УДК 519.21

Р. В. Бойко

Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией в лимитирующей среде

Рассмотрим ветвящийся процесс с переменным режимом $\xi(t)$, описывающий развитие популяции, которая размножается так. Если в некоторый момент времени t существует k частиц, то каждая частица независимо от возраста и других частиц за малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ превращается в m частиц с вероятностью $\pi_m(k)\Delta t + o(\Delta t)$, $m = 0, 2, 3, \ldots$, и остается неизменной с вероятностью $1+\pi_1(k)\Delta t + o(\Delta t)$, при этом $\pi_m(k) = \pi_m$, если $m \leqslant N$, $\pi_m(k) = N\pi_m k^{-1}$, если $m > N$, где N — некоторое целое положительное число, $\pi_m > 0$, $m \neq 1$, $\pi_1 < 0$, $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \pi_m = 0$. Кроме того возможен приток частиц извне, управляемый случайным механизмом. Если в момент t существует k частиц, то за малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $\delta_m^0 + \omega_m(k)\Delta t + o(\Delta t)$, δ_m^k — символ Кронекера, возникает m частиц, которые в дальнейшем размножаются по описанной выше схеме.

В работе [1] давалась другая физическая интерпретация процесса $\xi(t)$, исходя из которой процесс $\xi(t)$ может быть назван ветвящимся процессом с иммиграцией в лимитирующей среде.

Будем предполагать, что $\omega_m(k) = \varepsilon_m$, и обозначим $w(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} z^m \varepsilon_m$, $\varphi(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} z^m \pi_m$.

Следуя работе [2], будем говорить, предполагая траектории процесса $\xi(t)$ непрерывными справа, что период жизни ветвящегося процесса с иммиграцией в лимитирующей среде $\xi(t)$ начинается в момент T и имеет длину τ, если число частиц $\xi(T-0) = 0$, $\xi(t) > 0$ для всех $T \leqslant t < T+\tau$, а $\xi(T+\tau) = 0$.

Пусть $T = 0$ — момент начала периода жизни процесса $\xi(t)$, т. е. $\xi(-0) = 0$. Рассмотрим вспомогательный процесс $\eta(t)$, отличающийся от процесса $\xi(t)$ только тем, что в процессе $\eta(t)$ иммиграция частиц возможна лишь тогда, когда $\eta(t) > 0$, т. е. $\omega_m = 0$, $\omega_m(k) = \varepsilon_m$, $k \neq 0$, и в начальный момент времени $\eta(0)$ имеет вероятностное распределение с производящей функцией

$$F(0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P\{\eta(0) = k\} = \varepsilon_0^{-1}(\varepsilon_0 - w(z)).$$

Наряду с процессом $\eta(t)$ рассмотрим процессы $\eta_m(t)$, $m = 1, 2, \ldots$, отличающиеся от процесса $\eta(t)$ лишь тем, что $\eta_m(0) = m$ с вероятностью 1. Из определения процессов $\eta(t)$, $\eta_m(t)$ следует

$$P\{\eta(t) = k\} = P_k(t) = -\varepsilon_0^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m P\{\eta_m(t) = k \mid \eta_m(0) = m\} =$$

$$= -\varepsilon_0^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m P_{mk}(t), \tag{1}$$

$$P\{\tau \geqslant t\} = 1 - P_0(t) = 1 + \varepsilon_0^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m P_{m0}(t). \tag{2}$$

Производящие функции $F_m(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_{mk}(t)$ переходных вероятностей $P_{mk}(t)$ процессов $\eta_m(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\partial/\partial t F_m(t, z) = z^{-1}(N\varphi(z) + zw(z)) F_m(t, z) - w(z) P_{m0}(t) + \\ + \varphi(z) \sum_{k=0}^{N-1} (k - N) z^{k-1} P_{mk}(t) \tag{3}$$

