $p \neq q$. Тогда для некоторого элемента a порядка q пересечение $C_G(a) \bigcap B \neq 1$.*

1. *Созутов А. И.* О существовании в группе f-локальных подгрупп // Алгебра и логика. – 1997. – **36**, № 5. – С. 573 – 598.
2. *Созутов А. И., Шунков В. П.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. – 1976. – **100**, № 4. – С. 495 – 506.
3. *Higman G.* Groups and rings having automorphisms without nontrivial fixed points // J. London Math. Soc. – 1957. – **32**. – P. 321 – 334.
4. *Thompson J. G.* Finite groups with fixed point free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1959. – **45**. – P. 578 – 581.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – 3-е изд. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
7. *Подуфалов Н. Д.* Конечные простые группы без элементов порядков 6 и 10 // Алгебра и логика. – 1975. – **14**, № 1. – С. 79 – 85.
8. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.

Получено 19.07.07,
после доработки — 28.05.08