УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. нац. ун-т,
Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк),
В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т),
С. А. Пичугов (Днепропетр. нац. трансп. ун-т)

ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИЙ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ, ЗАДАННЫХ НА ОСИ И ПОЛУОСИ

We obtain new exact inequalities of the form

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \leq K \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_s^{1-\alpha}$$

in the following cases: for functions defined on the real line $\mathbf{R}$ or the halfline $\mathbf{R}_+$ in the case

$$r = 2, \; k = 0, \; p \in (0, \infty), \; q \in (0, \infty], \; q > p, \; s = 1;$$

for functions defined on the real line $\mathbf{R}$ in the case

$$r = 2, \; k = 1, \; q \in [2, \infty), \; p = \infty, \; s = 1;$$

for functions of constant signs defined on $\mathbf{R}$ or $\mathbf{R}_+$ in the case

$$r = 2, \; k = 0, \; p \in (0, \infty), \; q \in (0, \infty], \; q > p, \; s = \infty;$$

for functions of constant signs defined on $\mathbf{R}$ or $\mathbf{R}_+$ in the case

$$r = 2, \; k = 1, \; p \in (0, \infty), \; q = s = \infty.$$

Отримано нові точні нерівності вигляду

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \leq K \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_s^{1-\alpha}$$

для таких функцій: заданих на осі $\mathbf{R}$ або на півосі $\mathbf{R}_+$ у випадку

$$r = 2, \; k = 0, \; p \in (0, \infty), \; q \in (0, \infty], \; q > p, \; s = 1;$$

заданих на осі $\mathbf{R}$ у випадку

$$r = 2, \; k = 1, \; q \in [2, \infty), \; p = \infty, \; s = 1,$$

а також для знакосталих на $\mathbf{R}$ або на $\mathbf{R}_+$ у випадках

$$r = 2, \; k = 0, \; p \in (0, \infty), \; q \in (0, \infty], \; q > p, \; s = \infty$$

та

$$r = 2, \; k = 1, \; p \in (0, \infty), \; q = s = \infty.$$

Введение. Пусть $L_p(G)$ (G — вещественная ось $\mathbf{R}$, полуось $\mathbf{R}_+$ или конечный отрезок $[a, b]$) — пространство измеримых функций $x: G \to \mathbf{R}$ таких, что $\| x \|_p = \| x \|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\| x \|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G | x(t) |^p dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai}\sup\limits_{t \in G} | x(t) |, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Для $s \in [1, \infty]$ и $r \in \mathbf{N}$ обозначим через $L_s^r(G)$ множество функций $x: G \to$ $\to \mathbf{R}$ таких, что $x^{(r-1)}$ локально абсолютно непрерывна и $x^{(r)} \in L_s(G)$. Если $p \in$ $\in (0, \infty]$, то положим

$$L^r_{p,s}(G) := L_p(G) \cap L^r_s(G), \qquad W^r_{p,s}(G) := \left\{ x \in L^r_{p,s}(G) : \left\| x^{(r)} \right\|_s \le 1 \right\}.$$

Данная работа посвящена отысканию точных констант в неравенствах типа Колмогорова – Надя

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le K \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_s^{1-\alpha}, \tag{1}$$

где $r \in \mathbf{N}$, $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$, $\alpha \in (0,1)$, для функций малой гладкости ($r = 2$), заданных на оси и полуоси.

Неравенства вида (1), особенно с неулучшаемыми константами, используются во многих областях математики, и, начиная с работ Э. Ландау [1], Ж. Адамара [2], Г. Харди и Дж. Литтлвуда [3], Г. Харди, Дж. Литтлвуда и Д. Полиа [4], Г. Е. Шилова [5], А. Н. Колмогорова [6], Б. Секефалви-Надя [7], отысканию точных констант в таких неравенствах посвящено значительное количество работ. Обзоры полученных в этом направлении результатов и необходимые ссылки можно найти в [8 – 10].

Известно [11], что в случае $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$ неравенство (1) выполняется для всех функций $x \in L^r_{p,s}(G)$, если и только если

$$\frac{r-k}{p} + \frac{k}{s} \ge \frac{r}{q}, \tag{2}$$

и при этом

$$\alpha = \frac{r - k + 1/q - 1/s}{r + 1/p - 1/s}.$$

Символом $K^{k,r}_{q,p,s}(G)$ обозначим точную константу в неравенстве (1), т. е.

$$K^{k,r}_{q,p,s}(G) := \sup_{\substack{x \in L^r_{p,s}(G) \\ x^{(r)} \ne 0}} \frac{\left\| x^{(k)} \right\|_q}{\| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_s^{1-\alpha}}.$$

В работах [12, 13] найдены точные константы $K^{0,2}_{\infty,p,1}(G)$ в случае $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$, $p \in [1, \infty]$. Метод доказательства в [12] основан на общей теории экстремальных задач. В работе [14] найдены точные константы $K^{k,2}_{\infty,p,\infty}(\mathbf{R})$ в случае $k = 0, 1$, $p > 0$. В этих же случаях в работе [15] вычислены точные константы $K^{k,2}_{\infty,p,\infty}(\mathbf{R}_+)$.

