УДК 519.21

О. М. Іксанов (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПРО ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ РЕГУЛЯРНОГО МАРТИНГАЛА, ПОВ'ЯЗАНОГО З ГІЛЛЯСТИМ ВИПАДКОВИМ БЛУКАННЯМ

Let $\mathcal{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, be a supercritical branching random walk in which a number of direct descendants of an individual may be infinite with positive probability. Assume that the standard martingale W_n related to $\mathcal{M}_n$ is regular, and W is a limit random variable. Let $a(x)$ be a nonnegative function which regularly varies at infinity, with exponent greater than -1. We present sufficient conditions of almost sure convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)(W - W_n)$. We also establish a criteria of finiteness of $\mathrm{E}W \ln^+ W a(\ln^+ W)$ and $\mathrm{E} \ln^+ |Z_\infty| a(\ln^+ |Z_\infty|)$, where $Z_\infty := Q_1 + \sum_{n=2}^{\infty} M_1 \ldots M_n Q_{n+1}$ and (M_n, Q_n) are independent identically distributed random vectors, not necessarily related to $\mathcal{M}_n$.

Нехай $\mathcal{M}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, — надкритичне гіллясте випадкове блукання, в якому число безпосередніх нащадків одного індивідуума може бути нескінченним з додатною ймовірністю. Припустимо, що стандартний мартингал W_n, пов'язаний з $\mathcal{M}_n$, є регулярним, а W — гранична випадкова величина. Нехай $a(x)$ — невід'ємна функція, що правильно змінюється на нескінченності з показником, більшим за -1. В роботі наведено достатні умови м. н. збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)(W - W_n)$. Також встановлено критерії скінченності $\mathrm{E}W \ln^+ W a(\ln^+ W)$ та $\mathrm{E} \ln^+ |Z_\infty| a(\ln^+ |Z_\infty|)$, де $Z_\infty := Q_1 + \sum_{n=2}^{\infty} M_1 \ldots M_n Q_{n+1}$, а (M_n, Q_n) — незалежні однаково розподілені випадкові вектори, не обов'язково пов'язані з $\mathcal{M}_n$.

1. Вступ та основні результати. Нехай $\mathcal{M}$ — точковий процес на $\mathbb{R}$, тобто випадкова локально скінченна міра, що рахує. Вважаємо, що $\mathcal{M}\{+\infty\} = 0$. Покладемо $L := \mathcal{M}(\mathbb{R})$. У даній роботі величина L може бути детермінованою або випадковою, скінченною або нескінченною з додатною ймовірністю.

Гіллястим випадковим блуканням (ГВБ) будемо називати послідовність точкових процесів $\mathcal{M}_n$, $n = 0, 1, \ldots$, де для борелівської множини $B \in \mathbb{R}$ $\mathcal{M}_0(B) = 1_{\{0 \in B\}}$,

$$\mathcal{M}_{n+1}(B) := \sum_r \mathcal{M}_{n,r}(B - A_{n,r}), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Тут $\{A_{n,r}\}$ — точки $\mathcal{M}_n$, $\{\mathcal{M}_{n,r}\}$ — незалежні копії $\mathcal{M}$. Більш детальне визначення процесу наведено в [1, 2].

Зазначимо, що це означення ГВБ відрізняється від двох відомих раніше. Сучасне означення ГВБ, що було введене в [3], містить припущення $L < \infty$ майже напевно (м. н.). До появи роботи [3] під ГВБ розуміли послідовність (1), але побудовану за точковим процесом $\mathcal{M}$ з незалежними однаково розподіленими точками. Останні процеси іноді називають однорідними ГВБ.

У роботі розглядаються *надкритичні* ГВБ, тому якщо $\mathrm{P}\{L < \infty\} = 1$, то додатково припускається $\mathrm{E}L > 1$. Надкритичність гарантує виживання популяції з додатною ймовірністю.

Нехай $\mathcal{U} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n$ — множина всіх скінченних послідовностей $u = i_1 \ldots i_n$, $i_k \in \mathbb{N}$, що містить порожню послідовність $\mathbb{N}^0 := \{\varnothing\}$. Дерево $\mathcal{T}$ з коренем $\varnothing$ — це підмножина $\mathcal{U}$, що містить $\varnothing$, така, що з того, що $i_1 \ldots i_n \in \mathcal{T}$, випливає $i_1 \ldots i_k \in \mathcal{T}$, $k = \overline{1, n-1}$; кожному елементу $i_1 \ldots i_n \in \mathcal{T}$ поставлено у відповідність $L_{i_1 \ldots i_n} \in [0, \infty]$, при цьому $i_1 \ldots i_n j \in \mathcal{T} \Leftrightarrow j \in \{1, \ldots, L_{i_1 \ldots i_n}\}$. Дерево $\mathcal{T}$ називається поміченим, якщо кожному $u \in \mathcal{T}$ поставлено у відповідність мітку A_u.

Кожній реалізації ГВБ відповідає помічене дерево з коренем $\varnothing$. Елементи u цього дерева називають індивідуумами, $\varnothing$ — початковим предком; мітка A_u є позицією індивідуума u на дійсній осі, $A_\varnothing = 0$. Якщо $u = i_1 \ldots i_n$, то n називають поколінням індивідуума u і позначають $|u| = n$ ($|\varnothing| = 0$).

Припустимо, що для деякого $\gamma > 0$

$$m(\gamma) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma x} \mathcal{M}_1(dx) \in (0, \infty). \tag{2}$$

Для $n = 1, 2, \ldots$ через $\mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n)$ позначимо σ-алгебру, породжену точковими процесами $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$, і покладемо

$$W_n := m^{-n}(\gamma) \int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x} \mathcal{M}_n(dx) = m^{-n}(\gamma) \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u}.$$

При додаткових моментних обмеженнях в статтях [3, 4] (для випадку $L < \infty$ м. н.) та в [5] вказано умови регулярності (рівномірної інтегровності) невід'ємного мартингала $(W_n, \mathcal{F}_n, n = 1, 2, \ldots)$. Для випадку, коли величина L може бути нескінченною з додатною ймовірністю, без апріорних моментних припущень критерій регулярності мартингала наведено в твердженні 1.1 [1] (доведення див. у [2]).

Нагадаємо, що з регулярності довільного мартингала $(U_n, \mathcal{G}_n)$ випливає існування (класу еквівалентності) $\mathcal{G}_\infty$-вимірної випадкової величини U такої, що: а) $\mathrm{E}U = \mathrm{E}U_n$; б) при $n \to \infty$ U_n збігається до U м. н.

Нехай W — гранична випадкова величина для регулярного мартингала W_n. Тоді $\mathrm{E}W = 1$ і

$$W = m(\gamma)^{-n} \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} W^{(u)},$$

де при заданій $\mathcal{F}_n$ $\{W^{(u)} : |u| = n\}$ — умовно незалежні копії W.

Введемо позначення $Y_u := e^{\gamma A_u}/m^{|u|}(\gamma)$. Нехай (Z, S) — випадковий вектор, розподіл якого задається рівністю

$$\mathrm{E} \sum_{|u|=1} Y_u k\left(Y_u, \sum_{|v|=1} Y_v\right) = \mathrm{E}k(Z, S), \tag{3}$$

що виконується для довільної невід'ємної обмеженої борелівської функції двох змінних $k(x, y)$. Для задач, що розглядаються в даній роботі, сумісний розподіл вектора (Z, S) не використовується, а знання маргінальних розподілів є суттєвим. Якщо функція k не залежить від x, то з (3) отримуємо рівність

$$\mathrm{P}\{S \in dy\} = y\mathrm{P}\{W_1 \in dy\}.$$

Вибираючи в (3) $k(x, y) = r(x)$, отримуємо

$$\mathrm{E}r(Z) = \mathrm{E} \sum_{|u|=1} Y_u r(Y_u),$$

або, більш загально,

$$\mathrm{E}r(Z_1 \ldots Z_n) = \mathrm{E} \sum_{|u|=n} Y_u r(Y_u), \tag{4}$$

де $Z_1, Z_2, \ldots$ — незалежні копії випадкової величини Z. Зазначимо, що (4) виконується для довільної невід'ємної борелівської функції r з такою домовленістю: якщо права частина є нескінченною або не існує, то те саме справедливе і для лівої.

