УДК 517.9

В. І. Горбачук, М. Л. Горбачук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ПОВЕДІНКУ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ ОРБІТ РІВНОМІРНО СТІЙКИХ ПІВГРУП*

For uniformly stable bounded analytic C_0-semigroups $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ of linear operators in a Banach space $\mathfrak{B}$, the behavior at infinity of their orbits $T(t)x$, $x \in \mathfrak{B}$, is studied. The dependence of order of the tending to zero of an orbit $T(t)x$ as $t \to \infty$ on the degree of smoothness of a vector x with respect to the operator A^{-1} inverse of the generator A of the semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ is investigated. In particular, it is shown that there exist orbits of such semigroup which tend to zero at infinity not slower than $e^{-at^{\alpha}}$, where $a > 0$, $0 < \alpha < \pi/(2(\pi - \theta))$, θ is an analyticity angle of $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, and the collection of these orbits is dense in the set of all orbits.

Вивчається поведінка на нескінченності орбіт $T(t)x$, $x \in \mathfrak{B}$, рівномірно стійких обмежених аналітичних C_0-півгруп $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ лінійних операторів у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Досліджується залежність між порядком прямування орбіти $T(t)x$ до 0 при $t \to \infty$ і степенем гладкості вектора x відносно оператора A^{-1}, оберненого до генератора A півгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Зокрема показано, що для такої півгрупи існують орбіти, що прямують до 0 на ∞ не повільніше, ніж $e^{-at^{\alpha}}$, де $a > 0$, $0 < \alpha < \pi/(2(\pi - \theta))$, θ — кут аналітичності $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, і сукупність цих орбіт є щільною у множині всіх орбіт.

1. Нехай $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ — C_0-півгрупа обмежених лінійних операторів у комплексному банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$, A — її генератор. Згідно з [1], $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ називається рівномірно стійкою, якщо

$$\forall x \in \mathfrak{B}: \quad \lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0,$$

і рівномірно експоненціально стійкою, якщо існують сталі $c > 0$ та $\omega > 0$ такі, що

$$\forall t \geq 0: \quad \|T(t)\| \leq c e^{-\omega t}.$$

Відомо (див., наприклад, [2]), що обидва ці поняття еквівалентні при $\dim \mathfrak{B} < < \infty$. Це, взагалі кажучи, не так, якщо $\dim \mathfrak{B} = \infty$.

З принципу рівномірної обмеженості випливає, що для рівномірно стійкої $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ завжди існує стала $c > 0$ така, що

$$\forall t \geq 0: \quad \|T(t)\| \leq c.$$

Не зменшуючи загальності, при розгляді питань стійкості можна вважати $c = 1$, тобто $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ — півгрупою стисків. У подальшому переважно будемо мати справу саме з такими півгрупами.

Позначимо через $\mathcal{D}(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$ область визначення, резольвентну множину, спектр і неперервний спектр оператора. Наступне твердження

* Виконано за підтримки U. S. CRDF і Уряду України (проект UM 1-2090), а також DFG 436 UKR 113/78/0-1 та 113/79.

характеризує рівномірну та рівномірно експоненціальну стійкості півгрупи в термінах спектра її генератора (див. [3, 4]).

Твердження 1. *Для того щоб півгрупа* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *з генератором* A *була рівномірно стійкою, необхідно, щоб*

$$0 \in \sigma_c(A) \cup \rho(A). \tag{1}$$

Якщо $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *рівномірно експоненціально стійка, то*

$$0 \in \rho(A). \tag{2}$$

У випадку, коли $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *є обмеженою аналітичною, умови* (1) *і, відповідно,* (2) *є також достатніми.*

Нагадаємо, що півгрупа $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ називається обмеженою аналітичною з кутом аналітичності $\theta \in (0, \pi/2]$, якщо вона допускає продовження до оператор-функції, аналітичної в секторі

$$\Sigma(\theta) = \{ z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta \},$$

сильно неперервної в нулі на будь-якому промені всередині цього сектора, і для довільного $\theta' < \theta$ існує стала $c_{\theta'} > 0$ така, що

$$\forall z \in \Sigma(\theta') : \quad \| T(z) \| \leq c_{\theta'}.$$

Із твердження 1 випливає таке твердження.

Твердження 2. *Для того щоб рівномірно стійка півгрупа* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *не була рівномірно експоненціально стійкою, достатньо, щоб*

$$0 \in \sigma_c(A). \tag{3}$$

Для обмеженої аналітичної $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *умова* (3) *є також необхідною.*

Основна мета статті — дослідити поведінку на нескінченності орбіт $T(t)x$, $x \in \mathfrak{B}$, рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкої півгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ в залежності від властивостей вектора x, зокрема з'ясувати, чи є серед них такі, що спадають на нескінченності експоненціально, і якщо це так, то наскільки багатою є множина цих орбіт. Про те, що (на відміну від випадку рівномірно експоненціальної стійкості) спадання на нескінченності орбіт рівномірно стійкої півгрупи не контролюється жодною функцією, свідчить наступне твердження з [5].