В настоящей работе методом сравнения перестановок найдены точные константы $K^{0,2}_{q,p,1}(G)$ в случае $G = \mathbf{R}$ или $G = \mathbf{R}_+$ для любых $q, p \in (0, \infty]$, $q > p$ (теоремы 2 и 3). С использованием неравенства Харди – Литтлвуда (см. (31)) вычислены также константы $K^{1,2}_{q,\infty,1}(\mathbf{R})$ для $q \ge 2$ (теорема 4). Методом сравнения перестановок получены также (теоремы 5 – 7) точные неравенства вида (1) для знакопостоянных функций, заданных на оси или полуоси, в случаях:

1) $r = 2$, $k = 0$, $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$, $q > p$, $s = \infty$;

2) $r = 2$, $k = 1$, $p \in (0, \infty)$, $q = s = \infty$.

Символом $r(x, t)$, $t \ge 0$, будем обозначать перестановку функции $|x(t)|$ (см., например, [16], §1.3).

Неравенства для функций с суммируемой второй производной. Следующая теорема получена в [12]. Ниже приведено ее доказательство методом, отличным от того, который применялся в [12]. Некоторые факты из этого доказательства будут использованы при доказательстве теоремы 2.

Теорема 1. *Пусть* $p \in (0, \infty)$. *Для любой функции* $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R})$ *имеет место неравенство*

$$\|x\|_\infty \le \left(\frac{p+1}{8}\right)^{1/(p+1)} \|x\|_p^{p/(p+1)} \|x''\|_1^{1/(p+1)}. \tag{3}$$

Неравенство (3) *точное на классе* $L^2_{p,1}(\mathbf{R})$.

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что $\|x\|_\infty = x(0)$. Рассмотрим экстремальную задачу

$$x(0) \to \sup \tag{4}$$

на классе W функций $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R})$, удовлетворяющих условиям

$$\|x''\|_1 = 1, \qquad \|x\|_p = 1. \tag{5}$$

Известно (см., например, [10], §1.7), что для любых $q \ge p$

$$K^{0,2}_{q,p,1}(\mathbf{R}) = \sup\left\{\|x\|_q : x \in W\right\}, \tag{6}$$

в частности

$$K^{0,2}_{\infty,p,1}(\mathbf{R}) = \sup\left\{x(0) : x \in W\right\}. \tag{7}$$

Покажем, что для функции $x \in W$ найдутся числа $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1/2$, такие, что

$$-\beta \le x'(t) \le \alpha, \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

Действительно, из условий существования (2) неравенств вида (1) следует, что для любого $q \ge 2p/(p+1)$ существует такая константа $C > 0$, что для всех функций $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R})$ выполнено неравенство

$$\|x'\|_q \le C\|x\|_p^{\alpha_1}\|x''\|_1^{1-\alpha_1}, \tag{9}$$

где $\alpha_1 = [q(1+1/p)]^{-1}$. Поэтому для функции $x \in W$ необходимо выполняется включение $x' \in L_q(\mathbf{R})$ при $q \ge 2p/(p+1)$ и, следовательно, найдутся такие последовательности $t'_n \to \infty$ и $t''_n \to -\infty$ (при $n \to \infty$), что

$$\lim_{n\to\infty} x'(t'_n) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} x'(t''_n) = 0.$$

Отсюда, в силу условия $\bigvee_{-\infty}^{\infty} x' = \|x''\|_1 = 1$, следует (8).

Зафиксируем $\alpha, \beta > 0$ такие, что $\alpha + \beta = 1/2$, и рассмотрим класс $W(\alpha, \beta)$ функций $x \in W$, удовлетворяющих условиям (8). Из изложенного выше следует равенство

$$W = \bigcup\left\{W(\alpha,\beta) : \alpha,\beta > 0,\ \alpha+\beta = 1/2\right\}. \tag{10}$$

Зафиксируем $\gamma > 0$ и построим функцию

$$\varphi(t) = \varphi(t;\alpha,\beta) := \begin{cases} \alpha t + \alpha\gamma, & \text{если } t \in [-\gamma, 0], \\ -\beta t + \alpha\gamma, & \text{если } t \in [0, \gamma\alpha/\beta], \\ 0, & \text{если } t \notin [-\gamma, \gamma\alpha/\beta]. \end{cases}$$

Выберем теперь γ так, чтобы $\|\varphi\|_p = 1$. Нетрудно видеть, что это условие можно записать в виде

$$\alpha^p \frac{\gamma^{p+1}}{p+1} + \beta^p \frac{(\alpha\gamma/\beta)^{p+1}}{p+1} = 1. \tag{11}$$

Заметим, что $\varphi'(t;\alpha,\beta) = \alpha$ для $t \in (-\gamma, 0)$ и $\varphi'(t;\alpha,\beta) = -\beta$ для $t \in \in (0, \gamma\alpha/\beta)$.