Нехай функція $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ правильно змінюється на ∞ з показником $\alpha > -1$. Якщо $\alpha = 0$, то додатково припускаємо, що a не спадає в околі ∞. У роботі наводяться достатні умови м. н. збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)(W - W_n) \tag{5}$$

за умови (6), яка гарантує, що W_n збігається до W в середньому (див. твердження 1.1 у [1]). Цей результат є твердженням про швидкість м. н. збіжності регулярного мартингала W_n до границі W.

Теорема 1. *Нехай*

$$\mathrm{E} \ln Z \in (-\infty, 0), \quad \mathrm{E} W_1 \ln^+ W_1 < \infty \tag{6}$$

та розподіл $\ln Z$ *неарифметичний. Умови*

$$\mathrm{E}(\ln^+ Z)^3 a(\ln^+ Z) < \infty, \qquad \mathrm{E} W_1 (\ln^+ W_1)^2 a(\ln^+ W_1) < \infty \tag{7}$$

є достатніми для м. н. збіжності ряду (5).

На думку автора, нерівність в (7) можна послабити до $\mathrm{E}(\ln^+ Z)^2 a(\ln^+ Z) < \infty$. Якщо гіпотеза правильна, то згідно з теоремою 2 має виконуватись еквівалентність

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a(n)(W - W_n) \right| < \infty \quad \text{м. н.} \ \Leftrightarrow \ \mathrm{E} W \ln^+ W a(\ln^+ W) < \infty. \tag{8}$$

У наведеному нижче наслідку стверджується, що гіпотеза є правильною для двох окремих випадків.

***Наслідок* 1.** *Нехай виконується* (6). *Якщо* $\mathcal{M}(-\infty, -\gamma^{-1} \ln m(\gamma)) = 0$ *м. н. та розподіл* $\ln Z$ *неарифметичний, або* $W_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})/(\mathrm{E}\mathcal{M}(\mathbb{R}))^n$, *то* (5) *м. н. збігається тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{E} W \ln^+ W a(\ln^+ W) < \infty$.

Теорема 2. *Якщо виконується* (6), *то* $\mathrm{E} W \ln^+ W a(\ln^+ W) < \infty$ *тоді і тільки тоді, коли* $\mathrm{E} W_1 (\ln^+ W_1)^2 a(\ln^+ W) < \infty$.

***Зауваження* 1.** Теорема 1.3(б) [1] містить критерій скінченності величини $\mathrm{E} W f(W)$ для вгнутих функцій f, що зростають швидше за будь-яку степінь логарифма. В умовах теореми 2 скористатися цим результатом неможливо.

2. Доведення теореми 1. Будемо використовувати ідею доведення теореми 4.1 із [6].

На множині вимирання популяції (вона може мати ймовірнісну міру 0) ряд (5) містить скінченне число ненульових членів і тривіально збігається. Тому, не наголошуючи на цьому в подальшому, досліджуємо збіжність ряду на множині виживання та вважаємо, що $W > 0$.

Без обмеження загальності можемо припускати, що $m(\gamma) = 1$. Справді $\{A_u, |u| = n\}$ — позиції індивідуумів у поколінні n, $n = 1, 2, \ldots$, можемо замінити такими: $\{B_u := A_u - |u| \ln m(\gamma), |u| = n\}$. Далі будемо зберігати всі введені раніше позначення.

Покладемо $b(x) := xa(x)$ і зауважимо, що $b(x)$ правильно змінюється на ∞ з показником $\beta := \alpha + 1 > 0$. При $n = 0, 1, \ldots$ визначимо послідовності

$$\widetilde{W}_{n+1} := \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} 1_{\{b(n)e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} \le 1\}},$$

$$R_n := \mathrm{E}(W_n - \widetilde{W}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathrm{E}\left(\sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} 1_{\{b(n)e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} > 1\}} | \mathcal{F}_n\right),$$

де при заданому $\mathcal{F}_n$ $\{W_1^{(u)} : |u| = n\}$ — умовно незалежні копії випадкової величини W_1.

Лема 1. *Припустимо, що* (6) *виконується та розподіл* $\ln Z$ *є неарифметичним. Тоді умови*

$$\mathrm{E}(\ln^+ Z)^3 a(\ln^+ Z) < \infty, \qquad \mathrm{E}W_1 \ln^+ W_1 a(\ln^+ W_1) < \infty \tag{9}$$

є достатніми для м. н. збіжності рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\{W_{n+1} \ne \widetilde{W}_{n+1}\},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{D}\left(b(n)\left(\widetilde{W}_{n+1} - W_n + R_n\right)\right).$$

Отже, якщо (9) виконується, то послідовність

$$\sum_{n=0}^{m} b(n)(\widetilde{W}_{n+1} - W_n + R_n), \quad m = 0, 1, \ldots,$$

є L_2-обмеженим, а отже, і регулярним мартингалом. Тому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b(n)(\widetilde{W}_{n+1} - - W_n + R_n)$ м. н. збігається. За лемою 1 та лемою Бореля – Кантеллі ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b(n)(W_{n+1} - W_n + R_n)$ також м. н. збігається. Із співвідношення (4.8) [6] випливає м. н. збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)\left(W - W_n + \sum_{k=n}^{\infty} R_k\right)$.

Тому м. н. збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)(W - W_n)$ еквівалентна м. н. збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \sum_{k=n}^{\infty} R_k$, яка, в свою чергу, еквівалентна м. н. збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)R_n$. Останнє випливає з того, що $R_n \ge 0$ м. н., із рівності

$$\sum_{n=1}^{m} a_n \sum_{k=n}^{\infty} R_k = \left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right) \sum_{n=m+1}^{\infty} R_n + \sum_{n=1}^{m} R_n \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right),$$

що виконується для довільного $m \in \mathbb{N}$, та з леми 4.2 [6].

Наступна лема завершує доведення теореми 1.

Лема 2. *Припустимо, що виконуються умови* (6), (9) *та розподіл* $\ln M$ *є неарифметичним. Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)R_n$ *м. н. збігається тоді і тільки тоді, коли*

$$\mathrm{E}W_1(\ln^+ W_1)^2 a(\ln^+ W_1) < \infty. \tag{10}$$

У цьому місці доцільно довести наслідок 1.

***Доведення наслідку* 1**. Нехай $\mathcal{M}(-\infty, -\gamma^{-1} \ln m(\gamma)) = 0$ м. н. або еквівалентно $Z \in [0, 1]$ м. н. У цьому випадку нерівності, в які входить випадкова величина

Z, в теоремах 1, 2 та лемах 1, 2 виконуються автоматично. Припустимо, що $\mathrm{E}W \ln^+ W a(\ln^+ W) < \infty$. За теоремою 2 це еквівалентно нерівності

$$\mathrm{E}W_1(\ln^+ W_1)^2 a(\ln^+ W_1) < \infty.$$

За теоремою 1 ряд (5) м. н. збігається.