Твердження 3. *Нехай* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ — C_0*-півгрупа в* $\mathfrak{B}$, *а* $\gamma(t)$ — *неперервна на* $[0, \infty)$ *функція,* $\gamma(t) > 0$ *і* $\gamma(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$. *Якщо для кожного* $x \in \mathfrak{B}$ *існує стала* $c = c(x) > 0$ *така, що*

$$\forall t \in [0, \infty) : \quad \| T(t)x \| \leq c\gamma(t),$$

то $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *є рівномірно експоненціально стійкою.*

Твердження 3 показує, що не всі орбіти рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкої півгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ спадають на нескінченності експоненціально. Справді, нехай для довільного $x \in \mathfrak{B}$

$$\exists c = c(x) > 0, \ \exists \omega_x > 0 : \quad \| T(t)x \| \leq c e^{-\omega_x t}.$$

Тоді

$$\forall t \in [0, \infty) : \quad \| T(t)x \| \leq c_1 \frac{1}{1+t},$$

де $0 < c_1 = c \sup\limits_{t\in[0,\infty)} (1+t)e^{-\omega_x t}$. Покладаючи в твердженні 3 $\gamma(t) = \dfrac{1}{1+t}$, приходимо до висновку, що $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою, а це суперечить припущенню.

Із твердження 3 випливає така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ — *довільна* C_0-*півгрупа в* $\mathfrak{B}$. *Якщо для кожного* $x \in \mathfrak{B}$ *існує* $p_x > 0$ *таке, що*

$$\int\limits_0^\infty \| T(t)x \|^{p_x} dt \ < \ \infty, \tag{4}$$

то $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ *є рівномірно експоненціально стійкою.*

Доведення. Так само, як і при доведенні теореми 4.1 з [6], установлюємо, що співвідношення (4) зумовлює збіжність $T(t)x \to 0$ $(t \to \infty)$ для будь-якого $x \in \mathfrak{B}$, а тому (за принципом рівномірної обмеженості) й рівномірну обмеженість півгрупи $\{T(t)\}_{t\ge 0}$: $\|T(t)\| \ \le \ c$. Переходячи (в разі потреби) у просторі $\mathfrak{B}$ до норми $\|x\|_1 = \sup\limits_{t\in[0,\infty)} \|T(t)x\|$, еквівалентної початковій $\|\cdot\|$, можемо вважати $c = 1$, а отже, функція $\|T(t)x\|$ є монотонно спадною на $[0,\infty)$. Із збіжності інтеграла в (4) випливає оцінка

$$\| T(x) \| \ \le \ c_x (1+t)^{-1/p_x} \quad (0 < c_x = \text{const}).$$

Покладаючи $\gamma(t) = \dfrac{1}{\ln(2+t)}$, дістанемо

$$\| T(x) \| \ \le \ c_1(x)\gamma(t), \qquad c_1(x) \ = \ c_x \sup_{t\in[0,\infty)} \frac{\ln(2+t)}{(1+t)^{1/p_x}}.$$

За твердженням 3 $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ є рівномірно експоненціально стійкою, що й потрібно було довести.

Теорема 1 є узагальненням теореми 4.1 з [6] (там $p_x = p$ не залежить від x), отриманої в різних окремих випадках різними авторами (див. [7 – 10]).

2. У цьому пункті розглядаються рівномірно стійкі стискальні півгрупи $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ і з'ясовується, які саме властивості вектора x визначають порядок прямування орбіти $T(t)x$ до нуля при $t \to \infty$.

Теорема 2. *Нехай* $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ — *рівномірно стійка* C_0-*півгрупа в* $\mathfrak{B}$ *з генератором* A. *Тоді*

$$x \in \mathcal{D}(A^{-1}) \ \Leftrightarrow \ \exists \int\limits_0^\infty T(s)x\,ds \tag{5}$$

і

$$A^{-1}x \ = \ -\int\limits_0^\infty T(s)x\,ds. \tag{6}$$

Якщо, крім того, $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ *обмежена аналітична, то*

$$x \in \mathcal{D}(A^{-(n+1)}) \ \Leftrightarrow \ \exists \int\limits_0^\infty s^k T(s)x\,ds, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

і

$$A^{-(n+1)}x = \frac{(-1)^{(n+1)}}{n!}\int_0^\infty s^n T(s)x\,ds. \tag{7}$$

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathcal{D}(A^{-1})$. Тоді для довільного $t > 0$

$$\int_0^t T(s)x\,ds = \int_0^t T(s)AA^{-1}x\,ds = T(t)A^{-1}x - A^{-1}x.$$

При $t \to \infty$ останній вираз збігається до $-A^{-1}x$. Отже, інтеграл $\int_0^\infty T(s)x\,ds$ існує і рівність (6) виконується.