с начальными условиями $F_m(0, z) = z^m$. Отметим, что процессы типа $\eta_m(t)$ уже рассматривались в работах [1], [3], где получены формулы для преобразований Лапласа $\widetilde{P}_{mk}(s)$, $0 \leqslant m$, $k \leqslant N$, вероятностей $P_{mk}(t)$

$$\widetilde{P}_{mk}(s) = \widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{mk}(s) + s^2 \widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{Nk}(N, s) \sum_{r=N+1}^{\infty} \widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{mr}(N, s) \widetilde{P}^{\mathrm{I}}_{rN}(N, s) \Bigg(1 - \\ - s^2 \sum_{r=N+1}^{\infty} \widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{Nr}(N, s) \widetilde{P}^{\mathrm{I}}_{rN}(N, s)\Bigg)^{-1}, \tag{4}$$

где

$$\widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{mk}(N, s) = s^{-1} \sum_{r=1}^{N} (r\pi_{k+1-r} + \varepsilon_{k-r}) \widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{mr}(N, s), \quad 0 < m \leqslant N, \quad k > N, \tag{5}$$

$$\widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{rm}(N, s) = -A_{rm}(s) A^{-1}(s), \quad r, m \leqslant N; \quad \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}^{\mathrm{II}}_{mk}(N, s) = s^{-1}, \tag{6}$$

$A_{rm}(s)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{r+1, m+1}$ определителя

$$A(s) = \begin{vmatrix} -s & \pi_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \pi_1 + \varepsilon_0 - s & 2\pi_0 & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \pi_2 + \varepsilon_1 & 2\pi_1 + \varepsilon_0 - s & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & & N\pi_0 \\ 0 & \pi_N + \varepsilon_{N-1} & \cdot & \cdot & \cdot & & N\pi_1 + \varepsilon - s \end{vmatrix}$$

$$\widetilde{P}^{\mathrm{I}}_{kN}(N, s) = u^{k-N}(s)/s, \quad k > N, \tag{7}$$

где $u(s)$ — корень уравнения $sz = N\varphi(z) + zw(z)$, модуль которого меньше единицы при $s > 0$;

$$\lim_{s \to 0} u(s) = \rho, \tag{8}$$

где ρ — наименьший неотрицательный корень уравнения $N\varphi(z) + zw(z) = 0$, причем $\rho = 1$, когда $N\varphi'(1) + w'(1) \leqslant 0$, и $0 < \rho < 1$, когда $N\varphi'(1) + w'(1) > 0$,

$$\widetilde{P}^{\mathrm{I}}_{kN}(N, s) = \int_0^{\infty} \exp\{-st\} P^{\mathrm{I}}_{kN}(N, t)\, dt, \quad k > N,$$

где $P^{\mathrm{I}}_{kN}(N, t)$ — распределение момента первого достижения уровня N ветвящимся процессом с переменным режимом с производящей функцией интенсивностей размножения $\varphi_m(z)$, зависящей от количества частиц m в данный момент времени так: $\varphi_m(z) = m^{-1}(N\varphi(z) + zw(z))$, процесс находится в начальный момент времени в состоянии k.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi'(1) < \infty$, $w'(1) < \infty$, *тогда при* $N\varphi'(1) + w'(1) < 0$

$$\lim_{t\to\infty} P\{\tau < t\} = P\{\tau < \infty\} = 1; \tag{9}$$

при $N\varphi'(1) + w'(1) > 0$

$$\lim_{t\to\infty} P\{\tau < t\} = -\varepsilon_0^{-1}\left(\sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}(s) + \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{N0}(s)\,\rho^{-N} \sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon^m \rho^m = \alpha, \right. \tag{10}$$

где для $1 \leqslant m \leqslant N$

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}(s) = h_{m+1,0} - h_{N+1,1} \sum_{m=1}^{N} h_{m+1,n+1} \sum_{r=N+1}^{\infty} (n\pi_{r+1-n} + \varepsilon_{r-n})\,\rho^{r-N} \left(1 - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{N} h_{N+1,n+1} \sum_{r=N+1}^{\infty} (n\pi_{r+1-n} + \varepsilon_{r-n})\,\rho^{r-N}\right)^{-1}, \quad h_{m,n} = \lim_{s\to 0} A_{mn}(s)\, A_{11}^{-2}(s).$$

Математическое ожидание периода жизни τ процесса $\xi(t)$ при $N\varphi'(1) + w'(1) < 0$ конечно и дается формулой

$$M\tau = \pi_0 \varepsilon_0^{-1}\left(\sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m d/ds\tilde{P}_{m1}(0) + d/dsP_{N1}(0) \sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon_m + \right.$$

$$\left. + \tilde{P}_{N1}(0)\,(N\varphi'(1) + w'(1))^{-1} \sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon_m (m - N)\right), \tag{11}$$

где $d/ds\tilde{P}_m(0)$, $1 \leqslant m \leqslant N$, $\tilde{P}_{N0}(0)$ могут быть найдены из формул (4) — (7) при $N\varphi'(1) + w'(1) \geqslant 0$, $M\tau = \infty$.

