УДК 517.9

А. А. Ковалевский (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О СХОДИМОСТИ ФУНКЦИЙ ИЗ СОБОЛЕВСКОГО ПРОСТРАНСТВА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОЦЕНКАМ

We consider sequences of functions in a Sobolev space which satisfy special integral estimates. For such sequences, in one case, we establish a lemma on the choice of pointwise convergent subsequences and, in other case, we prove a theorem on the convergence in measure of the corresponding sequences of generalized derivatives. We present the application of these results to the question of existence of entropy solutions of nonlinear equations with degenerate coercitivity and L^1-data.

Для послідовностей функцій із соболевського простору, що задовольняють спеціальні інтегральні оцінки, в одному випадку встановлено лему про вибір поточково збіжних підпослідовностей, а в іншому — доведено теорему про збіжність за мірою відповідних послідовностей узагальнених похідних. Наведено застосування цих результатів до питання про існування ентропійних розв'язків нелінійних рівнянь із виродженою коерцитивністю і L^1-даними.

Введение. В настоящей работе рассматриваются последовательности функций из соболевского пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющие специальным интегральным оценкам. Для таких последовательностей в одном случае устанавливается лемма о выборе поточечно сходящихся подпоследовательностей, а в другом — доказывается теорема о сходимости по мере соответствующих последовательностей обобщенных производных. Эти результаты тесно связаны с известным подходом (см., например, [1]) к разрешимости нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с L^1-данными. Реализация этого подхода в различных случаях, зависящих от условий на коэффициенты уравнений, приводит к основным ситуациям, обобщением которых являются предлагаемые результаты. Таким образом, полученные утверждения, с одной стороны, имеют определенный самостоятельный интерес, а с другой — позволяют упростить доказательство теорем существования решений нелинейных задач с L^1-данными в рамках упомянутого выше подхода.

Работа состоит из четырех пунктов. В п. 1 даются некоторые сведения о функциональном множестве $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, используемом в дальнейшем изложении. Во втором пункте для последовательности функций $u_j \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ с определенным поведением интегралов функций $|\nabla u_j|^p$ по множествам $\{|u_j| < k\}$, $k \geq 1$, устанавливается лемма о выборе подпоследовательности, поточечно сходящейся к некоторому элементу множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и связанной с этим элементом еще одним важным свойством сходимости. В п. 3 для последовательности $\{u_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, сходящейся по мере к функции из $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и связанной с этой функцией посредством некоторого семейства предельных интегральных оценок, доказывается сходимость по мере соответствующих последовательностей обобщенных производных. Наконец, в четвертом пункте дается приложение полученных результатов к доказательству существования энтропийных решений задачи Дирихле для нелинейных уравнений второго порядка с вырождающейся коэрцитивностью и L^1-данными.

1. Множество функций $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $p \in (1, n)$. Кроме того, пусть для любого $k > 0$ T_k — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$T_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если} \quad |s| \leq k, \\ k \operatorname{sign} s, & \text{если} \quad |s| > k. \end{cases}$$

Известно, что если $\lambda \geq 1$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $k > 0$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,\lambda}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем

$$D_i T_k(u) = D_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \text{п. в. на} \quad \Omega. \tag{1}$$

Через $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что для любого $k > 0$ $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Заметим, что элементы множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ являются измеримыми функциями. Действительно, если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то измеримость функции u следует из измеримости функций $T_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, и поточечной сходимости последовательности $\{T_k(u)\}$ к u.

Очевидно, что

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \subset \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega). \tag{2}$$

Вместе с тем множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ содержит функции, не принадлежащие $L^1(\Omega)$. Следовательно, множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ шире пространства $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Для произвольных $u : \Omega \to \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$ положим $k(u, x) = \min\{l \in \mathbb{N} : |u(x)| \leq \leq l\}$.

Определение 1. *Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда $\delta_i u$ — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$*

$$\delta_i u(x) = D_i T_{k(u,x)}(u)(x). \tag{3}$$

Предложение 1. *Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда для любого $k > 0$ имеем*

$$D_i T_k(u) = \delta_i u \cdot 1_{\{|u|<k\}} \quad \textit{п. в. на} \quad \Omega. \tag{4}$$

Из предложения 1 следует, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $D_i T_k(u) \to \delta_i u$ п. в. на Ω. Отсюда заключаем, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то функции $\delta_i u$, $i = 1, \ldots, n$, измеримы.

Заметим еще, что из (1), (2) и предложения 1 следует, что если $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, то для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ имеем $\delta_i u = D_i u$ п. в. на Ω.

Определение 2. *Если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, то δu — отображение Ω в $\mathbb{R}^n$ такое, что для любых $x \in \Omega$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$ $(\delta u(x))_i = \delta_i u(x)$.*

Приведем теперь один общий результат о суммируемости функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, для которых имеется квалифицированная оценка мер множеств $\{|u| \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Этот результат понадобится для установления свойств суммируемости элементов множества $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, удовлетворяющих некоторому семейству интегральных оценок.

Лемма 1. *Пусть u — измеримая функция на Ω, $M > 0$, $\gamma > 0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$*

$$\operatorname{meas}\{|u| \geq k\} \leq M k^{-\gamma}. \tag{5}$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \gamma)$ имеем $u \in L^{\lambda}(\Omega)$ и

$$\int\limits_{\Omega} |u|^{\lambda} dx \leq 2^{\gamma + (\gamma+\lambda)/(\gamma-\lambda)} M + \operatorname{meas}\Omega.$$

Лемма 2. *Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $M \geq 1$, $0 < \theta < p$ и для любого $k \geq 1$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p dx \leq M k^{\theta}. \tag{6}$$

Тогда для любого $k \geq 1$ имеем

$$\operatorname{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_0 M^{n/(n-p)} k^{-n(p-\theta)/(n-p)}, \tag{7}$$

$$\operatorname{meas}\{|\delta u| \geq k\} \leq (c_0 + 1) M^{n/(n-\theta)} k^{-n(p-\theta)/(n-\theta)}, \tag{8}$$

где c_0 — положительная постоянная, зависящая только от n и p.