Докажем неравенство

$$\sup\{x(0) : x \in W(\alpha,\beta)\} \le \varphi(0;\alpha,\beta). \tag{12}$$

Действительно, пусть для некоторой функции $x \in W(\alpha,\beta)$ будет $x(0) > > \varphi(0;\alpha,\beta)$. Тогда вследствие (8) выполняется неравенство

$$x(t) > \varphi(t;\alpha,\beta), \quad t \in [-\gamma, \gamma\alpha/\beta].$$

Следовательно, $\|x\|_p > \|\varphi\|_p = 1$, что противоречит определению класса $W(\alpha,\beta)$.

Из (7), (10) и (12) следует, что

$$K^{0,2}_{\infty,p,1}(\mathbf{R}) \le \sup\{\varphi(0;\alpha,\beta) : \alpha,\beta > 0,\ \alpha+\beta = 1/2\}. \tag{13}$$

Заметим, что $\varphi(0;\alpha,\beta) = \alpha\gamma$. Воспользуемся условием (11) для того, чтобы выразить $\alpha\gamma$ через α и β. Для этого переписываем (11) в виде

$$\frac{(\alpha\gamma)^{p+1}}{p+1}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = 1,$$

и, учитывая, что $\alpha + \beta = 1/2$, получаем

$$\varphi(0;\alpha,\beta) = \alpha\gamma = [2\alpha\beta(p+1)]^{1/(p+1)}.$$

Ввиду последнего равенства ясно, что точная верхняя грань в правой части (13) достигается при $\alpha = \beta = 1/4$ и

$$K^{0,2}_{\infty,p,1}(\mathbf{R}) \le \varphi(0;1/4,1/4) = \left(\frac{p+1}{8}\right)^{1/(p+1)}. \tag{14}$$

Пусть $h > 0$ и $\varphi_h(t) = \varphi_h(t;1/4,1/4)$ — функция Стеклова с шагом h от функции $\varphi(t) = \varphi(t;1/4,1/4)$. Очевидно, что $\varphi_h \in L^2_{p,1}(\mathbf{R})$ и

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi_h(0)}{\|\varphi_h\|_p^{p/(p+1)}\|\varphi_h''\|_1^{1/(p+1)}} = \frac{\varphi(0)}{\|\varphi\|_p^{p/(p+1)}} = \left(\frac{p+1}{8}\right)^{1/(p+1)}.$$

Следовательно, в (14) имеет место знак равенства.

Теорема доказана.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $q, p \in (0,\infty)$, $q > p$. *Для любой функции* $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R})$ *выполнено неравенство*

$$\|x\|_q \le \left[\left(\frac{p+1}{8}\right)^{(q+1)/(p+1)} \frac{8}{q+1}\right]^{1/q} \|x\|_p^{(q+1)p/[(p+1)q]}\|x''\|_1^{1-(q+1)p/[(p+1)q]}. \tag{15}$$

Неравенство (15) *точное на классе* $L^2_{p,1}(\mathbf{R})$.

Доказательство. Согласно (6)

$$K^{0,2}_{q,p,1}(\mathbf{R}) = \sup\left\{\|x\|_q : x \in W\right\}.$$

Зафиксируем $x \in W$. Вследствие (10) найдутся такие $\alpha,\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1/2$, что $x \in W(\alpha,\beta)$. Покажем, что

$$\|x\|_q \le \|\varphi(\cdot;\alpha,\beta)\|_q, \tag{16}$$

где γ в определении $\varphi = \varphi(\cdot;\alpha,\beta)$ выбрано так, что $\|\varphi(\cdot;\alpha,\beta)\|_p = 1$.

Поскольку $x \in W$ и, значит, $\|x\|_p = 1$, то

$$\int_0^\infty r^p(x,t)dt = \|x\|_p^p = \|\varphi(\cdot;\alpha,\beta)\|_p^p = \int_0^\infty r^p(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),t)dt$$

(напомним, что символом $r(x,t)$ обозначена перестановка функции $|x(t)|$). Докажем, что для любого $\xi \ge 0$

$$\int_0^\xi r^p(x,t)dt \le \int_0^\xi r^p(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),t)dt. \tag{17}$$

Отсюда в силу теоремы Харди – Литтлвуда (см., например, предложение 1.3.10 из [16]) при любом $q > p$ получим

$$\|x\|_q^q = \int_0^\infty r^q(x,t)dt \le \int_0^\infty r^q(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),t)dt = \|\varphi(\cdot;\alpha,\beta)\|_q^q,$$

и (16) будет доказано.