Доказательство. Пусть $N\varphi'(1) + w'(1) \leqslant 0$. Из соотношений (1), (2) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} P\{\tau < t\} = -\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_0^{-1} \lim\limits_{s\to 0} \tilde{P}_{m0}(s)$, следовательно, утверждение (9) имеет место тогда, когда

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}(s) = 1, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Докажем соотношение (12). Из определения $\tilde{P}_{mk}^{\mathrm{II}}(N, s)$ следует, что при $k \neq 0$, $1 \leqslant m \leqslant N$

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{mk}^{\mathrm{II}}(N, s) = 0. \tag{13}$$

Далее, учитывая формулы (5) — (8), (13), имеем

$$\lim_{s\to 0} s^2 \sum_{r=N+1}^{\infty} \tilde{P}_{mr}^{\mathrm{II}}(N, s)\, \tilde{P}_{kN}^{\mathrm{I}}(N, s) = 1 - \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}^{\mathrm{II}}(N, s).$$

Из этого соотношения и из формулы (4) следует (12) для $0 < m \leqslant N$.

В силу сделанного выше замечания относительно $\tilde{P}_{kN}^{\mathrm{I}}(N, s)$, $k > N$ при $m > N$ $P_{m0}(t) = \int\limits_0^t P_{N0}(t - u)\, dP_{mN}^{\mathrm{I}}(N, u)$ или

$$\tilde{P}_{m0}(s) = s\tilde{P}_{N0}(s)\, \tilde{P}_{mN}^{\mathrm{I}}(N, s) = \tilde{P}_{N0}(s)\, u^{m-N}(s).$$

Поэтому, учитывая соотношение (8) и доказанное для $m \leqslant N$ соотношение (12), при $m > N$ имеем $\lim\limits_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}(s) = \lim\limits_{s\to 0} s\tilde{P}_{N0}(s)\, u^{m-N}(s) = 1$. Таким образом, соотношение (12) доказано для всех $m \geqslant 1$.

Рассмотрим случай, когда $N\varphi'(1)+w'(1)>0$. Так как

$$\lim_{t\to\infty} P\{\tau<t\} = -\sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m \varepsilon_0^{-1} \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}(s) - \varepsilon_0^{-1} \sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon_m u^{m-N}(s) \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{N0}(s)$$

и $\lim\limits_{s\to 0} u(s) = \rho < 1$, то

$$\lim_{t\to\infty} P\{\tau<t\} = -\sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m \varepsilon_0^{-1} \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}(s) - \lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{N0}(s)\, \varepsilon_0^{-1} \rho^{-N} \sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon^m \rho^m. \quad (14)$$

Далее, согласно формулам (4) — (6) при $m \leqslant N$

$$\lim_{s\to 0} s\tilde{P}_{m0}(s) = h_{m+1,1} - h_{N+1,1} \sum_{n=1}^{N} h_{m+1,n+1} \sum_{r=N+1}^{\infty} (n\pi_{r+1-n} + \varepsilon_{r-n})\, \rho^{r-N} \Bigg(1 + \\ + \sum_{n=1}^{N} h_{N+1,n+1} \sum_{r=n+1}^{\infty} (n\pi_{r+1-n} + \varepsilon_{r-n})\, \rho^{r-N}\Bigg)^{-},$$

что вместе с (14) доказывает формулу (10). Перейдем к доказательству формулы (11). Из соотношений (1), (2) получаем

$$M\tau = \int_0^\infty u\,dP\{\tau<u\} = -\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_0^{-1} \int_0^\infty u P'_{m0}(u)\,du =$$

$$= -\pi_0 \varepsilon_0^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \int_0^\infty u P_{m1}(u)\,du = \pi_0 \varepsilon_0^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \lim_{s\to 0} d/ds \tilde{P}_{m1}(s). \quad (15)$$