Нехай тепер ряд (5) м. н. збігається. Якщо $\mathrm{E}W_1 \ln^+ W_1 a(\ln^+ W_1) < \infty$, то за лемою 2 $\mathrm{E}W_1(\ln^+ W_1)^2 a(\ln^+ W_1) < \infty$. Отже, за теоремою 2 $\mathrm{E}W \ln^+ W a(\ln^+ W) < \infty$. Припустимо, що $\mathrm{E}W_1 \ln^+ W_1 a(\ln^+ W_1) = \infty$. Оскільки за умовою $\mathrm{E}W_1 \ln^+ W_1 < \infty$, то $\alpha \geq 0$. При цьому якщо $\alpha > 0$, то знайдеться $\delta \in [0, \alpha)$ таке, що $\mathrm{E}W_1(\ln^+ W_1)^{\delta+1} < \infty$, але $\mathrm{E}W_1(\ln^+ W_1)^{\delta+2} = \infty$. За лемою 2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta}(W - W_n)$ розбігається. Згідно з критерієм Абеля при $\epsilon \in (0, \alpha - \delta)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\epsilon}(W - W_n)$ не може збігатися. Тому ряд (5) розбігається. Якщо $\alpha = 0$, то $\mathrm{E}W_1 \ln^+ W_1 < \infty$, $\mathrm{E}W_1(\ln^+ W_1)^2 = \infty$. За лемою 2 ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(W - W_n)$ розбігається. Оскільки за припущенням на початку пункту $a(x)$ не спадає при великих x, то ряд (5) розбігається. Доведення наслідку для процесу Гальтона – Ватсона аналогічне. Достатньо зауважити, що в цьому випадку в (2) потрібно вибрати $\gamma = 0$, і $Z = (\mathrm{E}\mathcal{M}(\mathbb{R}))^{-1}$ м. н.

Наслідок доведено.

***Доведення леми* 1.** Позначимо через $F(x)$ функцію розподілу випадкової величини W_1. Нехай S_n — випадкове блукання, що стартує в нулі, з кроком, розподіленим як $(-\ln Z)$. За припущенням леми $\mu := \mathrm{E}S_1 \in (0, \infty)$. За лемою 4(б) при $x > 0$

$$V(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\mathrm{P}\{S_n \leq \ln b(n) + \ln x\} < \infty. \tag{11}$$

При $x > 0$ розглянемо функції

$$K(x) := \int_0^x y dV(y) = xV(x) - \int_0^x V(y)dy,$$

$$M(x) := \int_x^{\infty} y^{-1} dV(y) = -x^{-1}V(x) + \int_x^{\infty} y^{-2}V(y)dy.$$

Оскільки функція $l(x) := \mu^{-\alpha-2} b(\ln x)$ повільно змінюється на ∞, а за лемою 4 для функції $V(x)$, визначеної в (11), виконується (28), то ця V належить класу де Хаана Π_l.

За теоремою 3.7.1 [7]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{K(x)}{xb(\ln x)} = \mu^{\alpha+2}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{xM(x)}{b(\ln x)} = \mu^{\alpha+2}. \tag{12}$$

Далі маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\{W_{n+1} \neq \widetilde{W}_{n+1}\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}\{b(n) \sup_{|u|=n} e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} > 1\} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E} \sum_{|u|=n} \mathrm{P}\{b(n)e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} > 1 | \mathcal{F}_n\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E} \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} \left(\int\limits_{b^{-1}(n)e^{-\gamma A_u}}^{\infty} dF(x) e^{-\gamma A_u} \right) \overset{(4)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E} e^{S_n} \int\limits_{b^{-1}(n)e^{S_n}}^{\infty} dF(x) =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \mathrm{E} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{S_n} 1_{\{e^{S_n} \le b(n)x\}} \right) dF(x) = \int\limits_0^{\infty} K(x) dF(x).$$

Останній інтеграл збігається внаслідок (12) і того, що $\mathrm{E}W_1 b(\ln^+ W_1) < \infty$.

Нагадаємо означення умовної дисперсії: $\mathbb{D}(X|\mathcal{G}) = \mathrm{E}(X^2|\mathcal{G}) - (\mathrm{E}(X|\mathcal{G}))^2$. Оскільки $\mathrm{E}(\widetilde{W}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = W_n - R_n$ та $\mathrm{E}(\widetilde{W}_{n+1} - W_n + R_n|\mathcal{F}_n) = 0$, то

$$\mathbb{D}(b(n)(\widetilde{W}_{n+1} - W_n + R_n)) = b^2(n) \mathrm{E} \left(\mathbb{D}(\widetilde{W}_{n+1}|\mathcal{F}_n) \right).$$

Далі,

$$\mathbb{D}(\widetilde{W}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \sum_{|u|=n} \mathbb{D}(e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} 1_{\{b(n)e^{\gamma A_u} W_1^{(u)} \le 1\}} |\mathcal{F}_n) \le$$

$$\le \mathrm{E} \left(\sum_{|u|=n} e^{2\gamma A_u} \mathrm{E} \left(W_1^2 1_{\{b(n)e^{\gamma A_u} W_1 \le 1\}} \middle| \mathcal{F}_n \right) \right) =$$

$$= \mathrm{E} \left(\sum_{|u|=n} e^{2\gamma A_u} \int\limits_0^{b^{-1}(n)e^{-\gamma A_u}} x^2 dF(x) \middle| \mathcal{F}_n \right). \qquad (13)$$

Таким чином,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{D}(b(n)(\widetilde{W}_{n+1} - W_n + R_n)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b^2(n) \mathrm{E} \left(\mathbb{D}(\widetilde{W}_{n+1}|\mathcal{F}_n) \right) \overset{(4),(13)}{\le}$$

$$\overset{(4),(13)}{\le} \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E} e^{-S_n} \int\limits_0^{b^{-1}(n)e^{S_n}} x^2 dF(x) =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} x^2 \mathrm{E} \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-S_n} 1_{\{e^{S_n} > b(n)x\}} \right) dF(x) =$$

$$= \int\limits_0^{\infty} x^2 M(x) dF(x).$$

Останній інтеграл збігається внаслідок (12) та того, що $\mathrm{E}W_1 b(\ln^+ W_1) < \infty$.

Лему 1 доведено.

Для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}$ розглянемо випадкові величини

$$Q(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{e^{\gamma A_u} > e^{-x}\}},$$

$$\widehat{Q}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{e^{\gamma A_u} > e^{-x} b^{-1}(n)\}}.$$

За умов

$$\mathrm{E}\ln Z \in (-\infty, 0), \quad \mathrm{E}(\ln^+ Z)^2 b(\ln^+ Z) < \infty$$

вони м. н. скінченні, оскільки за теоремою 1 [8] для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{E}Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n)\mathrm{P}\{S_n \le x\} < \infty,$$

де S_n — таке ж випадкове блукання, як в доведенні леми 1, а те, що $\mathrm{E}\widehat{Q}(x) < \infty$, випливає з подібних міркувань та нерівності (20).

Лема 3. *Якщо виконується* (6) *та* $\mathrm{E}(\ln^+ Z)^2 b(\ln^+ Z) < \infty$*, то м. н. на множині виживання*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{xb(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\widehat{Q}(x)}{xb(x)} = \frac{W}{(\beta+1)(-\mathrm{E}\ln Z)^{\beta+1}} > 0, \tag{14}$$

де $\beta > 0$ *— показник правильної зміни* b.