Из лемм 1 и 2 вытекает такой результат.

Лемма 3. *Пусть $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $M \geq 1$, $0 < \theta < p$ и для любого $k \geq 1$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\{|u|<k\}} |\delta u|^p dx \leq M k^{\theta}.$$

Кроме того, пусть $0 < \lambda < n(p-\theta)/(n-\theta)$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} |u|^{\lambda(n-\theta)/(n-p)} dx \leq C_1 M^{n/(n-p)}\,, \qquad \int\limits_{\Omega} |\delta u|^{\lambda} dx \leq C_2 M^{n/(n-\theta)}\,,$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные, зависящие только от n, p, $\operatorname{meas}\Omega$, θ и λ.

***Замечание* 1.** Множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и некоторые более широкие множества функций были введены в работе [1]. Равенство вида (4) используется в [1] для определения градиента элементов функционального класса, содержащего множество $\overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$. Непосредственное определение функций $\delta_i u$ для $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ равенством (3) и доказательство предложения 1 даны в [2]. Лемма 1 по существу доказана в [3]. По поводу аналогичных результатов, в которых вместо (5) используются более точные оценки, см. [4, 5]. В случае $\theta = 1$ неравенства (7) и (8) при условии (6) установлены в [1]. Способ доказательства леммы 2 аналогичен изложенному в [1].

2. Лемма о выборе.

Лемма 4. *Пусть* $M \geq 1,\ 0 < \theta < p,\ \{u_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ *и для любых* $k \geq 1$ *и* $j \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\{|u_j|<k\}} |\nabla\, u_j|^p dx \leq M k^{\theta}. \tag{9}$$

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ *и функция* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ *такие, что*

$$u_{j_l} \to u \quad \textit{п. в. на} \quad \Omega, \tag{10}$$

$$T_k(u_{j_l}) \to T_k(u) \quad \textit{слабо в} \quad \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \quad \forall k > 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $k > 0$ и $j \in \mathbb{N}$. Имеем $T_k(u_j) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда, используя (9), получаем

$$\|T_k(u_j)\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)} \leq k^p \operatorname{meas}\Omega + n \int\limits_{\{|u_j|<k\}} |\nabla\, u_j|^p dx \leq (nM + \operatorname{meas}\Omega)\,(k+1)^p.$$

Следовательно, для любого $k > 0$ последовательность $\{T_k(u_j)\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{j'_m\} \subset \mathbb{N}$ и последовательность $\{w_k\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $T_k(u_{j'_m}) \to w_k$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Отсюда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$T_k(u_{j'_m}) \to w_k \quad \text{сильно в} \quad L^1(\Omega). \tag{12}$$

Далее, в силу леммы 2 для любых $k \geq 1$ $u\, j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\operatorname{meas}\{|u_j| \geq k\} \leq c_0\, M^{n/(n-p)} k^{-n(p-\theta)/(n-p)}. \tag{13}$$

Зафиксируем теперь $t > 0$ и $\varepsilon > 0$, и пусть $k \in \mathbb{N}$, причем

$$c_0\, M^{n/(n-p)} k^{-n(p-\theta)/(n-p)} \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{14}$$

В силу (12) существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$,

$$\int\limits_{\Omega} |T_k(u_{j'_m}) - w_k|\, dx \leq \frac{\varepsilon t}{4}. \tag{15}$$

Зафиксируем $m, l \in \mathbb{N}$, $m,\, l \geq m_0$. Ясно, что

$$\operatorname{meas}\{|u_{j'_m} - u_{j'_l}| \geq t\} \leq$$

$$\leq \operatorname{meas}\{|u_{j'_m}| \geq k\} + \operatorname{meas}\{|u_{j'_l}| \geq k\} + \operatorname{meas}\{|T_k(u_{j'_m}) - T_k(u_{j'_l})| \geq t\}. \tag{16}$$

В силу (13) и (14) имеем

$$\operatorname{meas}\{|u_{j'_m}| \geq k\} + \operatorname{meas}\{|u_{j'_l}| \geq k\} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Кроме того, используя (15), получаем

$$\operatorname{meas}\{|T_k(u_{j'_m}) - T_k(u_{j'_l})| \geq t\} \leq \frac{1}{t}\int\limits_{\Omega} |T_k(u_{j'_m}) - T_k(u_{j'_l})|dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (16), (17) следует, что $\operatorname{meas}\{|u_{j'_m} - u_{j'_l}| \geq t\} \leq \varepsilon$.

Значит, последовательность $\{u_{j'_m}\}$ фундаментальна по мере, а тогда в силу теоремы Ф. Рисса существует измеримая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ такая, что $u_{j'_m} \to u$ по мере. Следовательно, существует возрастающая последовательность $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$, для которой справедливо утверждение (10).

Далее, пусть $k > 0$. Поскольку последовательность $\{T_k(u_j)\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и в силу (10) $T_k(u_{j_l}) \to T_k(u)$ сильно в $L^p(\Omega)$, то $T_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и $T_k(u_{j_l}) \to T_k(u)$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ и справедливо утверждение (11).

Лемма доказана.