Навпаки, нехай існує $\int_0^\infty T(s)x\,ds$. Оскільки $y_t = \int_0^t T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A)$, то маємо сім'ю векторів

$$y_t \in \mathcal{D}(A): y_t \to \int_0^\infty T(s)x\,ds \quad \text{при } t \to \infty.$$

Беручи до уваги, що

$$Ay_t = T(t)x - x \to -x \quad \text{при } t \to \infty,$$

і замкненість оператора A, робимо висновок, що

$$\int_0^\infty T(s)x\,ds \in \mathcal{D}(A) \quad \text{і} \quad A\int_0^\infty T(s)x\,ds = -x,$$

тобто

$$x \in \mathcal{D}(A^{-1}) \quad \text{і} \quad A^{-1}x = -\int_0^\infty T(s)x\,ds.$$

Припустимо тепер, що розглядувана півгрупа є обмеженою аналітичною. Тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}$

$$x \in \mathcal{D}(A^{-n}) \Rightarrow t^n T(t)x \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{8}$$

Справді, оскільки для обмеженої аналітичної півгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ виконується оцінка $\|A\,T(t)\| \leq c/t$, $0 < c = \mathrm{const}$, то

$$\|T(t)x\| = \|T(t)A^nA^{-n}x\| = \left\| T\left(\frac{t}{n+1}\right)^{n+1} A^nA^{-n}x \right\| =$$

$$= \left\| \left(T\left(\frac{t}{n+1}\right)A\right)^n T\left(\frac{t}{n+1}\right)A^{-n}x \right\| \leq c^n\left(\frac{n+1}{t}\right)^n \left\| T\left(\frac{t}{n+1}\right)A^{-n}x \right\|,$$

звідки

$$t^n\|T(t)x\| \leq c^n(n+1)^n \left\| T\left(\frac{t}{n+1}\right)A^{-n}x \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Подальше доведення проведемо методом математичної індукції.

Припустимо, що

$$x \in \mathcal{D}(A^{-n}) \Leftrightarrow \exists \int_0^\infty s^k T(s)x\,ds, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Оскільки для $y \in \mathcal{D}(A)$

$$\left(s^n T(s)y\right)' = ns^{n-1} T(s)y + s^n T(s)Ay,$$

то

$$t^n T(t)y = \int_0^t \left(s^n T(s)y\right)' ds = n\int_0^t s^{n-1}T(s)y\,ds + \int_0^t s^n T(s)Ay\,ds,$$

а отже,

$$\int_0^t s^n T(s)Ay\,ds = t^n T(t)y - n\int_0^t s^{n-1}T(s)y\,ds. \tag{9}$$

Нехай тепер $x \in \mathcal{D}(A^{-(n+1)})$, тобто $x = A^{n+1}z$, $z \in \mathcal{D}(A^{n+1})$. Покладемо в (9) $y = A^n z$. Оскільки $y \in \mathcal{D}(A^{-n})$, то існує $\int_0^\infty s^{n-1}T(s)y\,ds$. Враховуючи (8) і (9), приходимо до висновку, що існує

$$\int_0^\infty s^n T(s)Ay\,ds = \int_0^\infty s^n T(s)x\,ds.$$

Беручи до уваги рівність

$$\int_0^\infty s^n T(s)x\,ds = \int_0^\infty s^n T(s)A^{n+1}A^{-(n+1)}x\,ds = \int_0^\infty s^n T^{(n+1)}(s)A^{-(n+1)}x\,ds,$$

за допомогою інтегрування частинами останнього інтеграла n разів одержуємо

$$\int_0^\infty s^n T(s)x\,ds = (-1)^n n!\int_0^\infty T'(s)A^{-(n+1)}x\,ds = (-1)^{n+1} n! A^{-(n+1)}x,$$

звідки

$$A^{-(n+1)}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\int_0^\infty s^n T(s)x\,ds.$$

Навпаки, припустимо, що з існування усіх інтегралів $\int_0^\infty s^k T(s)x\,ds$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n-1$, випливає включення $x \in \mathcal{D}(A^{-n})$, і доведемо, що існування інтеграла $\int_0^\infty s^n T(s)x\,ds$ зумовлює належність x до $\mathcal{D}(A^{-(n+1)})$. Інтегруючи рівність

$$\left(s^k T(s)x\right)' = ks^{k-1} T(s)x + s^k T'(s)x$$

по відрізку $[1/t, t]$ ($t > 0$ довільне), одержуємо

$$t^k T(t)x - \left(\frac{1}{t}\right)^k T\left(\frac{1}{t}\right)x = k\int_{1/t}^t s^{k-1}T(s)x\,ds + A\int_{1/t}^t s^k T(s)x\,ds.$$