Для доказательства (17) заметим, что вследствие (12)

$$r(x,0) \le r(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),0).$$

Установим, что разность

$$\Delta(t) := r(x,t) - r(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),t)$$

меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза.

Чтобы доказать этот факт, заметим, что в силу теоремы 1 для любого $y \in \in [0,\|x\|_\infty)$ найдутся точки t_i, $i = 1,2,\ldots,m$, $m \ge 2$ (по крайней мере, одна на промежутке возрастания x и одна на промежутке убывания x), и ровно две точки y_j такие, что

$$y = |x(t_i)| = \varphi(y_j;\alpha,\beta).$$

При этом на основании определения класса $W(\alpha,\beta)$ и функции $\varphi(\cdot;\alpha,\beta)$ для любой такой пары точек (t_i, y_j) (из которых t_i расположена на промежутке возрастания (убывания) функции x, а y_j — на промежутке возрастания (убывания функции $\varphi(\cdot;\alpha,\beta)$) имеет место неравенство

$$|x'(t_i)| \le |\varphi'(y_j;\alpha,\beta)|.$$

Поэтому, в силу теоремы о производной перестановки (см., например, [16], предложение 1.3.2), если точки θ_1 и θ_2 выбраны так, что

$$y = r(x,\theta_1) = r(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),\theta_2),$$

то

$$|r'(x,\theta_1)| = \left[\sum_{i=1}^m |x'(t_i)|^{-1}\right]^{-1} \le \left[\sum_{j=1}^2 |\varphi'(y_j;\alpha,\beta)|^{-1}\right]^{-1} = |r'(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),\theta_2)|.$$

Отсюда следует, что разность Δ меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза. Рассмотрим интеграл

$$I(\xi) := \int_0^{\xi}\left[r^p(x,t) - r^p(\varphi(\cdot;\alpha,\beta),t)\right]dt.$$

Из изложенного выше следует, что $I(0) = I(\infty) = \lim_{\xi\to\infty} I(\xi) = 0$, причем $I'(t)$ меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза. Значит, $I(\xi) \le 0$ для $\xi \ge$ ≥ 0 и неравенство (17) доказано. Тем самым доказано и неравенство (16).

Из (6), (10) и (16) следует, что

$$K^{0,2}_{q,p,1}(\mathbf{R}) \le \sup\left\{\|\varphi(\cdot;\alpha,\beta)\|_q : \alpha,\beta > 0,\ \alpha+\beta = 1/2\right\}. \tag{18}$$

Ясно, что

$$\|\varphi(\cdot;\alpha,\beta)\|_q = \left[\alpha^q\frac{\gamma^{q+1}}{q+1} + \beta^q\frac{(\alpha\gamma/\beta)^{q+1}}{q+1}\right]^{1/q} = \left[\frac{(\alpha\gamma)^{q+1}}{q+1}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\right]^{1/q},$$

где γ удовлетворяет (11). Учитывая, что $\alpha+\beta = 1/2$, переписываем условие (11) (как и при доказательстве теоремы 1) в виде

$$\alpha\gamma = \left[2\alpha\beta(p+1)\right]^{1/(p+1)}.$$

Поэтому

$$\|\varphi(\cdot;\alpha,\beta)\|_q = \left\{\frac{[2\alpha\beta(p+1)]^{(q+1)/(p+1)}}{2\alpha\beta(q+1)}\right\}^{1/q},$$

и теперь в силу условия $q > p$ очевидно, что супремум в (18) достигается при $\alpha = \beta = 1/4$. При этом

$$K^{0,2}_{q,p,1}(\mathbf{R}) \le \left[\left(\frac{p+1}{8}\right)^{(q+1)/(p+1)}\frac{8}{q+1}\right]^{1/q}. \tag{19}$$

Пусть $h > 0$ и $\varphi_h(t) = \varphi_h(t;1/4,1/4)$ — функция Стеклова с шагом h от функции $\varphi(t) = \varphi(t;1/4,1/4)$. Ясно, что $\varphi_h \in L^2_{p,1}(\mathbf{R})$ и

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|\varphi_h\|_q}{\|\varphi_h\|_p^{(q+1)p/[(p+1)q]}\|\varphi_h''\|_1^{1-(q+1)p/[(p+1)q]}} =$$

$$= \frac{\|\varphi\|_q}{\|\varphi_h\|_p^{(q+1)p/[(p+1)q]}} = \left[\left(\frac{p+1}{8}\right)^{(q+1)/(p+1)}\frac{8}{q+1}\right]^{1/q}.$$

Таким образом, в (19) имеет место знак равенства.