***Замечание* 2.** Основные идеи доказательства леммы 4 содержатся в [1] (теорема 6.1).

3. Теорема о сходимости производных. Сначала докажем следующее простое утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $\mu \in L^1(\Omega)$, $\mu > 0$ *п. в. на* Ω *и* E_j *— такая последовательность измеримых множеств в* Ω, *что*

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{E_j} \mu\, dx = 0. \tag{18}$$

Тогда

$$\lim_{j\to\infty} \operatorname{meas} E_j = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Для любого $t > 0$ положим $G_t = \{\mu \leq t\}$. Покажем, что

$$\lim_{t\to 0} \operatorname{meas} G_t = 0. \tag{20}$$

Действительно, предположим, что семейство $\operatorname{meas} G_t$, $t > 0$, не сходится к нулю при $t \to 0$. Тогда найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и убывающая последовательность $\{t_i\}$, $t_i \to 0$, такие, что

$$\operatorname{meas} G_{t_i} \geq \varepsilon_0 \quad \forall\, i \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Положим $G = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_{t_i}$. Поскольку для любого $i \in \mathbb{N}$ $G_{t_{i+1}} \subset G_{t_i}$, то $\operatorname{meas} G_{t_i} \to$ $\to \operatorname{meas} G$. Отсюда и из (21) следует, что $\operatorname{meas} G > 0$. Далее, так как $\mu > 0$ п. в. на Ω, существует измеримое множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E$ $\mu(x) > 0$. Тогда $\mu(x) > 0$ для $x \in G \setminus E$. С другой стороны, в силу определения множеств G и G_{t_i} для любого $i \in \mathbb{N}$ $\mu(x) \leq t_i$, $x \in G_{t_i}$. Отсюда, учитывая, что $t_i \to 0$, приходим к неравенству $\mu(x) \leq 0$, $x \in G$. Полученное противоречие доказывает, что (20) выполняется.

Зафиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. В силу (20) существует $t > 0$ такое, что

$$\operatorname{meas} G_t \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{22}$$

В силу (18) существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$,

$$\int\limits_{E_j} \mu\, dx \leq \frac{\varepsilon t}{2}. \tag{23}$$

Зафиксируем $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$. Ясно, что

$$\operatorname{meas} E_j = \operatorname{meas}(E_j \cap \{\mu \leq t\}) + \operatorname{meas}(E_j \cap \{\mu > t\}) \leq$$
$$\leq \operatorname{meas} G_t + \operatorname{meas}(E_j \cap \{\mu > t\}). \tag{24}$$

Учитывая, что $\mu > 0$ п. в. на Ω, получаем

$$\int\limits_{E_j} \mu\, dx \geq \int\limits_{E_j \cap \{\mu > t\}} \mu\, dx \geq t \operatorname{meas}(E_j \cap \{\mu > t\}).$$

Отсюда и из (22) – (24) следует, что

$$\operatorname{meas} E_j \leq \operatorname{meas} G_t + \frac{1}{t} \int\limits_{E_j} \mu\, dx \leq \varepsilon.$$

Теперь можно сделать вывод, что (19) выполняется.

Лемма доказана.

Перейдем к результатам о сходимости производных для функций из $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть Φ — функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и выполняются условия*:

i) *для любого $k > 0$ существуют $\tilde{c}_k > 0$ и $\tilde{g}_k \in L^1(\Omega)$, $\tilde{g}_k \geq 0$ на Ω, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leq k$, и ξ, $\xi' \in \mathbb{R}^n$*

$$0 \leq \Phi(x, s, \xi, \xi') \leq \tilde{c}_k(|\xi|^p + |\xi'|^p) + \tilde{g}_k(x);$$

ii) *для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и ξ, $\xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$,*

$$\Phi(x, s, \xi, \xi') > 0.$$

Пусть, далее, $\{u_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $u_j \to u$ по мере,

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{meas}\{|u_j| \geq m\} = 0, \tag{25}$$

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{j \in \mathbb{N}} \operatorname{meas}\{|\nabla u_j| \geq m\} = 0. \tag{26}$$

Пусть, наконец, существуют функции ν_1, $\nu_2 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что $\nu_2(s) \to 0$ при $s \to 0$ и для любых $m \geq 1$ и $k \in (0, \nu_1(m)]$

$$\overline{\lim_{j \to \infty}} \int\limits_{\{|u_j| < m, |u| < m, |u_j - u| < k\}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u)\, dx \leq \nu_2(k). \tag{27}$$

Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $D_i u_j \to \delta_i u$ по мере.

Доказательство. Пусть для любого $x \in \Omega$ Φ_x — функция на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ такая, что для любой тройки $(s,\xi,\xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ имеем $\Phi_x(s,\xi,\xi') = \Phi(x,s,\xi,\xi')$. Поскольку Φ — функция Каратеодори на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ и выполняется условие ii), существует измеримое множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что: для любого $x \in \Omega \setminus E$ функция Φ_x непрерывна на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$; для любых $x \in \Omega\setminus E$, $s \in \mathbb{R}$, $\xi,\, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$, имеем $\Phi_x(s,\xi,\xi') > 0$.

Положим для любых $t > 0$ и $m > t$

$$G_{t,m} = \big\{(s,\xi,\xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n : |s| \le m,\ |\xi| \le m,\ |\xi'| \le m,\ |\xi-\xi'| \ge t\big\}.$$

Очевидно, что для любых $t > 0$ и $m > t$ множество $G_{t,m}$ непусто, замкнуто и ограничено.

Пусть для произвольных $t > 0$ и $m > t$ $\mu_{t,m}$ — функция на Ω такая, что

$$\mu_{t,m}(x) = \begin{cases} \min\limits_{G_{t,m}} \Phi_x\,, & \text{если} \quad x \in \Omega\setminus E, \\ 0, & \text{если} \quad x \in E. \end{cases}$$

Зафиксируем $t > 0$ и $m > t$. Нетрудно убедиться в том, что

$$\mu_{t,m} > 0 \quad \text{на} \quad \Omega\setminus E. \tag{28}$$

Кроме того, в силу условия i) имеем

$$\mu_{t,m} \le 2\tilde{c}_m m^p + \tilde{g}_m \quad \text{п. в. на} \quad \Omega. \tag{29}$$

