УДК 517.9

І. М. Грод (Ін-т математики НАН України, Київ)

УМОВИ ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

For systems of nonlinear differential equations $(dx/dt) = A(x)x + f(t)$ in the Banach space, sufficient conditions for the existence of solutions bounded on the whole real axis $\mathbb{R}$ are obtained.

Для систем нелінійних диференціальних рівнянь $(dx/dt) = A(x)x + f(t)$ у банаховому просторі отримано достатні умови існування обмежених на всій числовій прямій $\mathbb{R}$ розв'язків.

Одним із важливих питань теорії диференціальних рівнянь є питання існування обмежених на $\mathbb{R}$ розв'язків диференціальних систем.

На сьогоднішній день достатньо вивчені лінійні системи вигляду $\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$, де $f(t) \in \mathbb{C}^0(R)$. Зокрема, в роботі [1] показано, що система має єдиний обмежений на $\mathbb{R}$ розв'язок при будь-якому $f(t) \in \mathbb{C}^0(R)$ тоді і тільки тоді, коли існує невироджена обмежена неперервно диференційовна симетрична матриця $S(t)$ така, що

$$\left\langle \left[\dot{S}(t) + S(t)A(t) + A^T(t)S(t)\right]x,\ x \right\rangle \geq \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

при всіх $t \in \mathbb{R}$.

У випадку, коли A — стала матриця, це рівносильно тому, що для її спектра $\sigma(A)$ справедливим є співвідношення

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \neq 0\}.$$

Системи, які мають таку властивість, називають ще регулярними на осі $\mathbb{R}$ [1].

Для нелінійних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x + f(t),$$

де $A(x)$ — неперервна й обмежена на $\mathbb{R}$ матрична функція, виконання співвідношення

$$\sigma(A(x)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \neq 0\},$$

як показують приклади, не гарантує існування обмеженого на $\mathbb{R}$ розв'язку. Тому цікавим є знаходження додаткових умов, які б забезпечили для системи (2) існування таких розв'язків. Розглянемо більш загальну задачу, а для цього введемо деякі позначення.

Нехай $\mathbb{C}^0$ — банахів простір обмежених і неперервних на всій осі $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в скінченновимірному банаховому просторі $\mathbb{E}$ з нормою

$$\|x\|_{\mathbb{C}^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_{\mathbb{E}}$$

і $\mathbb{C}^1$ — банахів простір усіх тих функцій $x \in \mathbb{C}^0$, для кожної з яких $\frac{dx}{dt} \in \mathbb{C}^0$ з нормою

$$\|x\|_{\mathbb{C}^1} = \max\left\{\|x\|_{\mathbb{C}^0}, \left\|\frac{dx}{dt}\right\|_{\mathbb{C}^0}\right\}.$$

Позначимо через $A(x)$ неперервну на $\mathbb{E}$ функцію зі значеннями в $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$, де $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ — банахів простір усіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathbb{E}$.

Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(x)x + f(t). \tag{1}$$

Для отримання основних тверджень введемо до розгляду допоміжні оператори $L: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ і $L_y: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$, $y \in \mathbb{C}^0$, що визначаються рівностями

$$(Lx)(t) = \frac{dx}{dt} - A\big(x(t)\big)x(t),$$

$$(L_y x)(t) = \frac{dx}{dt} - A\big(y(t)\big)x(t),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{C}^1$.

Зауважимо, що завдяки неперервності $A(x)$ на $\mathbb{E}$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$ задані оператори L, L_y є неперервними й обмеженими на $\mathbb{C}^1$. Крім цього, оператор L_y є лінійним оператором при кожному фіксованому $y \in \mathbb{C}^0$. Позначимо через $R(L)$ множину значень оператора L. Зрозуміло, що існування розв'язків для рівняння (1) при кожному $f \in \mathbb{C}^0$ задається рівністю

$$R(L) = \mathbb{C}^0. \tag{2}$$

Для оператора $(L_y x)$ вимагатимемо, щоб виконувались умови:

а) для кожного $y \in \mathbb{C}^0$ оператор $L_y: \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^0$ має обернений неперервний $(L_y)^{-1}: \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$;

б) $\sup\limits_{y \in \mathbb{C}^0} \left\|(L_y)^{-1}\right\|_{\mathbb{L}(C^0, C^1)} < +\infty$.