Так как при $m>N$ $P_{mk}(t) = \int\limits_0^t P_{Nk}(t-u)\,dP^{\mathrm{I}}_{mN}(u)$, $1 \leqslant k \leqslant N$, то

$$\tilde{P}_{mk}(s) = \tilde{P}_{Nk}(s)\, u^{m-N}(s), \quad (16)$$

поэтому

$$M\tau = \pi_0 \varepsilon_0^{-1} \Bigg(\sum_{m=1}^{N} \varepsilon_m d/ds \tilde{P}_{m0}(0) + d/ds \tilde{P}_{N1}(0) \sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon_m + \\ + \tilde{P}_{N1}(0)\, d/ds\, u(0) \sum_{m=N+1}^{\infty} \varepsilon_m (m-N)\Bigg). \quad (17)$$

Учитывая, что $u(s)$ — функция, обратная к функции $s = z^{-1}(N\varphi(z) + zw(z))$, получаем

$$d/ds\, u(0) = \begin{cases} (N\varphi'(1) + w'(1))^{-1} & \text{при } N\varphi'(1)+w'(1)<0, \\ \infty & \text{при } N\varphi'(1)+w'(1)=0. \end{cases} \quad (18)$$

Кроме того, используя явные формулы для $\tilde{P}_{m1}(s)$, $m \leqslant N$, с помощью простых, но громоздких выкладок убеждаемся в том, что при $\varphi'(1)<\infty$, $w'(1)<\infty$, $N\varphi'(1)+w'(1)<0$ конечны $d/ds\, P_{m1}(0)$, $1 \leqslant m \leqslant N$, $\tilde{P}_{N1}(0)$. Следовательно, $M\tau$ при $N\varphi'(1)+w'(1)<0$ конечно и согласно формулам (17), (18) имеет место представление (11). Неограниченность $M\tau$ при $N\varphi'(1)+w'(1)>0$ следует из формул (17), (18). Утверждение теоремы 1 о том, что $M\tau=\infty$ при $N\varphi'(1)+w'(1)>0$, вытекает из того, что в рассматриваемом случае согласно соотношению (10) случайная величина τ с положительной вероятностью равна бесконечности.

Займемся изучением поведения процесса $\xi(t)$ на периоде жизни. Из определения процесса $\eta(t)$ следует, что поведение процесса $\xi(t)$ на периоде жизни совпадает с поведением процесса $\eta(t)$ при условии его невырождения и $P\{\tau>t\} = P\{\eta(t)>0\}$.

Теорема 2. *Если* $\varphi''(1)<\infty$, $w''(1)<\infty$, $N\varphi'(1)+w'(1)>0$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\eta(t)/t<x\mid \tau>t\}=\begin{cases}0 & \text{при } x<N\varphi'(1)+w'(1),\\ 1 & \text{при } x\geqslant N\varphi'(1)+w'(1).\end{cases}$$

Доказательство. Покажем, что

$$\lim_{t\to\infty} M\{\exp\{-s\eta(t)/t\}\mid\tau>t\}=\exp\{-s(N\varphi'(1)+w'(1))\}. \tag{19}$$

Из соотношений (1), (3) следует, что функция $F(t,z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial/\partial t F(t,z)=z^{-1}(N\varphi(z)+zw(z))F(t,z)-w(z)P_0(t)+ + \sum_{k=0}^{N-1}(k-N)z^{k-1}\varphi(z)P_k(t) \tag{20}$$

с начальным условием $F(0,z)=\varepsilon_0^{-1}(\varepsilon_0-w(z))$.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что решение уравнения (20) представимо в виде

$$F(t,z)=\exp\{tf(z)\}\left(\varepsilon_0^{-1}(\varepsilon_0-w(z))-f(z)\int_0^t\exp\{-\tau f(z)\}P_0(\tau)\,d\tau+ + \varphi(z)\int_0^t\exp\{-\tau f(z)\}\sum_{k=1}^{N-1}(k-N)z^{k-1}P_k(\tau)\,d\tau\right), \tag{21}$$

где $f(z)=z^{-1}(N\varphi(z)+zw(z))$. Имеем

$$M\{\exp\{-s\eta(t)/t\}\mid\tau>t\}=(1-P_0(t))^{-1}(F(t,z_t)-P_0(t)), \tag{22}$$