Але, як видно з (8), при $x \in \mathcal{D}(A^{-n})$, $t^n T(t)x \to 0$ при $t \to \infty$. Оскільки інтеграли $\int_0^\infty s^k T(s)x\,ds$, $k = 0, 1, \ldots, n$, існують і

$$\lim_{t\to\infty} A\int_{1/t}^t s^n T(s)x\,ds = -n\int_0^\infty s^{n-1}T(s)x\,ds,$$

то внаслідок замкненості оператора A

$$y = \int_0^\infty s^n T(s) x \, ds \in \mathcal{D}(A) \quad \text{i} \quad Ay = -n \int_0^\infty s^{n-1} T(s) x \, ds,$$

а отже,

$$y = -n \int_0^\infty s^{n-1} T(s) A^{-1} x \, ds.$$

Тоді за припущенням $A^{-1} x \in \mathcal{D}(A^{-n})$, тобто $x \in \mathcal{D}(A^{-(n+1)})$, і, як показано вище, для нього виконується (7).

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Якщо A — генератор рівномірно стійкої C_0-півгрупи $\{T(t)\}_{t \ge 0}$, то внаслідок (6) розв'язок стаціонарного рівняння

$$Az = x \qquad (z = A^{-1} x) \tag{10}$$

можна подати через розв'язок нестаціонарної задачі Коші

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t),$$
$$y(0) = x$$

як

$$z = -\int_0^\infty y(t) \, dt.$$

Якщо $0 \in \sigma_c(A)$, то задача (10) є некоректною. Тому при $x \notin \mathcal{D}(A)$ ця задача не має звичайного розв'язку і за теоремою 2 інтеграл $\int_0^\infty y(t) \, dt$ розбігається. Якщо цей інтеграл певним чином регуляризувати, то регуляризацію можна вважати регуляризованим узагальненим розв'язком стаціонарного рівняння (10).

Нехай тепер A — генератор рівномірно стійкої обмеженої аналітичної півгрупи $\{T(t)\}_{t \ge 0}$. Тоді із співвідношення (8) випливає, що

$$x \in \mathcal{D}(A^{-n}) \Rightarrow \| T(t) x \| = o\left(\frac{1}{t^n}\right), \tag{11}$$

а з (7) —

$$\| T(t) x \| = O\left(\frac{1}{t^{n+\varepsilon}}\right) \Rightarrow x \in \mathcal{D}(A^{-n}). \tag{12}$$

Для довільного замкненого оператора B в $\mathfrak{B}$ позначимо через $C^\infty(B)$ множину всіх його нескінченно диференційовних векторів:

$$C^\infty(B) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}} \mathcal{D}(B^n).$$

Взагалі кажучи, $\overline{C^\infty(B)} \ne \mathfrak{B}$. Але якщо $\rho(B) \ne \varnothing$ (що завжди виконується для генераторів C_0-півгруп), то $\overline{C^\infty(B)} = \mathfrak{B}$. Співвідношення (11) і (12) приводять до наступного твердження.

Теорема 3. *Нехай* $\{T(t)\}_{t \ge 0}$ — *рівномірно стійка обмежена аналітична півгрупа з генератором* A. *Тоді*

$$x \in C^\infty(A^{-1}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \lim_{t \to \infty} t^n \| T(t) x \| = 0.$$

Оскільки у випадку, коли A — генератор рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкої обмеженої аналітичної півгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ з кутом аналітичності θ, оператор A^{-1} також генерує обмежену аналітичну півгрупу з тим самим кутом θ (див. [11]), то множина $C^{\infty}(A^{-1})$ є щільною в $\mathfrak{B}$. Таким чином, якщо $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ — рівномірно стійка обмежена аналітична півгрупа, то завжди існує щільна в $\mathfrak{B}$ множина векторів x, а саме, $C^{\infty}(A^{-1})$ (і лише вона), для яких відповідні орбіти $T(t)x$ прямують до 0 на нескінченності швидше за будь-який степінь $1/t$. Аби з'ясувати, чи є у рівномірно стійкої обмеженої аналітичної півгрупи орбіти, спадання яких на нескінченності швидше за степеневе, і у разі наявності таких — описати їх, нагадаємо визначення деяких підпросторів із $C^{\infty}(A^{-1})$.

3. Для довільного замкненого оператора B зі щільною областю визначення в $\mathfrak{B}$ і будь-якого числа $\beta \geq 0$ покладемо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(B), \qquad \mathfrak{G}_{(\beta)}(B) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(B),$$

де

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(B) = \left\{ x \in C^{\infty}(B) \,\middle|\, \exists c = c(x) > 0 : \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \ \left\| B^k x \right\| \leq c\alpha^n n^{n\beta} \right\}$$

— банахів простір щодо норми

$$\|x\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(B)} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|B^n x\|}{\alpha^n n^{n\beta}}.$$

Якщо оператор B обмежений, то для довільного $\beta > 0$ маємо $C^{\infty}(B) = \mathfrak{G}_{(\beta)}(B) = \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B) = \mathfrak{G}_{\{0\}}(B) = \mathfrak{B}$. Це, взагалі кажучи, не так у випадку необмеженого B.