Сформулюємо основну теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що функція* $A(x)$ *така, що виконуються умови* а) *і* б). *Тоді для кожної функції* $f \in \mathbb{C}^0$ *диференціальне рівняння* (1) *має хоча б один розв'язок* $x \in \mathbb{C}^1$.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A\big(y(t)\big)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

де $y = y(t)$ — довільний елемент простору $\mathbb{C}^0$. Оскільки це рівняння є лінійним, для нього можна застосувати теорію, викладену, наприклад, у роботах [1 – 4]. Завдяки припущенню а) єдиний розв'язок $x \in \mathbb{C}^1$ рівняння (3), що відповідає функції $f \in \mathbb{C}^0$, зображується за допомогою оператора $(L_y)^{-1}$ у вигляді

$$x = (L_y)^{-1} f. \tag{4}$$

Далі, вважаючи, що функцію $f \in \mathbb{C}^0$ зафіксовано, розглянемо відображення $\mathcal{U}_f : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$, яке кожному елементу $y \in \mathbb{C}^0$ ставить у відповідність елемент $(L_y)^{-1} f$ цього ж простору. Це відображення, очевидно, визначається рівністю

$$\mathcal{U}_f = (L_y)^{-1} f, \tag{5}$$

де $y \in \mathbb{C}^0$.

Завдяки (4) і (5) очевидною є така теорема.

Теорема 2. *Кожна нерухома точка відображення* $\mathcal{U}_f : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ *є обмеженим розв'язком диференціального рівняння* (1).

Таким чином, для обґрунтування теореми 1 достатньо довести наступне твердження.

Теорема 3. *У випадку виконання умов* а) *і* б) *для кожного* $f \in \mathbb{C}^0$ *множина нерухомих точок відображення* $\mathcal{U}_f : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ *є непорожньою.*

Перш ніж доводити цю теорему, наведемо деякі властивості відображень $\mathcal{U}_f$, $f \in \mathbb{C}^0$.

Лема 1. *Оператор* $\mathcal{U}_f : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ *є неперервним для кожного* $f \in \mathbb{C}^0$.

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи $y = y(t)$ і $z = z(t)$ простору $\mathbb{C}^0$ і розглянемо диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A\big(y(t)\big)x + f(t), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ \frac{dx}{dt} &= A\big(z(t)\big)x + f(t), \end{aligned} \tag{6}$$

Нехай $x_y = x_y(t)$ і $x_z = x_z(t)$ — відповідні розв'язки цих рівнянь, тобто

$$\begin{aligned} \frac{dx_y(t)}{dt} &\equiv A\big(y(t)\big)x_y(t) + f(t), \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad t \in \mathbb{R}. \\ \frac{dx_z(t)}{dt} &\equiv A\big(z(t)\big)x_z(t) + f(t), \end{aligned} \tag{7}$$

Тоді

$$x_y = (L_y)^{-1} f = \mathcal{U}_f y \tag{8}$$

і

$$x_z = (L_z)^{-1} f = \mathcal{U}_f z. \tag{9}$$

Подамо (7) у вигляді

$$\frac{dx_z(t)}{dt} - A\big(y(t)\big)x_z(t) \equiv \big[A\big(z(t)\big) - A\big(y(t)\big)\big]x_z(t) + f(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Звідси отримуємо

$$\begin{aligned} x_z &= (L_y)^{-1}\big([A(z) - A(y)]x_z + f\big) = \\ &= (L_y)^{-1} f + (L_y)^{-1}\big([A(z) - A(y)]x_z\big) = \\ &= (L_y)^{-1} f + (L_y)^{-1}\big([A(z) - A(y)](L_z)^{-1} f\big). \end{aligned}$$

Отже, на підставі (8) та (9) має місце рівність

$$\mathcal{U}_f z - \mathcal{U}_f y = (L_y)^{-1}([A(z) - A(y)]\,\mathcal{U}_f z). \tag{10}$$

Далі, розглянемо довільну послідовність $(y_n)_{n\geq 1}$ функцій $y_n \in \mathbb{C}^0$, $n \geq 1$, для якої

$$\lim_{n\to\infty} \| y_n - y \|_{\mathbb{C}^0} = 0. \tag{11}$$

Використовуючи отриману рівність (10), записуємо

$$\mathcal{U}_f y_n - \mathcal{U}_f y = (L_y)^{-1}([A(y_n) - A(y)]\,\mathcal{U}_f y_n) \tag{12}$$

для всіх $n \geq 1$.