Доведення подібне доведенню теореми B [3]. Виберемо довільне $0 < a < \mu = -\mathrm{E}\ln Z$. Для кожного $x > 0$ знайдеться натуральне $N = N(x) > 0$ таке, що $(N-1)^2 a \le x < N^2 a$. При $x > 0$ визначимо випадкові величини

$$Q_1(x) := \frac{1}{(N-1)^2 a b((N-1)^2 a)} \left(\sum_{n=1}^{N^2} b(n) W_n \right),$$

$$Q_2(N, x) := \frac{1}{(N-1)^2 a b((N-1)^2 a)} \left(\sum_{n=N^2}^{\infty} b(n) \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{e^{\gamma A_u} > e^{-an}\}} \right).$$

Нагадаємо, що для майже всіх ω з множини виживання $W(\omega) > 0$ м. н. Оскільки при $m \to \infty$ $\sum_{n=1}^{m} b(n) W_n \sim W \sum_{n=1}^{m} b(n)$ м. н. , $\sum_{n=1}^{m} b(n) \sim (\beta+1)^{-1} m b(m)$, то

$$\limsup_{x\to\infty} Q_1(x) \le \frac{W}{(\beta+1)a^{\beta+1}} \quad \text{м. н.}$$

Спрямовуючи $a \to \mu$, отримуємо

$$\limsup_{x\to\infty} Q_1(x) \le \frac{W}{(\beta+1)\mu^{\beta+1}} \quad \text{м. н.} \tag{15}$$

За лемою 4(a) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b(n)\mathrm{P}\{S_n - an \le 0\}$ збігається. Тому

$$\mathrm{E}\sum_{N=2}^{\infty} Q_2(N, x) =$$

$$= \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{(N-1)^2 a b((N-1)^2 a)} \left(\sum_{n=N^2}^{\infty} b(n)\mathrm{P}\{e^{-S_n} > e^{-an}\} \right) < \infty.$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to\infty} Q_2(N, x) = 0 \quad \text{м. н.} \tag{16}$$

За теоремою 1.5.3 [7] без обмеження загальності можемо вважати, що $b(x)$ не спадає при $x > 0$. Тому при $x > 0$ $\dfrac{Q(x)}{xb(x)} \le Q_1(x) + Q_2(x)$, і з (15), (16) отримуємо

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{xb(x)} \leq \frac{W}{(\beta+1)\mu^{\beta+1}} \quad \text{м. н.} \tag{17}$$

Виберемо тепер довільне $a > \mu$. Для кожного $x > 0$ знайдеться натуральне $N = N(x) > 0$ таке, що $Na \leq x < (N+1)a$. При $x > 0$ розглянемо

$$Q_3(x) := \frac{1}{(N+1)ab((N+1)a)} \left(\sum_{n=1}^{N} b(n) W_n \right),$$

$$Q_4(x) := \frac{1}{(N+1)ab((N+1)a)} \left(\sum_{n=0}^{N} b(n) \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{e^{\gamma A_u} \leq e^{-an}\}} \right).$$

Як і для $Q_1(x)$, доводимо, що

$$\liminf_{x\to\infty} Q_3(x) \geq \frac{W}{(\beta+1)\mu^{\beta+1}} \quad \text{м. н.} \tag{18}$$

Доведення того, що

$$\liminf_{x\to\infty} Q_4(x) = 0 \quad \text{м. н.,} \tag{19}$$

майже збігається з доведенням подібного факту в [3, с. 35]. За теоремою 4.2 [9] $r := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \mathrm{P}\{S_n > an\} < \infty$. Тому

$$\mathrm{E} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{e^{\gamma A_u} \leq e^{-an}\}} = r < \infty.$$

За лемою Кронекера

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{e^{\gamma A_u} \leq e^{-an}\}} = 0 \quad \text{м. н. ,}$$

звідки з урахуванням монотонності b випливає (19).

При великих x $\dfrac{Q(x)}{xb(x)} \geq Q_3(x) + Q_4(x)$. Тому з (18), (19) отримуємо

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{Q(x)}{xb(x)} \geq \frac{W}{(\beta+1)\mu^{\beta+1}} \quad \text{м. н.}$$

Разом з (17) остання нерівність доводить граничне співвідношення для $Q(x)$.

Зафіксуємо тепер $\delta \in (0, \mu)$ та виберемо $r = r(\delta) > 0$ так, щоб $\ln b(n) \leq \delta n + r$, $n = 1, 2, \ldots$. Виконується нерівність

$$Q(x) \leq \widehat{Q}(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{e^{\gamma A_u} > e^{-x-\delta n - r}\}}. \tag{20}$$

Запропонований вище аналіз дозволяє перевірити, що для правої частини цієї нерівності виконується таке ж граничне співвідношення (14), як для $Q(x)$.

Лему 3 доведено.

Доведення леми **2.** З визначення R_n випливає зображення

$$R_n = \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} \int\limits_{b^{-1}(n) e^{-\gamma A_u}}^{\infty} x dF(x),$$

де, як і раніше, $F(x)$ — функція розподілу випадкової величини W_1. Тому виконується формальна рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n R_n = \int_0^{\infty} x dF(x) \sum_{n=1}^{\infty} b(n) \sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} 1_{\{\gamma A_u > -\ln x - \ln b(n)\}} =$$

$$= \int_0^{\infty} \widehat{Q}(\ln x) x dF(x).$$

За припущенням леми $\mathrm{E} \ln Z \in (-\infty, 0)$ та $\mathrm{E}(\ln^+ Z)^2 b(\ln^+ Z) < \infty$. Тому згідно з лемою 3 при $x \to \infty$ $\widehat{Q}(\ln x) \sim \mathrm{const} \ln x b(\ln x)$ м. н. Отже, ряд з невід'ємними членами $\sum_{n=1}^{\infty} b(n) R_n$ збігається тоді і тільки тоді, коли виконується (10).

Лему 2 доведено.

3. Моменти випадкових рядів та доведення теореми 2. Нехай (M_1, Q_1), $(M_2, Q_2), \ldots$ — визначені на фіксованому ймовірнісному просторі незалежні копії випадкового вектора (M, Q), не обов'язково пов'язаного з ГВБ. Покладемо

$$\Pi_0 := 1, \qquad \Pi_n := M_1 M_2 \ldots M_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$
$$Z_\infty := \sum_{k=1}^{\infty} \Pi_{k-1} Q_k. \tag{21}$$

У цьому пункті будем вважати, що

$$\mathrm{P}\{M = 0\} = 0, \mathrm{P}\{Q = 0\} < 1,$$

і за умови м. н. абсолютної збіжності ряду в (21) розподіл Z_∞ є невиродженим.

Наведена нижче теорема має самостійний інтерес, доповнює теорему 1.6 [1] та, крім того, є ключовою для доведення теореми 2. Нагадаємо, що функція $b(x)$ правильно змінюється на ∞ з показником $\beta > 0$, та покладемо $c(x) := := x b(x)$.