Докажем, что функция $\mu_{t,m}$ измерима. Пусть $\mathcal{R}$ — множество всех $(s,\xi,\xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ таких, что s рационально и для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ ξ_i и ξ'_i рациональны. Положим $G^{(0)}_{t,m} = G_{t,m}\cap\mathcal{R}$. Имеем $G^{(0)}_{t,m} \neq \varnothing$ и $G^{(0)}_{t,m}$ плотно в $G_{t,m}$. Действительно, пусть $(s,\xi,\xi') \in G_{t,m}$ и $\varepsilon > 0$. Предположим, что $|\xi-\xi'| > t$. Тогда, взяв λ такое, что

$$\max\Big(1-\frac{\varepsilon}{2m},\ \frac{t}{|\xi-\xi'|}\Big) < \lambda < 1,$$

и положив $s_1 = \lambda s$, $\eta = \lambda\xi$, $\eta' = \lambda\xi'$, получим неравенства

$$|s_1| < m, \quad |\eta| < m, \quad |\eta'| < m, \quad |\eta-\eta'| > t, \tag{30}$$

$$|s_1-s|^2 + |\eta-\xi|^2 + |\eta'-\xi'|^2 < \varepsilon^2. \tag{31}$$

Предположим теперь, что $|\xi| < m$ и $|\xi'| < m$. Тогда, взяв λ_1 и λ такие, что

$$\max\left(|\xi|,|\xi'|\right) < \lambda_1 < m, \qquad 1 < \lambda < \min\Big(2,\ \frac{m}{\lambda_1},\ 1+\frac{\varepsilon}{2m}\Big),$$

и положив $s_1 = (2-\lambda)s$, $\eta = \lambda\xi$, $\eta' = \lambda\xi'$, снова получим неравенства (30) и (31). Осталось рассмотреть следующий случай: $|\xi-\xi'| = t$ и выполняется хотя бы одно из равенств $|\xi| = m$ и $|\xi'| = m$. Пусть, для определенности, $|\xi| = m$. Тогда $m^2 - t^2 = |\xi|^2 - |\xi-\xi'|^2 = 2(\xi,\xi') - |\xi'|^2$. Отсюда, учитывая, что $m > t$, получаем $(\xi,\xi') > 0$. Это же неравенство имеем при $|\xi'| = m$. Следовательно, существует $j \in \{1,\ldots,n\}$ такое, что $\xi_j\xi'_j > 0$. Возьмем λ такое, что

$$0 < \lambda < \min\Big(1,\ \frac{|\xi_j|}{2},\ \frac{|\xi'_j|}{2},\ \frac{\varepsilon}{2m},\ \frac{\varepsilon}{4}\Big),$$

и пусть $s_1 = (1-\lambda)s$, η, $\eta' \in \mathbb{R}^n$, причем

$$\eta_j = \xi_j - \lambda\left[2^{(1-\operatorname{sign}\xi_j)/2}\operatorname{sign}\xi_j - \min(0, \operatorname{sign}(\xi_j - \xi'_j))\right],$$

$$\eta'_j = \xi'_j - \lambda\left[2^{(1+\operatorname{sign}\xi'_j)/2}\operatorname{sign}\xi'_j + \min(0, \operatorname{sign}(\xi_j - \xi'_j))\right],$$

а для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$, $i \neq j$, имеем $\eta_i = \xi_i$, $\eta'_i = \xi'_i$. Тогда выполняются неравенства (30) и (31). Итак, в любом случае существует тройка $(s_1, \eta, \eta') \in \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ такая, что имеют место неравенства (30) и (31). Пусть теперь $\overline{s}$ — рациональное число такое, что $|\overline{s} - s_1| < \min(m - |s_1|, \varepsilon/2)$, и пусть $\overline{\xi}, \overline{\xi}' \in \mathbb{R}^n$, причем для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ $\overline{\xi}_i, \overline{\xi}'_i$ — рациональные числа и

$$|\overline{\xi}_i - \eta_i| < \frac{1}{2n}\min(m - |\eta|,\, |\eta - \eta'| - t, \varepsilon),$$

$$|\overline{\xi}'_i - \eta'_i| < \frac{1}{2n}\min(m - |\eta'|,\, |\eta - \eta'| - t, \varepsilon).$$

Тогда, используя (31), получаем, что $(\overline{s}, \overline{\xi}, \overline{\xi}') \in G^{(0)}_{t,m}$ и $|\overline{s} - s|^2 + |\overline{\xi} - \xi|^2 + |\overline{\xi}' - \xi'|^2 < < 4\varepsilon^2$. Таким образом, приходим к выводу, что множество $G^{(0)}_{t,m}$ плотно в $G_{t,m}$.

Далее, зафиксируем произвольное $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$\{x \in \Omega\setminus E : \mu_{t,m}(x) < \lambda\} = \bigcup_{(s,\xi,\xi')\in G^{(0)}_{t,m}} \{x \in \Omega\setminus E : \Phi(x, s, \xi, \xi') < \lambda\}. \qquad (32)$$

Действительно, пусть y принадлежит левой части равенства (32). Имеем $y \in \Omega\setminus E$ и $\mu_{t,m}(y) < \lambda$. Тогда в силу определения функции $\mu_{t,m}$ существует тройка $(s, \xi, \xi') \in \in G_{t,m}$ такая, что $\Phi_y(s, \xi, \xi') < \lambda$. Следовательно, вследствие непрерывности функции Φ_y на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любой тройки $(\tilde{s}, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, удовлетворяющей неравенству $|\tilde{s} - s|^2 + |\tilde{\xi} - \xi|^2 + + |\tilde{\xi}' - \xi'|^2 < \varepsilon^2$, выполняется неравенство $\Phi_y(\tilde{s}, \tilde{\xi}, \tilde{\xi}') < \lambda$. Тогда в силу плотности множества $G^{(0)}_{t,m}$ в $G_{t,m}$ найдется тройка $(s_1, \eta, \eta') \in G^{(0)}_{t,m}$, для которой $\Phi_y(s_1, \eta, \eta') < \lambda$. Последнее неравенство с учетом определения функции Φ_y означает, что $\Phi(y, s_1, \eta, \eta') < \lambda$. Следовательно, точка y принадлежит правой части равенства (32). Обратно, пусть y принадлежит правой части равенства (32). Следовательно, существует тройка $(s, \xi, \xi') \in G_{t,m}$ такая, что $y \in \Omega\setminus E$ и $\Phi(y, s, \xi, \xi') < \lambda$. Тогда в силу определения функции $\mu_{t,m}$ имеем $\mu_{t,m}(y) \le \Phi(y, s, \xi, \xi') < \lambda$. Отсюда вытекает, что y принадлежит левой части равенства (32). Проведенные рассуждения доказывают, что равенство (32) справедливо.