Враховуючи (11), припущення б) та рівність (5), можемо стверджувати, що існує число $a > 0$ таке, що

$$\sup_{n\geq 0} \| \mathcal{U}_f y_n \|_{\mathbb{C}^0} \leq a.$$

Оскільки

$$\| [A(y_n) - A(y)]\,\mathcal{U}_f y_n \|_{\mathbb{C}^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \| [A(y_n(t)) - A(y(t))](\mathcal{U}_f y_n)(t) \|_{\mathbb{E}} \leq$$

$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} \| A(y_n(t)) - A(y(t)) \|_{\mathbb{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})} \| \mathcal{U}_f y_n \|_{\mathbb{C}^0} \leq$$

$$\leq a \sup_{t\in\mathbb{R}} \| A(y_n(t)) - A(y(t)) \|_{\mathbb{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})}, \quad n \geq 1,$$

операторна функція $A(x)$ є неперервною на E, а банахів простір E — скінченновимірним, то завдяки (11)

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}} \| A(y_n(t)) - A(y(t)) \|_{\mathbb{L}(\mathbb{E},\mathbb{E})} = 0.$$

Тоді на підставі умови б)

$$\lim_{n\to\infty} \| [A(y_n) - A(y)]\,\mathcal{U}_f y_n \|_{\mathbb{C}^0} = 0$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \| (L_y)^{-1}([A(y_n) - A(y)]\,\mathcal{U}_f y_n) \|_{\mathbb{C}^0} = 0.$$

Звідси та з (12) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \| \mathcal{U}_f y_n - \mathcal{U}_f y \|_{\mathbb{C}^0} = 0. \tag{13}$$

Отже, якщо виконується співвідношення (11), то має місце також рівність (13). Це означає, що відображення $\mathcal{U}_f\colon \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$ є неперервним у точці $y \in \mathbb{C}^0$. Оскільки точку $y \in \mathbb{C}^0$ було вибрано довільно, то $\mathcal{U}_f$ є неперервним на $\mathbb{C}^0$ для кожного $f \in \mathbb{C}^0$.

Лему 1 доведено.

Далі, позначимо через $\mathbb{B}_r$ замкнену кулю

$$\{ x \in \mathbb{C}^0 : \| x \|_{\mathbb{C}^0} \leq r \}$$

і розглянемо число

$$d = \sup_{y\in\mathbb{C}^0} \left\| (L_y)^{-1} \right\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)}.$$

Завдяки умові б) це число є скінченним.

Лема 2. *Замкнена куля* $\mathbb{B}_{d\|f\|_{C^0}}$ ($d\|f\|_{C^0}$ — *радіус цієї кулі*) *є інваріантною по відношенню до оператора* $\mathcal{U}_f$, *тобто*

$$\| \mathcal{U}_f y \|_{C^0} \le \| d\|f\|_{C^0} \|$$

для всіх $y\in\mathbb{C}^0$.

Справедливість цієї леми випливає зі співвідношення

$$\| \mathcal{U}_f y \|_{C^0} = \| (L_y)^{-1} f \|_{C^0} \le \left\| (L_y)^{-1} \right\|_{L(\mathbb{C}^0,\mathbb{C}^1)} \|f\|_{C^0} \le d\|f\|_{C^0},$$

яке справджується для всіх $y\in\mathbb{C}^0$ та $f\in\mathbb{C}^0$ завдяки умові б) та рівності (5).

***Зауваження* 1.** Якби відображення $\mathcal{U}_f$ на замкненій кулі $\mathbb{B}_{d\|f\|_{C^0}}$ було цілком неперервним, то до нього можна було б застосувати теорему Шаудера про нерухому точку [5].

Однак, як показує наступний приклад, оператор $\mathcal{U}_f$ такої властивості не має.

***Приклад* 1.** Нехай $\mathbb{E}=\mathbb{R}$. Розглянемо функцію

$$a(x) = -2+\sin(x), \quad x\in\mathbb{R},$$

та диференціальне рівняння вигляду (1)

$$\frac{dx}{dt} = (-2+\sin(x))x + f(t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Будемо вважати, що $f(t)\equiv 1$. Розглянемо також рівняння вигляду (3)

$$\frac{dx}{dt} = (-2+\sin(y(t)))x + f(t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

Завдяки тому, що

$$-3 \le a(y(t)) \le -1$$

для всіх $t\in\mathbb{R}$, для оператора $L_y:\mathbb{C}^1\to\mathbb{C}^0$, що визначається рівністю

$$(L_y x)(t) = \frac{dx}{dt} - (-2+\sin(y(t)))x(t) + f(t), \quad x\in\mathbb{R},$$

виконуються умови а), б) теореми 1.

Покажемо, що оператор $\mathcal{U}_f$, визначений співвідношенням (5), при $f(t)\equiv 1$ (далі будемо позначати його $\mathcal{U}_1$) не є цілком неперервним.