Теорема 3. *Якщо*

$$\mathrm{E} \ln |M| \in (-\infty, 0), \qquad \mathrm{E} \ln^+ |Q| < \infty, \tag{22}$$

то

$$\mathrm{E} b(\ln^+ |Z_\infty|) < \infty \Leftrightarrow \mathrm{E} c(\ln^+ |M|) < \infty, \quad \mathrm{E} c(\ln^+ |Q|) < \infty. \tag{23}$$

Доведення. Функції b та c мають вигляд $b(x) = x^\beta L(x)$, $c(x) = x^{\beta+1} L(x)$, де $L(x)$ повільно змінюється на ∞. Для $y > 1$ покладемо $\Lambda_\beta(y) := \dfrac{\ln^{\beta-1} y L(\ln y)}{\beta y}$. Ця функція правильно змінюється на ∞ з показником (-1). Функція $\sup\limits_{t \ge x} \Lambda_\beta(t)$ не зростає, і за теоремою 1.5.3 [7] $\sup\limits_{t \ge x} \Lambda_\beta(t) \sim \Lambda_\beta(x)$. Тут і далі запис $F \sim G$ означає $\lim\limits_{x\to\infty} (F(x)/G(x)) = 1$. Після заміни змінної та використання теореми Карамата отримуємо

$$b(\ln x) \sim \int_1^x \Lambda_\beta(y) dy \sim \int_1^x \sup_{t \ge y} \Lambda_\beta(t) dy =: \tilde{f}(x-1). \tag{24}$$

Аналогічно

$$c(\ln x) \sim \int_1^x \Lambda_{\beta+1}(y) dy \sim \int_1^x \sup_{t \ge y} \Lambda_{\beta+1}(t) dy =: \phi(x-1).$$

Функції $\tilde{f}$ та ϕ не спадають, є вгнутими на $\mathbb{R}^+$, при $x = 0$ дорівнюють 0 та прямують до ∞ при $x \to \infty$. Зокрема, ϕ є субадитивною. Також з (24) та теореми Карамата випливає

$$(\beta+1)^{-1}c(\ln x) \sim \int\limits_1^x (\tilde{f}(y)/y)dy =: \tilde{g}(x-1).$$

Функція $c(x)$ правильно змінюється на ∞ з показником $\beta + 1 > 1$. За теоремою 1.5.3 [7] на ∞ вона еквівалентна функції, що не спадає. Отже, за лемою 1(a) [8] знайдеться функція $\psi(x) \sim c(\ln x)$, що не спадає, $\psi(x) = 0$ при $x \le 1$ та

$$\psi(xy) \le a(\psi(x) + \psi(y)) \tag{25}$$

для всіх $x, y \in [1, \infty)$ та деякої додатної константи a.

Звідси робимо висновок, що еквівалентність (23) достатньо довести при заміні функції $b(\ln x)$ на $\tilde{f}(x)$, $c(\ln x)$ на $\tilde{g}(x)$, $\phi(x)$ або $\psi(x)$.

При доведенні імплікації $\Leftarrow$ теореми потрібно скористатися тим, що згідно з теоремою 2.1 [10] умова (22) гарантує $|Z_\infty| < \infty$ м. н.

Припустимо спочатку, що $|M| \in [0,1]$ м. н. У цьому випадку умова $\mathrm{E}c(\ln^+|M|) < \infty$ виконується автоматично. Нехай $\mathrm{E}c(\ln^+|Q|) < \infty$ або, що еквівалентно, $\mathrm{E}\tilde{g}(|Q|) < \infty$. За теоремою 1.6(a) [1] $\mathrm{E}\tilde{f}(|Z_\infty|) < \infty$. Це еквівалентне тому, що $\mathrm{E}b(\ln^+|Z_\infty|) < \infty$. Імплікація $\Rightarrow$ доводиться аналогічно на підставі тієї ж теореми 1.6(a) [1].

Перейдемо до загального випадку. Припустимо спочатку, що в (23) виконуються нерівності для $|M|$ та $|Q|$ або, що еквівалентно,

$$\mathrm{E}\tilde{g}(|M|) < \infty, \mathrm{E}\tilde{g}(|Q|) < \infty.$$

Розглянемо випадкові величини

$$N_0 := 0, N_{i+1} := \inf\{n > N_i : |\Pi_n| < |\Pi_{N_i}|\}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Оскільки в умовах твердження $\Pi_n \to 0$ м. н. при $n \to \infty$, то $\mathrm{E}N_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$. При $k = 1, 2, \ldots$ покладемо

$$M'_k := |M_{N_{k-1}+1}| \ldots |M_{N_k}|, \qquad \Pi'_0 := 1, \qquad \Pi'_k := M'_1 \ldots M'_k,$$

$$Q'_k := |Q_{N_{k-1}+1}| + |M_{N_{k-1}+1}||Q_{N_{k-1}+2}| + \ldots + |M_{N_{k-1}+1}| \ldots |M_{N_k - 1}||Q_{N_k}|.$$

Випадкові вектори $\{(M'_k, Q'_k) : k = 1, 2, \ldots\}$ — незалежні копії вектора $\left(|\Pi_{N_1}|, \sum\limits_{k=1}^{N_1} |\Pi_{k-1}||Q_k|\right)$ та, крім того,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Pi_{k-1}||Q_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \Pi'_{k-1} Q'_k.$$

Якщо буде встановлено, що

$$\mathrm{E}\tilde{g}\left(\sum_{k=1}^{N_1} |\Pi_{k-1}||Q_k|\right) < \infty, \tag{26}$$

то звідси буде випливати, що $\mathrm{E}b(|Z_\infty|) < \infty$, і, таким чином, теорема буде доведена в один бік. Дійсно, оскільки $|\Pi_{N_1}| \in (0,1)$ м. н. та $\mathrm{P}\{|\Pi_{N_1}| = 1\} = 0$, а

(26) гарантує, що $\mathrm{E}\ln^+\left(\sum_{k=1}^{N_1}|\Pi_{k-1}||Q_k|\right)<\infty$, то за першою частиною доведення, застосованою до вектора $\left(|\Pi_{N_1}|,\sum_{k=1}^{N_1}|\Pi_{k-1}||Q_k|\right)$ замість $(|M|,|Q|)$, отримуємо стверджуване.

Перевіримо (26) з $\tilde{g}$, заміненою на ψ. Оскільки

$$\sum_{k=1}^{N_1}|\Pi_{k-1}||Q_k|\le N_1\sup_{1\le k\le N_1}|\Pi_{k-1}||Q_k|\le N_1\sup_{0\le k\le N_1-1}|\Pi_k|\sum_{i=1}^{N_1}|Q_i|,$$

то, враховуючи (25), робимо висновок, що для доведення (26) достатньо перевірити виконання трьох нерівностей: 1) $\mathrm{E}\psi(N_1)<\infty$; 2) $\mathrm{E}\psi\left(\sup_{0\le k\le N_1-1}|\Pi_k|\right)<\infty$; 3) $\mathrm{E}\psi\left(\sum_{i=1}^{N_1}|Q_i|\right)<\infty$. Оскільки $\mathrm{E}N_1<\infty$, а ψ зростає повільніше за лінійну функцію, то перша нерівність виконується. Далі, $\psi(e^x)$ правильно змінюється з показником $\beta+1>1$, тому згідно з (36) друга нерівність випливає з $\mathrm{E}\psi(|M|\vee 1)<$ $<\infty$. Останнє еквівалентне $\mathrm{E}c(\ln^+|M|)<\infty$. При перевірці третьої нерівності замінимо ψ на ϕ. Перевага заміни полягає в тому, що ϕ є субадитивною. Оскільки випадкові величини $1_{\{N_1\ge n\}}$ та $|Q_n|$ незалежні, то

$$\mathrm{E}\phi(\sum_{i=1}^{N_1}|Q_i|)\le \mathrm{E}\sum_{i=1}^{N_1}\phi(|Q_i|)=\mathrm{E}N_1\mathrm{E}\phi(|Q|)<\infty.$$

Припустимо тепер, що виконується ліва частина (23). Це еквівалентно тому, що

$$\mathrm{E}\tilde{f}(|Z_\infty|)<\infty. \tag{27}$$

За твердженням 3.1 [1] або $\infty>\mathrm{E}\tilde{f}\left(\sup_{n\ge0}|\Pi_n|\right)$, або $\infty>\mathrm{E}\tilde{f}\left(\sup_{n\ge0}|\Pi_{2n}|\right)$. Еквівалентно або $\infty>\mathrm{E}f\left(\sup_{n\ge0}S_n\right)$, або $\infty>\mathrm{E}f\left(\sup_{n\ge0}\grave{S}_n\right)$, де $S_n:=\ln|\Pi_n|$, $\grave{S}_n:=$ $:=\ln|\Pi_{2n}|$, $n=0,1,\ldots,$ — випадкові блукання з кроками, розподіленими як $\ln|M|$ та $\ln|M_1M_2|$ відповідно. Згідно з формулою (36) або $\mathrm{E}g(\ln^+M)<\infty$, або $\mathrm{E}g(\ln^+(M_1M_2))<\infty$. Зрозуміло, що в обох випадках передостання нерівність виконується.