Поскольку Φ — функция Каратеодори на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, для любой тройки $(s, \xi, \xi') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ множество $\{\Phi(\cdot, s, \xi, \xi') < \lambda\}$ измеримо. Отсюда следует, что для любой тройки $(s, \xi, \xi') \in G^{(0)}_{t,m}$ множество $\{x \in \Omega\setminus E : \Phi(x, s, \xi, \xi') < \lambda\}$ измеримо. Тогда, учитывая, что множество $G^{(0)}_{t,m}$ счетно, из равенства (32) выводим, что множество $\{\mu_{t,m} < \lambda\}$ измеримо и, значит, функция $\mu_{t,m}$ измерима.

Теперь, учитывая (28) и (29), заключаем, что для любых $t > 0$ и $m > t$ функция $\mu_{t,m}$ суммируема на Ω.

Далее, покажем, что

$$\lim_{m\to\infty} \text{meas}\,\{|u| \geq m\} = 0, \tag{33}$$

$$\lim_{m\to\infty} \text{meas}\,\{|\delta\, u| \geq m\} = 0. \tag{34}$$

Действительно, пусть $\tau > 0$. Поскольку $u_j \to u$ по мере, то существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\text{meas}\,\{|u_l - u| \geq \tau\} \leq \frac{\tau}{2}. \tag{35}$$

Кроме того, в силу (25) существует $m_0 > 0$ такое, что для любого $m \geq m_0$

$$\text{meas}\,\{|u_l| \geq m\} \leq \frac{\tau}{2}. \tag{36}$$

Зафиксируем $m \geq 2\,\max(\tau, m_0)$. В силу (36) имеем

$$\text{meas}\,\left\{|u_l| \geq \frac{m}{2}\right\} \leq \frac{\tau}{2}. \tag{37}$$

Положим $G' = \{|u| \geq m,\ |u_l - u| < \tau\}$. Ясно, что

$$\{|u| \geq m\} \subset \{|u_l - u| \geq \tau\} \cup G'. \tag{38}$$

Для $x \in G'$ имеем $m \leq |u(x)| \leq |u_l(x) - u(x)| + |u_l(x)| < \tau + |u_l(x)| \leq \dfrac{m}{2} + |u_l(x)|$. Тогда $x \in \left\{|u_l| \geq \dfrac{m}{2}\right\}$ и, следовательно, $G' \subset \left\{|u_l| \geq \dfrac{m}{2}\right\}$. Отсюда и из (38) вытекает, что $\text{meas}\,\{|u| \geq m\} \leq \text{meas}\,\{|u_l - u| \geq \tau\} + \text{meas}\,\left\{|u_l| \geq \dfrac{m}{2}\right\}$. Это неравенство, а также (35), (37) позволяют заключить, что $\text{meas}\,\{|u| \geq m\} \leq \tau$. Следовательно, (33) выполняется.

Перейдем к доказательству свойства (34). Пусть $\tau > 0$. В силу (33) существует $k > 0$ такое, что

$$\text{meas}\,\{|u| \geq k\} \leq \frac{\tau}{2}. \tag{39}$$

Зафиксируем произвольное m такое, что

$$m > \frac{2}{\tau} \int\limits_{\Omega} |\nabla\, T_k(u)| dx, \tag{40}$$

и положим $G'' = \{|u| < k,\ |\delta u| \geq m\}$. Предположим, что $\text{meas}\, G'' > 0$. Тогда, учитывая предложение 1, получаем, что $m \leq |\nabla\, T_k(u)|$ п. в. на G'' и, следовательно,

$$m\ \text{meas}\, G'' \leq \int\limits_{\Omega} |\nabla\, T_k(u)| dx. \tag{41}$$

Очевидно, что это неравенство выполняется и в случае, когда $\text{meas}\, G'' = 0$. Из (40) и (41) следует, что

$$\text{meas}\, G'' \leq \frac{\tau}{2}. \tag{42}$$

Используя (39) и (42), получаем $\text{meas}\,\{|\delta u| \geq m\} \leq \text{meas}\,\{|u| \geq k\} + \text{meas}\, G'' \leq \tau$. Следовательно, (34) выполняется.

Далее, зафиксируем $t > 0$ и $\varepsilon > 0$. В силу (25), (26), (33) и (34) существует $m > \max(1, t)$ такое, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \text{meas}\{|u_j| \geq m\} \leq \varepsilon, \qquad \sup_{j\in\mathbb{N}} \text{meas}\{|\nabla\, u_j| \geq m\} \leq \varepsilon, \tag{43}$$

$$\text{meas}\{|u| \geq m\} \leq \varepsilon, \qquad \text{meas}\{|\delta u| \geq m\} \leq \varepsilon. \tag{44}$$

Для любых $k,\, j \in \mathbb{N}$ положим

$$E(k,j) =$$

$$= \left\{ |u_j| \leq m,\, |u| \leq m,\, |\nabla u_j| \leq m,\, |\delta u| \leq m, |u_j - u| < \frac{1}{k},\, |\nabla u_j - \delta u| \geq t \right\}.$$

Пусть $k,\, j \in \mathbb{N}$ и $x \in E(k,j) \setminus E$. Имеем $|u_j(x)| \leq m$, $|\nabla u_j(x)| \leq \leq m$, $|\delta u(x)| \leq m$, $|\nabla u_j(x) - \delta u(x)| \geq t$ и, следовательно, $(u_j(x),\, \nabla u_j(x),\, \delta u(x)) \in \in G_{t,m}$. Тогда в силу определения функций $\mu_{t,m}$ и Φ_x имеем $\mu_{t,m}(x) \leq \Phi(x, u_j(x),$ $\nabla u_j(x),\, \delta u(x))$.