Простори $\mathfrak{G}_{\{1\}}(B)$ та $\mathfrak{G}_{(1)}(B)$ відомі як простори аналітичних [13] та, відповідно, цілих [14] векторів оператора B. Простір $\mathfrak{G}_{\{0\}}(B)$ є не що інше, як простір векторів експоненціального типу оператора B, введених у [15].

При $0 < \beta < \beta' < \infty$ маємо ланцюжок

$$\mathfrak{G}_{\{0\}}(B) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta)}(B) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta')}(B) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta'\}}(B).$$

***Приклад* 1.** Нехай

$$\mathfrak{B} = C([a,b]), \quad -\infty < a < b < \infty,$$

$$B = \frac{d}{dx}, \quad \mathcal{D}(B) = C^1([a,b]).$$

Тоді $C^{\infty}(B)$ збігається з множиною $C^{\infty}([a,b])$ усіх нескінченно диференційовних на $[a,b]$ функцій; $\mathfrak{G}_{\{1\}}(B)$, $\mathfrak{G}_{(1)}(B)$ і $\mathfrak{G}_{\{0\}}(B)$ — простори аналітичних на $[a,b]$, цілих і цілих експоненціального типу функцій відповідно; $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B)$ і $\mathfrak{G}_{(\beta)}(B)$, $\beta > 1$,— класи Жевре типу Рум'є та Бьорлінга (див. [16]).

***Приклад* 2.** Нехай

$$\mathfrak{B} = L_2(\mathbb{R}), \quad B = \overline{B_0},$$

$$B_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2, \quad \mathcal{D}(B_0) = C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Тоді, як показано в [17],

$$C^{\infty}(B) = S, \quad \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B) = S^{\beta/2}_{\beta/2}, \quad \beta \geq 1,$$

де S — відомий простір Шварца, а $S^{\beta/2}_{\beta/2}$ — відповідний простір Гельфанда – Шилова.

Усі підпростори, наведені в прикладах, щільні в $\mathfrak{B}$. У загальному випадку простір $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B)$ може не бути щільним у $\mathfrak{B}$. Наприклад, якщо

$$\mathfrak{B} = L_2([0,1]), \quad By(t) = -y'(t), \quad \mathcal{D}(B) = \{y \in W_2^1([0,1]) : y(0) = 0\},$$

то $\mathfrak{G}_{\{1\}}(B) = \{0\}$. Неважко бачити, що цей оператор B генерує C_0-півгрупу стисків. Проте при $\beta > 1$ для будь-якого оператора B, котрий генерує C_0-півгрупу, $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B)} = \mathfrak{B}$.

Питання щільності в $\mathfrak{B}$ просторів $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(B)$ для різних класів операторів B у зв'язку з різними задачами розглядалось багатьма математиками (див., наприклад, [18–21]). Наведемо декілька критеріїв, що використовуються у подальшому.

Твердження 4. *Мають місце наступні ознаки щільності*:

1. *Нехай B — нормальний оператор у гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$. Тоді* $\mathfrak{G}_{\{0\}}(B) = \{x \in \mathfrak{H} \mid x = E_{\Delta} y,\ \forall y \in \mathfrak{H},\ \Delta$ *— довільний компакт з* $\mathbb{R}^2\}$ (E_{Δ} *— спектральна міра оператора* B), *а отже,* $\mathfrak{G}_{\{0\}}(B) = \mathfrak{B}$.

2. *Якщо B — самоспряжений оператор у просторі Понтрягіна* Π_{κ}, $\kappa < \infty$, *то* $\mathfrak{G}_{\{0\}}(B)$ *щільне в* Π_{κ}.

3. *Якщо B — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи у просторі $\mathfrak{B}$ з кутом аналітичності* $\theta \in (0, \pi/2]$, *то при* $\beta > 1 - \dfrac{2\theta}{\pi}$ $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(B)} = \mathfrak{B}$. *Що стосується* $\mathfrak{G}_{(0)}(B)$, *то існують півгрупи з* $\theta = \pi/2$, *для яких* $\mathfrak{G}_{\{0\}}(B) = \{0\}$. *Але якщо припустити, що B додатково задовольняє умову*

$$\int_0^1 \ln\ln M(s)\,ds < \infty, \quad M(s) = \sup_{|\Im z| \geq s} \|R_z(B)\| \tag{13}$$

($R_z(B)$ *— резольвента оператора* B), *то* $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(B)} = \mathfrak{B}$.