З іншого боку, за твердженням 3.1 [1] з (27) випливає або

$$\mathrm{E}\tilde{f}\left(\sup_{k\ge1}\Pi^*_{k-1}|Q^s_k|\right)\le\mathrm{E}\tilde{f}\left(\sup_{k\ge1}|\Pi_{k-1}||Q^s_k|\right)<\infty,$$

або

$$\mathrm{E}\tilde{f}\left(\sup_{k\ge1}\grave{\Pi}^*_{k-1}|\grave{Q}^s_k|\right)\le\mathrm{E}\tilde{f}\left(\sup_{k\ge1}|\grave{\Pi}_{k-1}||\grave{Q}^s_k|\right)<\infty,$$

де

$$\grave{\Pi}_0:=1,\quad \grave{\Pi}_n:=\grave{M}_1\grave{M}_2\ldots\grave{M}_n,\quad n=1,2,\ldots,$$

вектори

$$(\grave{M}_k,\grave{Q}_k):=(M_{2k-1}M_{2k},M_{2k-1}Q_{2k}+Q_{2k-1}),\quad k=1,2,\ldots,$$

незалежні та однаково розподілені; $(M_n,Q_n)\stackrel{d}{=}(M_n,Q'_n)$, Q_n та Q'_n незалежні при заданому M_n, $Q^s_n:=Q_n-Q'_n$, а $\grave{Q}^s_n$ та $\grave{Q}'_n$ мають такий же сенс, але в термінах $\grave{M}_n$

та $\grave{Q}_n$; $\Pi_0^* := 1$, $\Pi_k^* := M_1^* \ldots M_k^*$, $M_k^* := |M_k| \wedge 1$, $k = 1, 2, \ldots$, а $\grave{\Pi}_k^*$ визначаються аналогічно. Оскільки M_k^*, $\grave{M}_k^* \leq 1$ м. н. та строго менше за одиницю з додатною ймовірністю, то за наслідком 3.1 [1] $\mathrm{E}\tilde{g}(|Q|) < \infty$. Отже, $\mathrm{E}g(\ln^+|Q|) < \infty$.

Теорему 3 доведено.

***Доведення теореми* 2.** Теорему 2 можна отримати з теореми 3 за допомогою того ж прийому, що був використаний у [1] для отримання теореми 1.3 з теореми 1.6. Теорема 3 застосовується до випадкового ряду, породженого вектором (Z, S), визначеним у (3).

4. Додаток. Лема 4 є істотним інгредієнтом в доведенні леми 1. Пункт б) леми стосується *збурених* випадкових блукань і узагальнює результат [8] для випадкових блукань.

Лема 4. *Нехай функція* $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *правильно змінюється з показником* $\beta > 0$, T_n, $n = 0, 1, \ldots,$ — *випадкове блукання, що стартує в нулі, з* $\mu := \mathrm{E}T_1 \in \in (0, \infty)$. *Якщо* $\mathrm{E}(T_1^-)^2 \varphi(T_1^-) < \infty$, *то:*

а) *для довільного* $\epsilon > 0$

$$I := \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \mathrm{P}\{T_n > (\mu + \epsilon)n\} < \infty,$$

$$\sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \mathrm{P}\{T_n \leq (\mu - \epsilon)n\} < \infty;$$

б) *для всіх* $x \in \mathbb{R}$

$$V(x) := \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \mathrm{P}\{T_n \leq \ln \varphi(n) + \ln x\} < \infty.$$

Якщо, крім того, розподіл випадкової величини T_1 *є неарифметичним, то для всіх* $h > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{V(hx) - V(x)}{\mu^{-\beta-1} \varphi(\ln x)} = \ln h. \tag{28}$$

Доведення. Згідно з теоремою 1.5.3 [7] можемо вважати, що φ не спадає на $\mathbb{R}^+$.

а) Послідовність $\widetilde{T}_n := -T_n + (\mu + \epsilon)n, n = 0, 1, \ldots,$ є випадковим блуканням з $\mathrm{E}\widetilde{T}_1 = \epsilon \in (0, \infty)$. Тому за теоремою 1(а) [8] $I = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \mathrm{P}\{\widetilde{T}_n \leq 0\} < \infty$. Збіжність другого ряду перевіряється аналогічно.

б) Будемо використовувати ідею доведення теореми 2 [11]. Зафіксуємо $\delta \in \in (0, \mu)$ та виберемо $r = r(\delta) > 0$ так, щоб $\ln \varphi(n) \leq \delta n + r$, $n = 1, 2, \ldots$. Послідовність $\widehat{T}_n := T_n - \delta n$ — випадкове блукання з $\mathrm{E}\widehat{T}_1 = \mu - \delta \in (0, \infty)$. Оскільки $V(x) \leq \leq \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \mathrm{P}\{\widehat{T}_n \leq \ln x + r\}$, а останній ряд збігається за теоремою 1(а) [8], то функція $V(x)$ є скінченною для всіх $x > 0$. Співвідношення (28) еквівалентне такому:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{U(x + h) - U(x)}{\mu^{-\beta-1} \varphi(x)} = h \quad \text{для всіх} \quad h \in \mathbb{R}, \tag{29}$$

де $U(x) := V(e^x)$. Насправді (29) достатньо довести для малих додатних h з інтервалу (h_0, h_1) (див., наприклад, лему 3.2.1 [7]). Зафіксуємо одне таке h. Для довільного $\epsilon \in (0, \mu/2)$ і достатньо великих x нерівність $\ln \varphi(n) \leq \epsilon n$ виконується при $n \geq N_2 = N_2(x) := \left[\dfrac{x + h}{\mu - 2\epsilon} + 1 \right]$. Покладемо $N_1 = N_1(x) := \left[\dfrac{x + h}{\mu + \epsilon} \right]$. Використовуючи п. а) леми, для заданого $\rho > 0$ виберемо $m = m(\rho) > 0$ так, щоб

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} \varphi(n) \mathrm{P}\{T_n > (\mu + \epsilon)n\} \leq \rho. \tag{30}$$

Запишемо

$$U(x+h)-U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\mathrm{P}\{T_n\le\ln\varphi(n)+x\}=$$

$$=\sum_{n=1}^{m}+\sum_{n=m+1}^{N_1}+\sum_{n=N_1+1}^{N_2-1}+\sum_{n=N_2}^{\infty}=:I_1(x)+I_2(x)+I_3(x)+I_4(x).$$

Очевидно, що $\lim\limits_{x\to\infty}I_1(x)=0$.

Якщо при великих x та $n\ge N_2(x)$ $T_n\ge(\mu-\epsilon)n$, то $T_n-\ln\varphi(n)\ge(\mu-2\epsilon)n$. Тому при $x\to\infty$

$$I_4(x)\le\sum_{n=N_2(x)}^{\infty}\varphi(n)\mathrm{P}\{T_n\le(\mu-\epsilon)n\}\to 0$$

за п. a) леми.