Теперь можно заключить, что для любых $k,\, j \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{E(k,j)} \mu_{t,m}\, dx \leq \int\limits_{E(k,j)} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u) dx. \tag{45}$$

Кроме того, так как согласно условию i) для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\Phi(x, s, \xi, \xi') \geq 0$, то в силу условия (27) существует последовательность $\{j_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \dfrac{1}{\nu_1(m)}$, и $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_k$, имеем

$$\int\limits_{E(k,j)} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u) dx \leq 2\nu_2 \left(\frac{1}{k}\right). \tag{46}$$

Из (45) и (46) следует, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $k \geq \dfrac{1}{\nu_1(m)}$, и $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_k$,

$$\int\limits_{E(k,j)} \mu_{t,m}\, dx \leq 2\nu_2 \left(\frac{1}{k}\right). \tag{47}$$

Покажем, что

$$\sup_{j\geq j_k} \text{meas}\, E(k,j) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{48}$$

Действительно, предположим, что утверждение (48) неверно. Тогда существуют $\tau > 0$ и возрастающая последовательность $\{k_l\} \subset \mathbb{N} \cap \left[\dfrac{1}{\nu_1(m)}, +\infty\right)$ такие, что для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем $\sup\limits_{j\geq j_{k_l}} \text{meas}\, E(k_l, j) \geq \tau$. Отсюда следует, что для любого $l \in \mathbb{N}$ найдется $s_l \in \mathbb{N}$, $s_l \geq j_{k_l}$, такое, что

$$\text{meas}\, E(k_l, s_l) \geq \frac{\tau}{2}. \tag{49}$$

В силу (47) для любого $l \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_{E(k_l,s_l)} \mu_{t,m}\, dx \leq 2\nu_2\left(\frac{1}{k_l}\right)$$

и, следовательно,

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_{E(k_l,s_l)} \mu_{t,m} dx = 0.$$

Тогда, учитывая, что $\mu_{t,m} \in L^1(\Omega)$ и $\mu_{t,m} > 0$ п. в. на Ω, и используя лемму 5, получаем $\lim\limits_{l\to\infty} \text{meas}\, E(k_l, s_l) = 0$, что противоречит (49). Полученное противоречие доказывает, что утверждение (48) является справедливым.

Из этого утверждения следует, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sup_{j\geq j_k} \text{meas}\, E(k,j) \leq \varepsilon. \tag{50}$$

В силу сходимости $\{u_j\}$ к u по мере найдется $j'_k \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j'_k$,

$$\text{meas}\left\{|u_j - u| \geq \frac{1}{k}\right\} \leq \varepsilon. \tag{51}$$

Зафиксируем теперь $j \in \mathbb{N}$, $j \geq \max(j_k, j'_k)$. Ясно, что

$$\text{meas}\,\{|\nabla u_j - \delta u| \geq t\} \leq$$
$$\leq \text{meas}\,\{|u_j| > m\} + \text{meas}\,\{|u| > m\} + \text{meas}\,\{|\nabla u_j| > m\} +$$
$$+ \text{meas}\,\{|\delta u| > m\} + \text{meas}\left\{|u_j - u| \geq \frac{1}{k}\right\} + \text{meas}\, E(k,j).$$

Отсюда и из неравенств (43), (44), (50) и (51) выводим, что $\text{meas}\,\{|\nabla u_j - \delta u| \geq \geq t\} \leq 6\varepsilon$. Следовательно, для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ имеем $D_i u_j \to \delta_i u$ по мере.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** При доказательстве теоремы 1 использованы некоторые идеи работ [1, 3].

***Следствие* 1.** *Пусть* $0 < \tilde{p} < np/(n-p)$, $\tilde{c} > 0$, $\tilde{g} \in L^1(\Omega)$, $\tilde{g} \geq 0$ *на* Ω, *и* Φ *— функция Каратеодори на* $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. *Кроме того, пусть выполняются следующие условия*:

i) *для почти всех* $x \in \Omega$ *и любых* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$

$$0 \leq \Phi(x,s,\xi,\xi') \leq \tilde{c}(|s|^{\tilde{p}} + |\xi|^p + |\xi'|^p) + \tilde{g}(x);$$

ii) *для почти всех* $x \in \Omega$ *и любых* $s \in \mathbb{R}$ *и* $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$,

$$\Phi(x,s,\xi,\xi') > 0.$$

Пусть, далее, $\{u_j\} \subset \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, $u_j \to u$ *слабо в* $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ *и существует* $k_0 > 0$ *такое, что*

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\{|u_j-u|<k_0\}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \nabla u)\, dx = 0. \tag{52}$$

Тогда для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $D_i u_j \to D_i u$ *по мере.*

Доказательство. Очевидно, что функция Φ удовлетворяет условиям i) и ii) теоремы 1. В силу слабой сходимости $\{u_j\}$ к u в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ $u_j \to u$ сильно в $L^1(\Omega)$ и, следовательно, $u_j \to u$ по мере.

Покажем, что последовательность $\{u_j\}$ и функция u удовлетворяют условиям (25) – (27).

Поскольку $u_j \to u$ слабо в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$, последовательность $\{u_j\}$ ограничена в $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда существует $M > 0$ такое, что для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_\Omega |u_j| dx \le M, \qquad \int\limits_\Omega |\nabla\, u_j| dx \le M. \tag{53}$$

В силу неравенства Чебышева для любых $m > 0$ и $j \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{meas}\{|u_j| \ge m\} \le \frac{1}{m} \int\limits_\Omega |u_j| dx.$$

Отсюда, учитывая первое из неравенств (53), получаем (25). Аналогично, используя неравенство Чебышева для функций $|\nabla u_j|$ и второе из неравенств (53), устанавливаем (26).