4. Очевидно, що усі орбіти $T(t)x$ рівномірно експоненціально стійкої півгрупи $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ спадають до нуля на нескінченності експоненціально. Постає питання про їхню поведінку у випадку, коли $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ є рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійкою, тобто коли $0 \in \sigma_c(A)$ (A — генератор $\{T(t)\}_{t\geq 0}$), зокрема, чи є серед них такі, що прямують на нескінченності до нуля експоненціально. Відповідь дає наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *— рівномірно стійка обмежена аналітична півгрупа стисків. Тоді при* $0 < \alpha \leq 1$

$$\exists a > 0: \quad \lim_{t\to\infty} e^{at^{\alpha}} \|T(t)x\| = 0 \Leftrightarrow x \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A^{-1}), \tag{14}$$

$$\forall a > 0: \quad \lim_{t\to\infty} e^{at^{\alpha}} \|T(t)x\| = 0 \Leftrightarrow x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A^{-1}), \tag{15}$$

де α і β пов'язані співвідношенням $\beta = (1-\alpha)/\alpha$.

Доведення. Припустимо, що $x \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A^{-1})$ $(\beta \geq 0)$, тобто

$$\exists \delta > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}: \ \|A^{-n}x\| \leq c\delta^n n^{n\beta}, \quad 0 < c = \text{const}. \tag{16}$$

Тоді

$$\|T(t)x\| = \left\|\left(T\left(\frac{t}{n}\right)A\right)^n A^{-n}x\right\| \le \left(\frac{n}{t}\right)^n \|A^{-n}x\| \le c\left(\frac{n}{t}\right)^n \delta^n n^{n\beta} = c\left(\frac{\delta}{t}n^{\beta+1}\right)^n.$$

Оскільки ліва частина нерівності не залежить від n, то

$$\|T(t)x\| \le c \inf_{n\in\mathbb{N}_0}\left(\frac{\delta}{t}n^{\beta+1}\right)^n.$$

Неважко підрахувати, що функція $\left(\frac{\delta}{t}s^{\beta+1}\right)^s$, $s \in [0, \infty)$, досягає свого мінімуму в точці $s_t = \frac{1}{e}\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}$, причому s_t набуває значення $n \in \mathbb{N}_0$ при $t = t_n = \delta(ne)^{\beta+1}$. Отже,

$$\|T(t_n)x\| \le ce^{-\frac{1}{e}(\beta+1)(t_n/\delta)^{1/(\beta+1)}} = ce^{-\gamma t_n^\alpha}, \tag{17}$$

де $\alpha = \frac{1}{\beta+1}$, $\gamma = (\alpha e\delta^\alpha)^{-1}$, а тому для будь-якого $a < \gamma$

$$\lim_{n\to\infty} e^{a t_n^\alpha}\|T(t_n)x\| = 0.$$

Нехай тепер $t = t_n + s$, де $s \in (t_n, t_{n+1})$, тобто

$$s < t_{n+1} - t_n = \delta\left((n+1)^{\beta+1} - n^{\beta+1}\right)e^{\beta+1}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\beta+1} - n^{\beta+1}}{n^\beta} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\beta+1} - 1}{\frac{1}{n}} = \beta + 1,$$

то

$$s \le c_1 n^\beta, \quad 0 < c_1 = \text{const}. \tag{18}$$

Завдяки (17) маємо

$$\|T(t)x\| = \|T(s)T(t_n)x\| \le \|T(t_n)x\| \le ce^{-\gamma(t-s)^\alpha}, \quad 0 < c = \text{const}.$$

Враховуючи нерівність $(p-q)^r \ge p^r - q^r$, що виконується при довільних $p > q \ge 0$, $r \in (0, 1)$, дістаємо

$$\|T(t)x\| \le ce^{-\gamma t^\alpha} e^{-\gamma s^\alpha}.$$

Але, як випливає з (18), для довільного $\varepsilon > 0$

$$e^{-\varepsilon t_n^\alpha} e^{\gamma s^\alpha} \le e^{-\varepsilon(\delta(ne)^{\beta+1})^\alpha} e^{\gamma(c_1 n^\beta)^\alpha} = e^{-\varepsilon\delta^\alpha en} e^{\gamma c_1^\alpha n^{1-\alpha}} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Тому для великих $n > N = N(\varepsilon)$

$$e^{\gamma s^\alpha} < e^{\varepsilon t_n^\alpha}.$$

Беручи $\varepsilon > 0$ достатньо малим, одержуємо

$$\|T(t)x\| \le ce^{-\gamma t^\alpha} e^{\varepsilon t_n^\alpha} \le ce^{-\gamma t^\alpha} e^{\varepsilon t^\alpha} = ce^{-(\gamma-\varepsilon)t^\alpha}.$$

Таким чином, при великих t

$$\| T(t)x \| \leq c e^{-(\gamma-\varepsilon)t^{\alpha}}, \quad t \in [0, \infty), \tag{19}$$

де $c > 0$ — деяка стала, і, отже, співвідношення у правій частині (14) виконується при $a = \gamma - 2\varepsilon$, де $\gamma = (\alpha e \delta^{\alpha})^{-1}$, $\alpha = \dfrac{1}{\beta + 1}$.