Розглянемо довільне число $\varepsilon\in(0,1)$, функцію

$$y_{n,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \varepsilon\cos(t), & \text{якщо } t\in\left[2n\pi-\dfrac{\pi}{2},\, 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right], \\ 0, & \text{якщо } t\in\mathbb{R}\setminus\left[2n\pi-\dfrac{\pi}{2},\, 2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right], \end{cases} \quad n\in\mathbb{Z},$$

і диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = (-2+\sin(y_{n,\varepsilon}(t)))x + 1, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{14}$$

Нехай $x_{n,\varepsilon} = x_{n,\varepsilon}(t)$ — розв'язок рівняння (14). Легко переконатись у тому, що

$$x_{n,\varepsilon}(t) = x_{0,\varepsilon}(t - 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x_{n,\varepsilon} \neq x_{m,\varepsilon}, \quad \text{якщо} \quad n \neq m,$$

і

$$\lim_{|t| \to \infty} x_{n,\varepsilon}(t) = \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Завдяки (15) та тому, що $x_{n,\varepsilon}(t)$ не може дорівнювати тотожно $\frac{1}{2}$, можна підібрати таке достатньо велике число $n_0 \in \mathbb{N}$, що виконуватиметься нерівність

$$\inf_{n,m \in \{kn_0 : k \in \mathbb{Z}\} n \neq m} \| x_{n,\varepsilon} - x_{m,\varepsilon} \|_{C^0} > 0. \tag{16}$$

Оскільки

$$x_{n,\varepsilon} + \mathcal{U}_1 y_{n,\varepsilon}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

і множина

$$\{ y_{n,\varepsilon} : n \in n_0 \mathbb{Z} \}$$

є обмеженою в C^0, завдяки (16) множина

$$\{ x_{n,\varepsilon} : n \in n_0 \mathbb{Z} \} = \mathcal{U}_1 \{ y_{n,\varepsilon} : n \in n_0 \mathbb{Z} \}$$

не є передкомпактною в C^0 (ні для якого $\varepsilon \in (0, 1)$). Це означає, що оператор $\mathcal{U}_1$ не є цілком неперервним.

Лема 3. *Відображення* $\mathcal{U}_f : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$, $f \in \mathbb{C}^0$, *є* c*-неперервним.*

Доведення. Зауважимо, що в даному випадку, враховуючи лінійність оператора (L_y) і те, що $\dim E < \infty$, оператор $(L_y)^{-1} : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$ буде c-неперервним [6–11].

Розглянемо довільні $y \in C^0$ і послідовність $y_k \in C^0$, $k \in \mathbb{N}$, для яких

$$y_k \xrightarrow{\text{лок.}, C^0} y \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{17}$$

Нехай $x_y \in C^1$ і $x_{y_k} \in C^1$, $k \in \mathbb{N}$, — такі функції, що

$$\frac{dx_y}{dt} \equiv A(y(t)) x_y(t) + f(t) \tag{18}$$

і

$$\frac{dx_{y_k}}{dt} \equiv A(y_k(t)) x_{y_k}(t) + f(t).$$

Подамо друге із цих співвідношень у вигляді

$$\frac{dx_{y_k}}{dt} \equiv A(y(t)) x_{y_k}(t) + [A(y_k(t)) - A(y(t))] x_{y_k}(t) + f(t). \tag{19}$$

Згідно з припущеннями а) та б), а також (18), (19) отримуємо

$$x_y = (L_y)^{-1} f$$

і

$$x_{y_k} = (L_y)^{-1}(f + [A(y_k(t)) - A(y(t))]x_{y_k}(t)), \quad k \geq 1.$$

На підставі (5) та леми 2 послідовність $(x_{y_k})_{k \geq 1}$ є обмеженою. Тому завдяки (17), неперервності $A(x)$ на E та скінченній розмірності простору E

$$[A(y_k(t)) - A(y(t))]x_{y_k}(t) \xrightarrow{\text{лок., } C^0} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Тому

$$f + [A(y_k(t)) - A(y(t))]x_{y_k}(t) \xrightarrow{\text{лок., } C^0} f \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Звідси з урахуванням c-неперервності оператора $(L_y)^{-1} : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^1$ отримуємо

$$x_{y_k} \xrightarrow{\text{лок., } C^0} x_y \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{20}$$

Оскільки на підставі (5)

$$x_y = \mathcal{U}_f y = (L_y)^{-1} f$$

і

$$x_{y_k} = \mathcal{U}_f y_k = (L_{y_k})^{-1} f, \quad r \geq 1,$$

то

$$\mathcal{U}_f y_k \xrightarrow{\text{лок., } C^0} \mathcal{U}_f y \quad \text{при} \quad k \to \infty, \tag{21}$$

що й доводить лему 3.