Далее, пусть $\nu_1, \nu_2 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — функции такие, что для любого $s \in (0, +\infty)$ $\nu_1(s) = k_0$, $\nu_2(s) = s$. Тогда, учитывая, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^n$ имеем $\Phi(x, s, \xi, \xi') \ge 0$, из (52) выводим, что для любых $m \ge 1$ и $k \in (0, \nu_1(m)]$

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \int\limits_{\{|u_j|<m, |u|<m, |u_j-u|<k\}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \nabla u)\, dx < \nu_2(k).$$

Следовательно, условие (27) выполняется.

Теперь в силу теоремы 1 для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ $D_i u_j \to D_i u$ по мере.

Следствие доказано.

4. Приложение к нелинейным уравнениям с L^1-данными. Пусть для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ a_i — функция Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Будем предполагать, что для любого $k > 0$ существуют $\overline{c}_k > 0$ и $\overline{g}_k \in L^1(\Omega)$, $\overline{g}_k \ge 0$ на Ω, такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$, $|s| \le k$, и $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n |a_i(x, s, \xi)|^{p/(p-1)} \le \overline{c}_k |\xi|^p + \overline{g}_k(x). \tag{54}$$

Кроме того, будем считать, что существуют $p_1 \in [0, p-1)$ и $c_1 > 0$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, s, \xi)\xi_i \ge \frac{c_1 |\xi|^p}{(1 + |s|)^{p_1}}. \tag{55}$$

Наконец, будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $s \in \mathbb{R}$ и ξ, $\xi' \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq \xi'$,

$$\sum_{i=1}^{n} [a_i(x,s,\xi) - a_i(x,s,\xi')](\xi_i - \xi_i') > 0. \tag{56}$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Будем рассматривать следующую задачу Дирихле:

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_i(x,u,\nabla u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{57}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{58}$$

Заметим, что если $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$, $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $k > 0$ и $i \in \{1,\ldots,n\}$, то функция $a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi)$ суммируема на множестве $\{|u-\varphi| < k\}$. Это следует из предложения 1 и неравенства (54).

Определение 3. *Энтропийным решением задачи* (57), (58) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ *такую, что для любых* $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ *и* $k > 0$ *выполняется неравенство*

$$\int\limits_{\{|u-\varphi|<k\}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,u,\delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx \leq \int\limits_{\Omega} f\, T_k(u-\varphi)\, dx.$$

Теорема 2. *Существует энтропийное решение задачи* (57), (58).

Доказательство. Используя неравенства (54)–(56), следствие 1, теорему 2.7 из [6] (гл. 2) и лемму B.1 из [7] (гл. 2), устанавливаем: если $j \in \mathbb{N}$, то существует функция $u_j \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ такая, что для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j)\, D_i \varphi \right\} dx = \int\limits_{\Omega} T_j(f)\, \varphi\, dx. \tag{59}$$

Пусть $k \geq 1$ и $j \in \mathbb{N}$. Полагая в (59) $\varphi = T_k(u_j)$ и используя (1) и (55), получаем

$$\int\limits_{\{|u_j|<k\}} |\nabla u_j|^p\, dx \leq \left\{ \frac{2^{p_1}}{c_1}\, \|f\|_{L^1(\Omega)} \right\} k^{1+p_1}. \tag{60}$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что существуют возрастающая последовательность $\{j_l\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}{}^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$u_{j_l} \to u \quad \text{п. в. на} \quad \Omega. \tag{61}$$

Покажем, что

$$D_i u_{j_l} \to \delta_i u \quad \text{по мере} \quad \forall\, i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{62}$$

Для этого воспользуемся теоремой 1. В силу (61) $u_{j_l} \to u$ по мере, а в силу (60) и леммы 2 справедливы равенства (25) и (26). Пусть Φ — функция на $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ такая, что для любой четверки $(x,s,\xi,\xi') \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$$\Phi(x,s,\xi,\xi') = \sum_{i=1}^{n} \big[a_i(x,s,\xi) - a_i(x,s,\xi')\big](\xi_i - \xi'_i).$$

Очевидно, что Φ — функция Каратеодори. Кроме того, из (54) и (56) вытекает, что выполняются условия i) и ii) теоремы 1.

Далее, пусть $z \in C^1(\mathbb{R})$, причем $0 \le z \le 1$ на $\mathbb{R}$, $z = 1$ на $[-1,1]$ и $z = 0$ на $\mathbb{R} \setminus (-2,2)$. Положим $c = \max\limits_{\mathbb{R}} |z'|$.

Зафиксируем $m \ge 1$ и $k > 0$. Пусть z_m — функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$ $z_m(s) = z\left(\dfrac{s}{m}\right)$. Имеем $z_m \in C^1(\mathbb{R})$, $0 \le z_m \le 1$ на $\mathbb{R}$, $z_m = 1$ на $[-m,m]$, $z_m = 0$ на $\mathbb{R} \setminus (-2m,2m)$ и $|z'_m| \le \dfrac{c}{m}$ на $\mathbb{R}$.

Для любого $j \in \mathbb{N}$ положим $w_j = T_{2m}(u_j) - T_{2m}(u)$.

Пусть теперь $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 2m$. Положим $\varphi_j = z_m(u_j)\, z_m(u)\, T_k(w_j)$. Тогда $\varphi_j \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ и для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$

$$D_i\varphi_j = z_m(u_j) z_m(u) D_i T_k(w_j) + z'_m(u_j) z_m(u) T_k(w_j) D_i u_j + \\ + z_m(u_j) z'_m(u) T_k(w_j) D_i T_{2m}(u) \quad \text{п. в. на} \quad \Omega. \tag{63}$$

В силу (59)

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j) D_i\varphi_j \right\} dx = \int\limits_{\Omega} T_j(f)\varphi_j\, dx.$$

Используя последнее равенство, (63), свойства функции z_m и (54), (60) и (61), получаем

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j)\, D_i T_k(w_j) \right\} z_m(u_j) z_m(u)\, dx \le \sigma(m)k,$$

где $\sigma(m)$ — положительная постоянная, зависящая только от n, p, c_1, c, $\|f\|_{L^1(\Omega)}$ и m.