Якщо при великих x та $n\in\{m+1,\ldots,N_1(x)\}$ $T_n\le(\mu+\epsilon)n$, то

$$T_n-\ln\varphi(n)\le(\mu+\epsilon)N_1-h\le x.$$

Тому

$$I_2(x)\le\sum_{n=m+1}^{N_1}\varphi(n)\mathrm{P}\{T_n-\ln\varphi(n)>x\}\le$$

$$\le\sum_{n=m+1}^{N_1}\varphi(n)\mathrm{P}\{T_n>(\mu+\epsilon)n\}\overset{(30)}{\le}\rho.$$

За нерівністю Поттера (теорема 1.5.6 [7]) для довільних $q>0,\ \theta>0$ знайдеться $x_0>0$ такий, що

$$\ln\varphi\left(\frac{x+h}{\mu-2\epsilon}\right)-\ln\varphi\left(\frac{x+h}{\mu+\epsilon}\right)\le$$

$$\le(1+q)+(\beta+\theta)(\ln(\mu+\epsilon)-\ln(\mu-2\epsilon)):=B(q,\theta).$$

Тому при $x\ge x_0$

$$I_3(x)\le\sum_{n=N_1+1}^{N_2-1}\varphi(n)\mathrm{P}\{\ln\varphi(N_1+1)+x<T_n\le\ln\varphi(N_2-1)+x+h\}\le$$

$$\le\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\mathrm{P}\left\{\ln\varphi\left(\frac{x+h}{\mu-2\epsilon}\right)+x<T_n\le\right.$$

$$\left.\le\ln\varphi\left(\frac{x+h}{\mu-2\epsilon}\right)+x+h+B(q,\theta)\right\}.$$

Застосовуючи теорему 2 [8], отримуємо

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{I_3(x)}{\varphi(x)}\le\frac{h+B(q,\theta)}{\mu^{\beta+1}}.$$

Спрямовуючи q та ϵ до 0, маємо

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{I_3(x)}{\varphi(x)}\le\frac{h}{\mu^{\beta+1}}.$$

Таким чином, доведено, що

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{U(x+h)-U(x)}{\varphi(x)} \le \frac{h}{\mu^{\beta+1}}.$$

Покажемо, що

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{U(x+h)-U(x)}{\varphi(x)} \ge \frac{h}{\mu^{\beta+1}}. \tag{31}$$

Покладемо $R_n := T_n - \ln\varphi(n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Для кожного $\epsilon \in (0, \mu)$ визначимо $N_3 = N_3(x) := \left[\dfrac{x+h}{\mu-\epsilon} + 1\right]$ та скористаємось величинами N_1, визначеними вище. Для довільних $q > 0$, $\theta > 0$ таких, що $\tau = \tau(q, \theta, \epsilon) := \ln(1+q)\left(\dfrac{\mu+\epsilon}{\mu-\epsilon}\right)^{\beta+\theta} < h_0$, та великих x виконується нерівність Поттера $\ln\varphi(N_3(x)-1) - \ln\varphi(N_1(x)) \le \tau$. Крім того, мають місце нерівності

$$U(x+h) - U(x) \ge \sum_{n=N_1+1}^{N_3-1} \varphi(n)\mathrm{P}\{x < R_n \le x+h\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=N_1+1}^{N_3-1} \varphi(n)\mathrm{P}\{\ln\varphi(n) - \ln\varphi(N_1) + x < R_{N_1} + T_n - T_{N_1} \le x+h\} \ge$$

$$\ge \sum_{n=1}^{N_3-N_1-1} \varphi(n+N_1)\mathrm{P}\{\tau + x - R_{N_1} < T_n \le x - R_{N_1} + h\} \ge$$

$$\ge \varphi\left(\frac{x}{\mu+\epsilon}\right) \sum_{n=1}^{N_3-N_1-1} \mathrm{P}\{\tau + x - R_{N_1} < T_n \le x - R_{N_1} + h\} =$$

$$= \varphi\left(\frac{x}{\mu+\epsilon}\right) \mathrm{E}g(x - R_{N_1(x)}),$$

де $g(t) := \sum_{n=1}^{N_3-N_1-1} \mathrm{P}\{\tau + t < T_n \le t+h\}$. Буде показано, що м. н.

$$\lim_{x\to\infty} g(x - R_{N_1(x)}) = \mu^{-1}(h-\tau). \tag{32}$$

З теореми Блекуела [12] випливає, що функція $g(t)$ є обмеженою. Тому з (32) випливає

$$\lim_{x\to\infty} \mathrm{E}g(x - R_{N_1(x)}) = \mu^{-1}(h-\tau).$$

Отже, беручи до уваги правильну зміну функції φ, отримуємо

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{U(x+h)-U(x)}{\varphi(x)} \ge \frac{h - \tau(q,\theta,\epsilon)}{(\mu+\epsilon)^\beta \mu}.$$

Спрямовуючи q та ϵ до 0, приходимо до (31).

За посиленим законом великих чисел при $x \to \infty$ $R_{N_1(x)} = \mu N_1(x) + o(N_1(x))$ м. н. Отже, при $x \to \infty$ $x - R_{N_1(x)} = \epsilon(\mu+\epsilon)^{-1}x + o(x)$ м. н. Для доведення (32) достатньо перевірити, що для *довільної* невипадкової функції $z(x) = \epsilon(\mu+\epsilon)^{-1}x + o(x)$

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{N_2(x)-N_1(x)-1} \mathrm{P}\{\tau + z(x) < T_n \le z(x) + h\} = \mu^{-1}(h-\tau). \tag{33}$$

Якщо натуральне число $n \geq N_3 - N_1$ та $T_n > (\mu - \epsilon)n$, то при великих x $T_n > > 2\epsilon x(\mu + \epsilon)^{-1} + h > z(x) + h$. Тому

$$\sum_{n=N_3(x)-N_1(x)}^{\infty} \mathrm{P}\{T_n \leq z(x) + h\} \leq \sum_{n=N_3(x)-N_1(x)}^{\infty} \mathrm{P}\{T_n \leq (\mu - \epsilon)n\}.$$

Згідно з п. а) цієї леми останній вираз прямує до 0, коли $x \to \infty$. За теоремою Блекуела виконується (33) і, отже, (32).

Лему 4 доведено.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — незалежні копії випадкової величини ξ з $m := \mathrm{E}\xi \in (-\infty, 0)$. Покладемо $S_0 := 0$, $S_n := \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Тоді $M_\infty := \sup\limits_{n \geq 0} S_n < \infty$ м. н. та при $x \geq 0$ $\mathrm{E}\tau_x^- < \infty$, де

$$\tau_x^- := \inf\{n : S_n < -x\}.$$

Нехай функція f є невід'ємною, вимірною, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ та існує $x_0 \geq 0$ таке, що f зростає та є вгнутою при $x \geq x_0$. Визначимо нову функцію g так:

$$g(x) := \int\limits_{x_0}^{x} (f(y)/y)dy \quad \text{для} \quad x \geq x_0, \qquad g(x) := 0 \quad \text{для} \quad x < x_0.$$

Покладемо $u(x) := f(e^x)$, $v(x) := g(e^x)$. Нехай функція h правильно змінюється на ∞ з показником $\beta > 0$.