Теорема доказана.

Установим аналог теоремы 2 для функций, заданных на полуоси.

Теорема 3. *Пусть* $p, q \in (0,\infty)$, $q > p$. *Имеют место точные на классе функций* $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R}_+)$ *неравенства*

$$\|x\|_q \le \frac{(p+1)^{(q+1)/[q(p+1)]}}{(q+1)^{1/q}}\|x\|_p^{(q+1)p/[q(p+1)]}\|x''\|_1^{1-(q+1)p/[q(p+1)]} \tag{20}$$

и

$$\|x\|_\infty \le (p+1)^{1/(p+1)}\|x\|_p^{p/(p+1)}\|x''\|_1^{1-p/(p+1)}. \tag{21}$$

Напомним, что неравенство (21) было доказано в [13].

Доказательство. Зафиксируем $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R}_+)$. Вследствие однородности (20) и (21) можно считать, что

$$\bigvee_0^\infty x' = \|x''\|_1 = 1, \tag{22}$$

и для функций, удовлетворяющих условию (22), доказывать неравенства

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^{(q+1)p/[q(p+1)]}} \le \frac{(p+1)^{(q+1)/[q(p+1)]}}{(q+1)^{1/q}} \tag{23}$$

и

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_p^{p/(p+1)}} \le (p+1)^{1/(p+1)}. \tag{24}$$

Из условий существования (2) неравенств вида (1) следует, что для любого $q \ge 2p/(p+1)$ существует такая константа $C > 0$, что для всех функций $x \in L^2_{p,1}(\mathbf{R}_+)$ выполнено неравенство (9). Поэтому $x' \in L_q(\mathbf{R}_+)$ при $q \ge 2p/(p+1)$ и, следовательно, найдется последовательность $t_n \to \infty$ (при $n \to \infty$) такая, что $\lim_{n\to\infty} x'(t_n) = 0$. Отсюда в силу (22) следует, что

$$|x'(t)| \le 1, \quad t \in \mathbf{R}_+. \tag{25}$$

Зафиксируем $\gamma > 0$ и рассмотрим функцию

$$\phi_\gamma(t) := \begin{cases} \gamma - t, & \text{если } t \in [0, \gamma], \\ 0, & \text{если } t \ge \gamma. \end{cases}$$

Ясно, что $\bigvee_0^\infty \phi'_\gamma = 1$ и $|\phi'_\gamma(t)| = 1$ для $t \in (0, \gamma)$.

Выберем теперь $\gamma > 0$ из условия

$$\|x\|_p = \|\phi_\gamma\|_p \tag{26}$$

и покажем, что

$$\|x\|_\infty \le \|\phi_\gamma\|_\infty. \tag{27}$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\|x\|_\infty = x(0)$. Теперь (27) следует из (25). Действительно, предположив, что (27) не выполняется, и приняв во внимание (25), придем к выводу, что $x(t) > \phi_\gamma(t)$, $t \in (0, \gamma)$, что противоречит (26).

Отметим, что из (27) и (26) уже следует (24). Действительно, нетрудно видеть, что $\|\phi_\gamma\|_\infty = \gamma$ и

$$\|\phi_\gamma\|_p = \frac{\gamma^{(p+1)/p}}{(p+1)^{1/p}}. \tag{28}$$

Поэтому, используя (27) и (26), получаем

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_p^{p/(p+1)}} \le \frac{\|\phi_\gamma\|_\infty}{\|\phi_\gamma\|_p^{p/(p+1)}} = \gamma\left(\frac{p+1}{\gamma^{p+1}}\right)^{1/(p+1)} = (p+1)^{1/(p+1)}.$$

Докажем, что при всех $q > p$

$$\|x\|_q \le \|\phi_\gamma\|_q. \tag{29}$$

Для этого (как и при доказательстве теоремы 2) достаточно установить неравенство

$$\int_0^{\xi} r^p(x,t)\,dt \;\leq\; \int_0^{\xi} r^p(\phi_\gamma,t)\,dt, \qquad \xi > 0. \tag{30}$$

Вследствие (27) $r(x,0) \leq r(\phi_\gamma, 0)$. Поэтому (30) будет следовать из того, что разность $\Delta(t) := r(x,t) - r(\phi_\gamma, t)$ меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза.

Для доказательства этого факта, в свою очередь, заметим, что из (25) в силу теоремы о производной перестановки следует, что $|r'(x,t)| \leq 1$ для всех $t \in \mathbf{R}_+$. С другой стороны, $r'(\phi_\gamma, t) = -1$, $t \in (0,\gamma)$, так как $r(\phi_\gamma, t) = \phi_\gamma(t)$. Отсюда непосредственно следует, что разность $\Delta(t)$ меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза, и (30) доказано.