где $z_t=\exp\{-s/t\}$. Проведя несложные преобразования, формулу (22) можно записать так:

$$M\{\exp\{-s\eta(t)/t\}\mid\tau>t\}=\exp\{tf(z_t)\}\left(\varepsilon_0^{-1}(\varepsilon_0-w(z_t))-\right. \left.-\int_0^t\exp\{-\tau f(z_t)\}P_0'(\tau)d\tau+\varphi(z_t)\int_0^t\exp\{-\tau f(z_t)\}\sum_{k=1}^{N-1}(k-N)z_t^{k-1}P_k(\tau)\,d\tau\right)\times \times(1-P_0(t))^{-1}. \tag{23}$$

При $t\to\infty$

$$\varphi(z_t)=-s\varphi'(1)t^{-1}+o(t^{-1});\quad w(z_t)=-sw'(1)t^{-1}+o(t^{-1}), \tag{24}$$

поэтому

$$\lim_{t\to\infty}\exp\{tf(z_t)\}=\exp\{-s(N\varphi'(1)+w'(1))\}, \tag{25}$$

$$\lim_{t\to\infty}\varepsilon_0^{-1}(\varepsilon_0-w(z_t))=1. \tag{26}$$

Используя теорему о среднем, получаем

$$\int_0^t\exp\{-\tau f(z_t)\}P_0'(\tau)\,d\tau=\exp\{-\tau_1 f(z_t)\}P_0(\sqrt{t})+ + \exp\{-\tau_2 f(z_t)\}(P_0(t)-P_0(\sqrt{t})), \tag{27}$$

где $0\leqslant\tau_1\leqslant\sqrt{t}$, $\sqrt{t}\leqslant\tau_2\leqslant t$. По теореме 1 $\lim_{t\to\infty}P_0(t)=\alpha$, кроме того в силу (25) при больших t

$$\exp\{-\tau_2 f(z_t)\}<\varepsilon, \tag{28}$$

где c — некоторая константа. Поэтому из (27) следует, что

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \exp\{-\tau f(z_t)\} P_0'(\tau)\,d\tau=\alpha. \tag{29}$$

Из простого анализа формул (4) — (6) получаем, что $\lim\limits_{s\to 0}\tilde{P}_{mn}(s)=c_{mn}$, $1\leqslant m,\ n\leqslant N$, где $c_{m,n}$ — некоторые константы. Поэтому из формулы (16) следует, что при $1\leqslant k\leqslant N,\ m\geqslant 1$ $\lim\limits_{t\to\infty}P_{mk}(t)=\lim\limits_{s\to 0}s\tilde{P}_{mk}(s)=0$. Значит,

$$\lim_{t\to\infty}P_k(t)=\lim_{t\to\infty}-\sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon_0^{-1}\varepsilon_m P_{mk}(t)=0. \tag{30}$$

Тогда в силу того, что $\varphi(z_t)=O(t^{-1})$ при $t\to\infty$, и соотношения (28) найдем

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(z_t)\int_0^t \exp\{-\tau f(z_t)\}\sum_{k=1}^{N-1} z_t^{k-1}(k-N)P_k(\tau)\,d\tau=0. \tag{31}$$

С помощью формул (25), (26), (29), (31) доказывается соотношение (19), эквивалентное утверждению теоремы 2.

Прежде чем рассматривать поведение процесса $\xi(t)$ на периоде жизни при $N\varphi'(1)+w'(1)=0$, изучим асимптотику распределения периода жизни τ.

Теорема 3. *Если $\varphi''(1)<\infty$, $w''(1)<\infty$, $N\varphi'(1)+w'(1)=0$, то при $t\to\infty$*

$$P\{\tau>t\}=-\left(\varepsilon_0^{-1}w'(1)+\varphi'(1)\sum_{k=1}^{N-1}\tilde{P}_k(0)\right)\sqrt{2}\,(\pi t\,(N\varphi''(1)+$$
$$+2w'(1)+w''(1)))^{-1/2}+o(t^{-1/2}).$$