Зауважимо, що завдяки (20) виконується не лише співвідношення (21), а й співвідношення

$$\mathcal{U}_f y_k \xrightarrow{\text{лок., } C^1} \mathcal{U}_f y \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Далі наведемо ще одну властивість.

Лема 4. *Відображення* $\mathcal{U}_f : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$, $f \in \mathbb{C}^0$, *є* c*-цілком неперервним.*

Справді, завдяки припущенню б) та рівності (5) виконується не тільки нерівність

$$\| \mathcal{U}_f y \|_{C^0} \leq d \| f \|_{C^0}$$

для всіх $y \in \mathbb{C}^0$ та $f \in \mathbb{C}^0$, а й нерівність

$$\| \mathcal{U}_f y \|_{C^0} \leq d \| f \|_{C^0}, \quad y, f \in \mathbb{C}^0.$$

Тому

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(\mathcal{U}_f y)(t)}{dt} \right\| \leq d \| f \|_{C^0}$$

для довільної функції $y \in C^0$. Ця нерівність на підставі теореми Арцела [12] означає, що множина

$$\{ (\mathcal{U}_f y)|_{[a,b]} : y \in C^0 \}$$

є передкомпактною в $C^0[a, b]$ для довільних $a, b \in \mathbb{R} (a < b)$ ($z|_{[a,b]}$ — звуження функції $z = z(t)$ на відрізок $[a, b]$).

Звідси та з c-неперервності відображення $\mathcal{U}_f : \mathbb{C}^0 \to \mathbb{C}^0$, $f \in \mathbb{C}^0$, випливає, що ці відображення є c-цілком неперервними.

Лему 4 доведено.

***Доведення теореми* 3.** У випадку виконання припущень а) і б) для кожного $f \in \mathbb{C}^0$ на підставі лем 1, 2

$$\mathcal{U}_f B_{2d\|f\|_{C^0}} \subset B_{d\|f\|_{C^0}},$$

і відображення $\mathcal{U}_f : B_{2d\|f\|_{C^0}} \to B_{d\|f\|_{C^0}}$ є c-цілком неперервним.

Як відомо [11], якщо оператор $L : B_{r_1} \to B_{r_2}$ є c-цілком неперервним і $r_1 > > r_2$, то L має в B_{r_2} хоча б одну нерухому точку. Тому в замкненій кулі $B_{d\|f\|_{C^0}}$ відображення $\mathcal{U}_f$ також має хоча б одну нерухому точку.

Теорему доведено.

***Приклад* 2.** Розглянемо неперервну на $\mathbb{R}$ функцію

$$a(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad x \le 1, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо} \quad 1 < x \le \dfrac{3}{2}, \\ 1 - \dfrac{1}{2x}, & \text{якщо} \quad x > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, що

$$\frac{2}{3} \le a(x) \le 1 \tag{22}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = a(x)x + f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Завдяки (22) для (23) виконуються вимоги, зазначені в припущеннях а) та б).

Нехай $f(t) \equiv -1 \ne 0$. Оскільки тоді

$$a(x)x - 1 = 0$$

для всіх $x \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$, то рівняння (23) при $f(t) \equiv -1 \ne 0$ має нескінченне число розв'язків $x(t) \equiv C$, де $C \in \left[1, \dfrac{3}{2}\right]$. Отже, рівняння вигляду (1) можуть мати для деяких $f \in C^0$ не єдиний розв'язок $x \in C^1$.

***Зауваження* 2.** Вимоги, що містяться у припущеннях а) і б), справджуються для диференціального рівняння (1) у випадку $E = \mathbb{R}$, якщо:

1) функція є неперервною на $\mathbb{R}$;

2) виконується співвідношення $\inf\limits_{t \in \mathbb{R}} |a(x)| > 0$.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 535 с.

3. *Массера Х. Л., Шефрер Х. Х.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. – М.: Мир, 1970. – 456 с.
4. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. – М.: Наука, 1970. – 352 с.
5. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1997. – 232 с.
6. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. – **116** (**158**), № 4 (12). – С. 483–501.
7. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Душанбе, 1978. – 289 с.
8. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. – 1986. – **130** (**172**), № 1 (5). – С. 86–104.
9. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 5. – С. 660–662.
10. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. – 1987. – **42**, № 2. – С. 262–267.
11. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 201–205.
12. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

Одержано 07.04.2005