Используя (29), (26) и (28), получаем

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^{(q+1)p/[q(p+1)]}} \;\leq\; \frac{\|\phi_\gamma\|_q}{\|\phi_\gamma\|_p^{(q+1)p/[q(p+1)]}} \;=$$

$$= \;\frac{\gamma^{(q+1)/q}}{(q+1)^{1/q}}\left[\frac{(p+1)^{1/p}}{\gamma^{(p+1)/p}}\right]^{(q+1)p/[q(p+1)]} \;=\; \frac{(p+1)^{(q+1)/[q(p+1)]}}{(q+1)^{1/q}}.$$

Неравенство (23), а значит, и (20) доказаны.

Точность неравенств теоремы 3 проверяется с помощью семейства функций Стеклова $(\phi_\gamma)_h$, $h > 0$, так же, как и при доказательстве теоремы 2.

Теорема доказана.

Приведем еще одно неравенство для функций, заданных на оси, которое получается с помощью следующего неравенства Харди – Литтлвуда [4]

$$\|x'\|_2 \;\leq\; \|x\|_p^{1/2}\,\|x''\|_{p'}^{1/2} \tag{31}$$

для функций $x \in L^2_{p,p'}(\mathbf{R})$, где $p \in [1,\infty]$, $p' = p/(p-1)$.

Теорема 4. *Пусть* $q \in [2,\infty)$. *Имеет место точное на классе функций* $x \in L^2_{\infty,1}(\mathbf{R})$ *неравенство*

$$\|x'\|_q \;\leq\; 2^{2/q-1}\|x\|_\infty^{1/q}\,\|x''\|_1^{1-1/q}. \tag{32}$$

Доказательство. Зафиксируем $x \in L^2_{\infty,1}(\mathbf{R})$. Очевидно, что

$$\|x'\|_q^q \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |x'(t)|^q\,dt \;\leq\; \|x'\|_\infty^{q-2}\,\|x'\|_2^2. \tag{33}$$

Поскольку $x' \in L_2(\mathbf{R})$ вследствие (31), существуют последовательности $t_n' \to \infty$ и $t_n'' \to -\infty$ (при $n \to \infty$) такие, что $\lim_{n\to\infty} x'(t_n') = \lim_{n\to\infty} x'(t_n'') = 0$. Поэтому

$$\|x'\|_\infty \;\leq\; \frac{1}{2}\bigvee_{-\infty}^{\infty} x' \;=\; \frac{1}{2}\|x''\|_1.$$

Оценивая $\|x'\|_\infty^{q-2}$ в правой части (33) с помощью последнего неравенства, а $\|x'\|_2^2$ с помощью (31) с $p = \infty$, получаем

$$\|x'\|_q^q \leq \left(\frac{1}{2}\|x''\|_1\right)^{q-2}\|x\|_\infty\|x''\|_1 = 2^{2-q}\|x\|_\infty\|x''\|_1^{q-1}.$$

Отсюда следует (32).

Точность (32) проверяется так же, как и при доказательстве теоремы 2, с помощью семейства функций Стеклова χ_h, $h > 0$, от функции

$$\chi(t) := \begin{cases} t, & \text{если} \quad t \in [-1, 1], \\ \operatorname{sgn} t, & \text{если} \quad t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Неравенства для знакопостоянных функций с ограниченной второй производной. Пусть $\varphi_0(t) := \operatorname{sgn}\sin t$, $t \in \mathbf{R}$, $\varphi_r(t)$ — r-й 2π-периодический интеграл со средним значением на периоде, равным нулю. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{r,\lambda}(t) := \lambda^{-r}\varphi_r(\lambda t)$, $t \in \mathbf{R}$.

Теорема 5. *Пусть* $q, p \in (0, \infty)$, $q > p$. *Выполняется точное на классе знакопостоянных функций* $x \in L^2_{p,\infty}(\mathbf{R})$ *неравенство*

$$\|x\|_q \leq \frac{\big\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\big\|_{L_q[0,2\pi]}}{\big\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\big\|^\alpha_{L_p[0,2\pi]}}\|x\|_p^\alpha\|x''\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{34}$$

где $\alpha = (2 + 1/q)/(2 + 1/p)$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in L^2_{p,\infty}(\mathbf{R})$. Не ограничивая общности можно считать, что $x(t) \geq 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Вследствие однородности (34) можно также считать выполненным условие

$$\|x''\|_\infty = 1. \tag{35}$$

Тогда $x \in W^2_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. Для $\lambda > 0$ положим

$$\psi_\lambda(t) = \begin{cases} \big\|\varphi_{\lambda,2}\big\|_\infty - \varphi_{\lambda,2}(t), & \text{если} \quad t \in [-\pi/2\lambda, 3\pi/2\lambda], \\ 0, & \text{если} \quad t \notin [-\pi/2\lambda, 3\pi/2\lambda]. \end{cases}$$