Доказательство. Согласно теореме Руше, из формулы (21) следует, что

$$\int_0^\infty \exp\{-st\}P\{\tau>t\}\,dt=1/s-(s\varepsilon_0)^{-1}(\varepsilon_0-w(u_N(s)))-$$
$$-\varphi(u_N(s))/s\left(\sum_{k=1}^{N-1}(k-N)\,u_N^{k-1}(s)\,\tilde{P}_k(s)\right), \tag{32}$$

где $\tilde{P}_k(s)=\int\limits_0^\infty \exp\{-st\}P_k(t)\,dt$, $u_N(s)$ — корень уравнения $N\varphi(z)+$ $+zw(z)=0$, модуль которого меньше единицы при $s>0$. По теореме 4 из [4] при $s\to 0$ имеем $(1-u_N(s))/s=\sqrt{2}\,(s\,(N\varphi''(1)+2w'(1)+w''(1))^{-1/2}+$ $+o(s^{-1/2})$, кроме того при $z\to 1$ $w(z)=(z-1)\,w'(1)+o(z-1)$, $\varphi(z)=$ $=(z-1)\,\varphi'(1)+o(z-1)$. Далее, согласно формулам (1), (17) $\tilde{P}_k(s)=$ $=-\varepsilon_0^{-1}\left(\sum\limits_{m=1}^{N}\varepsilon_m\tilde{P}_{mk}(s)+\tilde{P}_{Nk}(s)\sum\limits_{m=N+1}^{\infty}\varepsilon_m u_N^{m-N}(s)\right)$, при этом, как отмечалось в теореме 1, величины $\tilde{P}_{mk}(0)$ для $1\leqslant m,\ k\leqslant N$ конечны и могут быть выписаны в явном виде с помощью формул (4) — (6). Поэтому, учитывая $u_N(0)=1$, получаем, что $\tilde{P}_k(0)=-\varepsilon_0^{-1}\left(\sum\limits_{m=1}^{N}\varepsilon_m\tilde{P}_{mk}(0)-\right.$ $\left.-\tilde{P}_{Nk}(0)\sum\limits_{m=N+1}^{\infty}\varepsilon_m\right)$. Следовательно, при $s\to 0$

$$\int_0^\infty \exp\{-st\}P\{\tau>t\}\,dt=-(\varepsilon_0^{-1}w'(1)+\varphi'(1))\sum_{k=1}^{N-1}(k-N)\,\tilde{P}_k(0)\times$$
$$\times\sqrt{2}\,(s\,(N\varphi''(1)+2w'(1)+w''(1)))^{-1/2}+o(s^{-1/2}).$$

Тогда по тауберовой теореме [5] в силу монотонности функции $P\{\tau > t\}$ при $t \to \infty$

$$P\{\tau > t\} = -\left(\varepsilon_0^{-1} w'(1) + \varphi'(1) \sum_{k=1}^{N-1} (k - N) \widetilde{P}_k(0)\right) \sqrt{2}\, (\pi t\, (N\varphi''(1) + 2w'(1) + w''(1)))^{-1/2} + o(t^{-1/2}).$$

Теорема доказана.

Используя полученный результат и поступая точно так же, как и при доказательстве теоремы 3 из [1], получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Если* $w'''(1) < \infty$, $\varphi'''(1) < \infty$, $N\varphi''(1) + w'(1) = 0$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\eta(t)\,(t\,(N\varphi''(1) + 2w'(1) + w''(1)))^{-1/2} < x \mid \tau > t\} = \int_0^x u \exp\{-u^2/2\}\, du.$$

1. *Бойко Р. В.* Предельные теоремы для ветвящегося процесса с переменным режимом, описывающего развитие популяции в лимитирующей среде.— Укр. мат. журн., 1982, **34**, № 6, с. 681—687.
2. *Зубков А. М.* Периоды жизни ветвящегося процесса с иммиграцией.— Теория вероятностей и ее применения, 1972, XVII, № 1, с. 179—188.
3. *Бойко Р. В.* Ветвящиеся процессы с иммиграцией с переменным режимом и некоторые системы массового обслуживания.— В кн.: Случайные процессы в задачах математической физики. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 36—55.
4. *Бойко Р. В.* Предельные теоремы для одного ветвящегося процесса с переменным режимом.— В кн.: Вероятностные методы бесконечномерного анализа. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 13—24.
5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т.— М.: Мир, 1967.— Т. 2, 752 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
06.01.82