Якщо ж $x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$, то (16) виконується для довільного $\delta > 0$, а тому нерівність (19) виконується для довільного $\gamma > 0$, що й зумовлює співвідношення (15).

Доведемо зворотні твердження.

Нехай

$$\exists a > 0 : \quad \lim_{t \to \infty} e^{at^{\alpha}} \|T(t)x\| = 0. \tag{20}$$

Тоді за теоремою 2 $x \in C^{\infty}(A^{-1})$, і з формули (7) випливає

$$\|A^{-n}x\| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} s^{n-1} \|T(s)x\| ds \leq \frac{c_1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} s^{n-1} e^{-as^{\alpha}} ds =$$

$$= \frac{c_1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} s^{n-1} e^{-(a/2)s^{\alpha}} ds \leq \frac{c_1}{(n-1)!} \max_{s \geq 0} \left\{ s^{n-1} e^{-(a/2)s^{\alpha}} \right\},$$

де $0 < c_1 = \text{const}$, $c = c_1 \int_0^{\infty} e^{-(a/2)s^{\alpha}} ds$. Оскільки максимум функції $s^{n-1} e^{-(a/2)s^{\alpha}}$ досягається в точці $s = \left(\dfrac{2(n-1)}{a\alpha} \right)^{1/\alpha}$, то

$$\|A^{-n}x\| \leq \frac{c}{(n-1)!} \left(\frac{2(n-1)}{a\alpha} \right)^{(n-1)/\alpha} e^{-(n-1)/\alpha}.$$

Застосовуючи формулу Стірлінга

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n} \right) \right),$$

приходимо до висновку, що

$$\|A^{-n}x\| \leq c \delta^n n^{n\beta}, \quad 0 < c = c(a) = \text{const},$$

де

$$\delta = \frac{2(\beta+1)^{\beta+1}}{a e^{\beta}}. \tag{21}$$

Отже, $x \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A^{-1})$.

Якщо у співвідношенні (20) $a > 0$ довільне, то в (21) $\delta > 0$ буде також довільним, а тому $x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A^{-1})$.

Теорему доведено.

Множина усіх орбіт $T(t)x$ рівномірно стійкої півгрупи стисків $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ в $\mathfrak{B}$ утворює банахів простір $\mathfrak{B}_T$ відносно норми

$$\|T(\cdot)x\|_{\mathfrak{B}_T} = \max_{t \in [0, \infty)} \|T(t)x\| = \|x\|.$$

Теорема 4 показує, що у випадку, коли $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ є ще й обмеженою аналітичною, множина її орбіт $T(t)x$ з експоненціальним прямуванням до нуля на нескінченності є щільною в $\mathfrak{B}$ тоді і тільки тоді, коли простір $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A^{-1})$ векторів експоненціального типу оператора A^{-1} щільний в $\mathfrak{B}$. Але, як доведено в [20], $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A^{-1})$ збігається з множиною векторів $x \in \mathcal{D}(A^{-1})$, для яких розв'язок задачі Коші

$$\begin{gathered} \frac{dy(t)}{dt} = A^{-1}y(t), \quad t \in [0, \infty), \\ y(0) = x \end{gathered} \tag{22}$$

допускає продовження до цілої вектор-функції експоненціального типу. Тому з теореми 4 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Для того щоб задача Коші* (22) *була розв'язною в класі цілих вектор-функцій експоненціального типу із значеннями в* $\mathfrak{B}$, *необхідно і достатньо, щоб орбіта* $T(t)x$ *експоненціально прямувала до нуля при* $t \to \infty$.

Сформулюємо у вигляді теореми основні результати статті, які випливають із твердження 4 та теореми 4.