Ясно, что $\psi_\lambda \in W^2_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$, причем $\psi_\lambda(t) \geq 0$ для всех $t \in \mathbf{R}$, и $\|\psi_\lambda\|_\infty = \psi_\lambda(\pi\lambda^{-1}/2)$. Нетрудно также проверить, что

$$\|\psi_\lambda\|_p = \lambda^{-2-1/p}\big\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\big\|_{L_p[0,2\pi]}. \tag{36}$$

Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$\|\psi_\lambda\|_p = \|x\|_p \tag{37}$$

и покажем, что

$$\|x\|_\infty \leq \|\psi_\lambda\|_\infty. \tag{38}$$

Предположим, что $\|x\|_\infty > \|\psi_\lambda\|_\infty$. Переходя, если нужно, к сдвигу функции x, можно считать, что $\|x\|_\infty = x(\pi\lambda^{-1}/2)$. Тогда

$$\|x\|_\infty = x(\pi\lambda^{-1}/2) > \psi_\lambda(\pi\lambda^{-1}/2) = \|\psi_\lambda\|_\infty.$$

Рассмотрим функцию $y(t) = \gamma x(t)$, где $\gamma \in (0, 1)$ выбрано так, чтобы

$$\|y\|_\infty = y(\pi\lambda^{-1}/2) = \psi_\lambda(\pi\lambda^{-1}/2) = \|\psi_\lambda\|_\infty .$$

Ясно, что $y \in W^2_{\infty,\infty}(\mathbf{R})$. Поэтому согласно теореме сравнения Колмогорова [6] $y(t) \ge \psi_\lambda(t)$ для всех $t \in \mathbf{R}$, и, следовательно, $\|x\|_p > \|y\|_p \ge \|\psi_\lambda\|_p$, что противоречит (37). Тем самым (38) доказано.

Покажем теперь, что

$$\|x\|_q \le \|\psi_\lambda\|_q . \tag{39}$$

Как и при доказательстве теоремы 2, для доказательства (39) достаточно установить неравенство

$$\int_0^\xi r^p(x,t)dt \le \int_0^\xi r^p(\psi_\lambda,t)dt, \quad \xi > 0. \tag{40}$$

Переходя к доказательству (40), заметим, что из (38) непосредственно следует, что $r(x,0) \le r(\psi_\lambda, 0)$. Поэтому для доказательства (40) достаточно убедиться в том, что разность $\Delta(t) := r(x,t) - r(\psi_\lambda, t)$ меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза.

Чтобы доказать этот факт, заметим, что вследствие (38) для любого $z \in \in \left[0, \|x\|_\infty\right]$ найдутся не менее двух точек t_i и ровно две точки y_j такие, что

$$z = |x(t_i)| = \psi_\lambda(y_j).$$

В силу теоремы сравнения Колмогорова [6] для любой такой пары точек (t_i, y_j) выполнено неравенство

$$|x'(t_i)| \le \left|\psi'_\lambda(y_j)\right|.$$

Поэтому согласно теореме о производной перестановки (см., например, [16], предложение 1.3.2), если точки θ_1 и θ_2 выбраны так, что $z = r(x,\theta_1) = r(\psi_\lambda, \theta_2)$, то

$$|r'(x,\theta_1)| \le |r'(\psi_\lambda,\theta_2)|.$$

Отсюда следует, что разность Δ меняет знак с $-$ на $+$ не более одного раза и, значит, (40) доказано.

Применяя (39), (37), (36) и учитывая определение α, получаем

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p^\alpha} \le \frac{\lambda^{-2-1/q}\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_q[0,2\pi]}}{\left\{\lambda^{-2-1/p}\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_p[0,2\pi]}\right\}^\alpha} = \frac{\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_q[0,2\pi]}}{\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|^\alpha_{L_p[0,2\pi]}}.$$

Отсюда в силу (35) следует (34). Ясно, что функция ψ_λ обращает (34) в равенство.

Теорема доказана.

Теорема 6. *Пусть* $p \in (0,\infty)$. *Имеет место точное на классе знакопостоянных функций* $x \in L^2_{p,\infty}(\mathbf{R})$ *неравенство*

$$\|x'\|_\infty \le \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|^\alpha_{L_p[0,2\pi]}} \|x\|_p^\alpha \|x''\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{41}$$

где $\alpha = 1/(2+1/p)$.