Лема 5. *Для* $x \geq 0$

$$\mathrm{E}u(M_\infty) < \infty \Leftrightarrow \mathrm{E}v\left(\sup_{0 \leq n \leq \tau_x^- - 1} S_n\right) < \infty. \tag{34}$$

Кожна з цих нерівностей гарантує виконання нерівності

$$\mathrm{E}v(\xi^+) < \infty. \tag{35}$$

Мають місце еквівалентності

$$\left(\sup_{0 \leq n \leq \tau^- - 1} S_n\right) h\left(\sup_{0 \leq n \leq \tau^- - 1} S_n\right) < \infty \Leftrightarrow \mathrm{E}h(M_\infty) < \infty \Leftrightarrow \mathrm{E}\xi^+ h(\xi^+) < \infty. \tag{36}$$

Доведення. Без обмеження загальності можемо вважати, що f зростає та є вгнутою на $\mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, а $g(x) = \int_0^x (f(u)/u)du$. Це випливає з того, що замість f можна розглядати функцію $\widehat{f}(x) = f(x + x_0) - f(x_0)$. Ця функція має перераховані властивості, а відношення $\widehat{f}/f$ є відділеним від нуля та обмеженим зверху. Для фіксованого $x \geq 0$ визначимо випадкові величини $N_0 := 0$,

$$N_{i+1} := \inf\{n > N_i : S_n < S_{N_i} - x\}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

при цьому $\tau_x^- = N_1$. Всі $N_i < \infty$ м. н. Покладемо

$$V_k := \sup\{S_{N_k}, S_{N_k+1}, \ldots, S_{N_{k+1}-1}\}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$Z_{k+1} := \sup\{0, \xi_{N_k+1}, \ldots, \xi_{N_k+1} + \ldots + \xi_{N_{k+1}-1}\}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

тоді $V_k = S_{N_k} + Z_{k+1}$ та $M_\infty = \sup\limits_{k \geq 0} V_k$. Зазначимо, що $Z_1, Z_2, \ldots$ — незалежні копії випадкової величини $Z := \sup\limits_{0 \leq i \leq \tau_x^- - 1} S_i$ та за тотожністю Вальда $\mathrm{E}|Z| \leq$ $\leq \mathrm{E} \sum_{k=1}^{\tau_x^-} |\xi_k| = \mathrm{E}\tau_x^- \mathrm{E}|\xi| < \infty$.

Доведемо імплікацію $\Leftarrow$ у (34). Оскільки $S_{N_k} < -kx$, то для фіксованого $\epsilon > 0$

$$\mathrm{P}\{M_\infty > y\} \leq \mathrm{P}\left\{\sup_{k \geq 0}(-kx + Z_{k+1}) > y)\right\} \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\left\{Z_{k+1} > y + k(x+\epsilon)\right\} \leq \sum_{k=[y/(x+\epsilon)]}^{\infty} \mathrm{P}\{Z > k(x+\epsilon)\} \leq$$

$$\leq \int\limits_{[y/(x+\epsilon)]-1}^{\infty} \mathrm{P}\{Z > (x+\epsilon)y\} dy.$$

Останній інтеграл є збіжним, оскільки $\mathrm{E}|Z| < \infty$. Отже,

$$\infty > \mathrm{E}u(M_\infty) = \int\limits_0^\infty u'(z) \mathrm{P}\{M_\infty > z\} dz,$$

якщо

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u'(z) \int\limits_z^\infty \mathrm{P}\{Z > y\} dy dz < \infty.$$

Оскільки $u(x) = v'(x)$, інтегрування частинами показує, що остання нерівність еквівалентна такій:

$$\infty > \int\limits_{-\infty}^{\infty} v'(z) \mathrm{P}\{Z > z\} dz = \mathrm{E}v(Z) = \mathrm{E}v\left(\sup_{0 \leq n \leq \tau_x^- - 1} S_n\right).$$

Доведемо імплікацію $\Rightarrow$ у (34). $\{S_{N_k}, k = 1, 2, \ldots\}$ є випадковим блуканням, що стартує в нулі, з кроком, розподіленим як $S_{\tau_x^-}$. Випадкові вектори $(S_{N_k} - S_{N_{k-1}}, Z_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, незалежні та однаково розподілені, а $\lim\limits_{n \to \infty} S_{N_n} = -\infty$ м. н. Нехай $(\widetilde{M}_1, \widetilde{Q}_1), (\widetilde{M}_2, \widetilde{Q}_2), \ldots$ — незалежні копії вектора $(\widetilde{M} := e^{S_{\tau_x^-}}, \widetilde{Q} := e^Z)$. За побудовою $\mathrm{P}\{\widetilde{M} \leq 1\} = 1$ та $\mathrm{P}\{\widetilde{M} = 1\} = 0$. Тому за наслідком 3.1 [1] нерівність $\mathrm{E}g(\widetilde{Q}) < \infty$ випливає з $\mathrm{E}f\left(\sup\limits_{k \geq 1} \widetilde{M}_1 \ldots \widetilde{M}_{k-1} \widetilde{Q}_k\right) < \infty$. Залишилося зауважити, що $\widetilde{Q} = \exp(Z) = \exp\left(\sup\limits_{0 \leq i \leq \tau_x^- - 1} S_i\right)$. Аналогічно $\sup\limits_{k \geq 1} \widetilde{M}_1 \ldots \widetilde{M}_{k-1} \widetilde{Q}_k =$ $= \exp\left(\sup\limits_{k \geq 0}(S_{N_k} + Z_{k+1})\right) = \exp(M_\infty)$.

Оскільки $\xi_1^+ \leq \sup\limits_{0 \leq n \leq \tau_x^- - 1} S_n$, то (35) випливає з (34).

На початку доведення теореми 3 показано, що знайдеться функція f, яка не спадає, є вгнутою на $\mathbb{R}^+$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ та $h(x) \sim f(e^x)$. Тому перша еквівалентність та імплікація $\Leftarrow$ у другій еквівалентності в (36) випливають з (34). Залишок отримуємо з теореми 3 [8].

Лему 5 доведено.

1. *Iksanov A. M., Rösler U.* Some moment results about the limit of a martingale related to the supercritical branching random walk and perpetuities // www.do.unicyb.kiev.ua/~iksanov.
2. *Iksanov A. M.* Elementary fixed points of the BRW smoothing transforms with infinite number of summands // Stochast. Process. and Appl. – 2004. – **114**. – P. 27 – 50.
3. *Biggins J. D.* Martingale convergence in the branching random walk // J. Appl. Probab. – 1977. – **14**. – P. 25 – 37.
4. *Liu Q.* Sur une équation fonctionnelle et ses applications: une extension du théorème de Kesten – Stigum concernant des processus de branchement // Adv. Appl. Probab. – 1997. – **29**. – P. 353 – 373.
5. *Lyons R.* A simple path to Biggins martingale convergence for branching random walk // Classical and Modern Branching Processes / Eds K. B. Athreya, P. Jagers (IMA Vol. Math. and Appl.). – Berlin: Springer, 1997. – **84**. – P. 217 – 221.
6. *Asmussen S., Hering H.* Branching processes. – Boston: Birkhäuser, 1983. – 480 p.
7. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.
8. *Alsmeyer G.* On generalized renewal measures and certain first passage times // Ann. Probab. – 1992. – **20**. – P. 1229 – 1247.
9. *Spitzer F.* A combinatorial lemma and its applications to probability theory // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**. – P. 323 – 339.
10. *Goldie C. M., Maller R. A.* Stability of perpetuities // Ann. Probab. – 2000. – **28**. – P. 1195 – 1218.
11. *Lai T. L., Siegmund D.* A nonlinear renewal theory with applications to sequential analysis. II // Ann. Statist. – 1979. – **7**. – P. 60 – 76.
12. *Blackwell D.* Extension of a renewal theorem // Pacif. J. Math. – 1953. – **3**. – P. 315 – 320.

Одержано 09.09.2005