Теорема 5. *Мають місце такі твердження.*

1. *Якщо* A — *нормальний оператор у гільбертовому просторі* $\mathfrak{H}$, *спектр якого задовольняє умову*

$$\sigma(A) \subseteq \left\{ z \in C \,\middle|\, |\arg(-z)| \le \frac{\pi}{2} - \theta,\ 0 < \theta \le \frac{\pi}{2} \right\} \quad i \quad 0 \in \sigma_c(A),$$

то A *генерує рівномірно, але не рівномірно експоненціально стійку обмежену аналітичну півгрупу* $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ *з кутом аналітичності* θ, *для якої множина орбіт з експоненціальним спаданням на нескінченності є щільною в* $\mathfrak{H}$. *Ці орбіти відповідають векторам вигляду* $x = E_\Delta y$, *де* y — *довільний вектор з* $\mathfrak{H}$, E_Δ — *спектральна міра оператора* A, $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ — *будь-яка вимірна множина, розміщена на додатній відстані від нуля.*

2. *Нехай* A — *самоспряжений оператор у просторі* Π_κ, $\kappa < \infty$, *що генерує рівномірно стійку обмежену аналітичну* C_0*-півгрупу* $\{T(t)\}_{t\ge 0}$. *Тоді множина орбіт* $T(t)x$, *експоненціально спадних на нескінченності, є щільною в* $\mathfrak{B}_T$.

3. *Якщо* A — *генератор рівномірно стійкої обмеженої аналітичної з кутом* $\theta \in (0, \pi/2]$ *півгрупи* $\{T(t)\}_{t\ge 0}$ *в* $\mathfrak{B}$, *то для кожного* $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2(\pi-\theta)}\right)$ *множина орбіт* $T(t)x$, *для яких*

$$\|T(t)x\| \le c e^{-at^\alpha}$$

(*сталі* a, $c > 0$ *довільні*), *є щільною в* $\mathfrak{B}_T$. *Існують обмежені півгрупи з кутом аналітичності* $\pi/2$, *для яких множина експоненціально спадних орбіт складається лише з нульової орбіти. Але за умови* (13) *з оператором* $B = A^{-1}$ *множина таких орбіт є щільною в* $\mathfrak{B}_T$.

Твердження 3 теореми 5 показує, що існують рівномірно стійкі обмежені аналітичні півгрупи в $\mathfrak{B}$, множина експоненціально спадних орбіт котрих збігається з $\{0\}$, проте множина орбіт, що прямують до нуля на нескінченності швидше за $e^{-at^{1/2}}$ з деяким $a > 0$, є щільною в $\mathfrak{B}_T$. Виникає питання: наскільки принциповою тут є умова аналітичності півгрупи?

Гіпотеза. *Якщо* $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ *— довільна рівномірно стійка* C_0*-півгрупа в* $\mathfrak{B}$, *то множина орбіт, що поводять себе на нескінченності як* e^{-at^α} $(0 < \alpha < 1/2$, $a > 0)$, *є щільною в* $\mathfrak{B}_T$.

1. *Neerven van J. M. A. M.* The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators. – Basel: Birkhäuser, 1996. – 236 p.
2 *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
3. *Grabosch A., Greiner G. et al.* One parameter semigroups of positive operators // Lect. Notes Math. – 1986. – **1184**. – 460 p.
4. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ / ВИНИТИ. – 1990. – **28**. – С. 87–201.
5. *Горбачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений // Докл. АН СССР. – 1989. – **308**, № 1. – С. 23–27.
6. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York etc.: Springer, 1983. – 279 p.
7. *Datko R.* Extending a theorem of A. M. Liapunov to Hilbert space // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – **32**. – P. 610–616.
8. *Pazy A.* On the applicability of Lyapunov's theorem in Hilbert space // SIAM J. Math. Anal. – 1972. – **3**. – P. 291–294.
9. *Якубович В. А.* Частотная теорема для случая, когда пространства состояний и управлений гильбертовы, и ее применения в некоторых задачах синтеза оптимального управления. II // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, № 15. – С. 1081–1102.
10. *Крейн М. Г.* Замечание об одной теореме из статьи В. А. Якубовича „Частотная теорема для случая, когда . . . II" // Там же. – 1977. – **18**, № 6. – С. 1411–1413.
11. *Laubenfels de R.* Inverses of generators // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – **104**, № 2. – P. 433–448.
12. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 347 p.
13. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math. – 1959. – **79**. – P. 572–615.
14. *Goodman R.* Analytic and entire vectors for representations of Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – **143**. – P. 55–76.
15. *Радыно Я. В.* Пространство векторов экспоненциального типа // Докл. АН БССР. – 1983. – **27**, № 9. – С. 791–793.
16. *Lions J. L., Magenes E.* Problèmes aux limites non homogènes et applications. 3. – Paris: Dunod, 1970. – 328 p.
17. *Кашпіровський О. І.* Аналітичне зображення узагальнених функцій S-типу // Допов. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 4. – С. 12–14.
18. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, № 3. – С. 55–91.
19. *Горбачук М. Л., Горбачук В. І.* Про наближення гладких векторів замкненого оператора векторами експоненціального типу // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 5. – С. 616–628.
20. *Горбачук М. Л.* Про аналітичні розв'язки диференціально-операторних рівнянь // Там же. – 2000. – **52**, № 5. – С. 596–607.
21. *Gorbachuk M. L., Mokrousov Yu. G.* On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 23–29.

Одержано 10.10.2005