Доказательство. Зафиксируем $x \in L^2_{p,\infty}(\mathbf{R})$. Как и при доказательстве теоремы 5, можно считать выполненным условие (35). Снова выберем $\lambda > 0$ из условия (37) (тогда в силу теоремы 5 имеет место также (38)) и покажем, что

$$\|x'\|_\infty \le \|\psi'_\lambda\|_\infty. \tag{42}$$

Предположим, что $\|x'\|_\infty > \|\psi_\lambda\|_\infty$. Нетрудно видеть, что $\|\psi'_\lambda\|_\infty = -\psi'_\lambda(\pi\lambda^{-1})$. Переходя, если нужно, к функции $\pm x(\cdot + s)$, можно считать, что $\|x'\|_\infty = x'(\pi\lambda^{-1})$. Тогда

$$\|x'\|_\infty = x'(\pi\lambda^{-1}) > -\psi'_\lambda(\pi\lambda^{-1}) = \|\psi'_\lambda\|_\infty.$$

Очевидно, $|x''(t)| \le 1$ и $|\psi''_\lambda(t)| = 1$ для всех $t \in (\pi\lambda^{-1}/2, 3\pi\lambda^{-1}/2)$, $y \ne \pi\lambda^{-1}$. Поэтому

$$x'(t) > -\psi'_\lambda(t) > 0, \qquad t \in (\pi\lambda^{-1}/2, 3\pi\lambda^{-1}/2).$$

Но тогда $x(t)$ монотонна на $(\pi\lambda^{-1}/2, 3\pi\lambda^{-1}/2)$, и вследствие ее знакопостоянства

$$\|x\|_\infty \ge \int_{\pi\lambda^{-1}/2}^{3\pi\lambda^{-1}/2} x'(t)\,dt > -\int_{\pi\lambda^{-1}/2}^{3\pi\lambda^{-1}/2} \psi'_\lambda(t)\,dt = \|\psi_\lambda\|_\infty,$$

что противоречит (38). Тем самым (42) доказано.

Ясно, что

$$\|\psi'_\lambda\|_\infty = \lambda^{-1}\|\varphi_1\|_\infty. \tag{43}$$

Применяя (42), (37), (36), (43) и учитывая определение α, получаем

$$\frac{\|x'\|_\infty}{\|x\|_p^\alpha} \le \frac{\lambda^{-1}\|\varphi_1\|_\infty}{\left\{\lambda^{-2-1/p}\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_p[0,2\pi]}\right\}^\alpha} = \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_p[0,2\pi]}^\alpha}.$$

Отсюда в силу (35) следует (41). Ясно, что функция ψ_λ обращает (41) в равенство.

Теорема доказана.

Ниже для знакопостоянных функций, заданных на полуоси, приведен аналог теорем 5 и 6.

Теорема 7. *Пусть* $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$, $q > p$. *Имеют место точные на классе знакопостоянных функций* $x \in L^2_{p,\infty}(\mathbf{R}_+)$ *неравенства*

$$\|x\|_q \le \frac{\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_q[0,\pi]}}{\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_p[0,\pi]}^\alpha} \|x\|_p^\alpha \|x''\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{44}$$

где $\alpha = (2 + 1/q)(2 + 1/p)$, *и*

$$\|x'\|_\infty \le \frac{\|\varphi_1\|_\infty}{\left\|\varphi_2 + \|\varphi_2\|_\infty\right\|_{L_p[0,\pi]}^{\alpha_1}} \|x\|_p^{\alpha_1} \|x''\|_\infty^{1-\alpha_1}, \tag{45}$$

где $\alpha_1 = 1/(2 + 1/p)$.

Доказательства неравенств (44) и (45) аналогичны доказательствам неравенств (34) и (41) соответственно. Экстремальной функцией в (44) и (45) является сужение на $\mathbf{R}_+$ функции ψ_γ, построенной при доказательстве теоремы 5.

1. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **13**. – P. 43 – 49.
2. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees // C. r. Soc. math. France. – 1914. – **41**. – P. 68 – 72.
3. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **11**, № 2. – P. 411 – 478.
4. *Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Д.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
5. *Шилов Г. Е.* О неравенствах между производными // Сб. работ студ. науч. кружков МГУ. – 1937. – С. 17 – 27.
6. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
7. *Szökefalvi-Nagy B.* Über Integralungleichungen zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung // Acta Sci. Math. – 1941. – **10**. – P. 64 – 74.
8. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 42 – 63.
9. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences // Lect. Notes Math. – 1992. – **1536**. – 150 p.
10. *Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
11. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функций и их производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 3. – С. 291 – 298.
12. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Вложение обобщенных соболевских классов и неравенства для производных: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – М., 1980.
13. *Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных и двойственность // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1983. – **161**. – С. 183 – 194.
14. *Габушин В. Н.* Некоторые неравенства между производными функций // Методы регуляризации неустойчивых задач. – 1976. – С. 20 – 26. – (Тр. ИММ УНЦ АН СССР. Вып. 23).
15. *Магарил-Ильяев Г. Г.* О неравенствах Колмогорова на полупрямой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат.-мех. – 1976. – **5**. – С. 33 – 41.
16. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.

Получено 09.07.2004