Отсюда, воспользовавшись предложением 1, неравенством (56), свойствами функции z_m и определением функции Φ, выводим, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \ge 2m$,

$$\int\limits_{\{|u_j|<m, |u|<m, |u_j - u|<k\}} \Phi(x, u_j, \nabla u_j, \delta u)\, dx \le \sigma(m)k - \\ - \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_j, \nabla T_{2m}(u)) D_i T_k(w_j) \right\} z_m(u_j) z_m(u)\, dx. \tag{64}$$

Заметим, что в силу (54), (61) и свойств функции z_m

$$\int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u_{j_l}, \nabla T_{2m}(u)) D_i T_k(w_{j_l}) \right\} z_m(u_{j_l}) z_m(u)\, dx \to 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty\,.$$

Учитывая это, из (64) получаем

$$\overline{\lim_{l\to\infty}} \int\limits_{\{|u_{j_l}|<m, |u|<m, |u_{j_l} - u|<k\}} \Phi(x, u_{j_l}, \nabla u_{j_l}, \delta u)\, dx \le \sigma(m)k. \tag{65}$$

Итак, если $m \geq 1$ и $k > 0$, то выполняется неравенство (65).

Пусть теперь $\nu_1 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, причем $\nu_1(s) = [\sigma(s)]^{-2}$ для любого $s \geq 1$, и пусть $\nu_2 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $\nu_2(s) = s^{1/2}$ для любого $s \in (0, +\infty)$. Тогда в силу (65) для любых $m \geq 1$ и $k \in (0, \nu_1(m)]$ левая часть неравенства (65) не превышает $\nu_2(k)$.

Таким образом, функция Φ и последовательность $\{u_{j_l}\}$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1, из которой выводим, что утверждение (62) является справедливым.

Далее, зафиксируем произвольные $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k > 0$. Пусть τ — неубывающая функция из $C^1(\mathbb{R})$ такая, что $\tau(s) = s$, если $s \leq -1$, и $\tau(s) = 0$, если $s \geq 0$. Пусть еще для любого $m \in \mathbb{N}$ τ_m — функция на $\mathbb{R}$ такая, что для любого $s \in \mathbb{R}$

$$\tau_m(s) = \left[\frac{1}{m}\,\tau(m(|s| - k)) + k\right] \operatorname{sign} s.$$

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}$, $m > \dfrac{1}{k}$, и возьмем $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\tau_m(u_j - -\varphi) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$. Тогда в силу (59)

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, T_j(u_j), \nabla u_j) D_i(u_j - \varphi) \right\} \tau_m'(u_j - \varphi)\, dx = \int\limits_\Omega T_j(f)\, \tau_m(u_j - \varphi)\, dx.$$

Из этого равенства, используя (54), (55), (60)–(62) и лемму Фату, имеем

$$\int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u) \delta_i u \right\} \tau_m'(u - \varphi)\, dx \leq$$

$$\leq \int\limits_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u)\, D_i \varphi \right\} \tau_m'(u - \varphi)\, dx + \int\limits_\Omega f\, \tau_m(u - \varphi)\, dx.$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство

$$\int\limits_{\{|u-\varphi| < k\}} \left\{ \sum_{i=1}^n a_i(x, u, \delta u)(\delta_i u - \delta_i \varphi) \right\} dx \leq \int\limits_\Omega f\, T_k(u - \varphi)\, dx.$$

Это позволяет заключить, что u — энтропийное решение задачи (57), (58).

Теорема доказана.

***Замечание* 4.** Соображение использовать неравенство (54), допускающее произвольный рост коэффициентов уравнения (57) по u, инспирировано работой [8], где рассматривалось аналогичное неравенство для коэффициентов параболического уравнения с L^1-данными. В случае, когда коэффициенты уравнения (57) могут иметь рост не выше порядка $p - 1$ по u, имеют рост порядка $p - 1$ по ∇u и удовлетворяют неравенствам (55) и (56), существование энтропийного решения задачи (57), (58) установлено в [9].

***Замечание* 5.** Из определения 3, неравенства (55) и леммы 3 следует, что если u — энтропийное решение задачи (57), (58), то:

1) для любого λ, $0 < \lambda < n\dfrac{p - 1 - p_1}{n - p}$, функция $|u|^\lambda$ суммируема на Ω;

2) для любого λ, $0 < \lambda < n\dfrac{p-1-p_1}{n-1-p_1}$, функция $|\delta u|^\lambda$ суммируема на Ω.

Такие же свойства суммируемости имеют энтропийные решения в случае, рассмотренном в [9].

***Замечание* 6.** Отметим, что результаты, аналогичные изложенным в пунктах 2 и 3, могут быть получены для функциональных пространств и множеств, подходящих для исследования некоторых классов нелинейных уравнений высокого порядка с L^1-данными. Здесь имеются в виду уравнения высокого порядка, коэффициенты которых удовлетворяют условию усиленной эллиптичности (условию Скрыпника [10]). Вопросы существования решений таких уравнений с L^1-правыми частями изучались в [3, 11].

1. *Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L.* An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Cl. Sci. Ser. IV. – 1995. – **22**, № 2. – P. 241 – 273.
2. *Kovalevsky A. A.* On a strict condition of limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1-right-hand sides. – Donetsk, 2003. – 50 p. – (Preprint / NAS Ukraine. Inst. Appl. Math. and Mech.; № 2003.01).
3. *Ковалевский А. А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-правыми частями // Изв. РАН. Сер. мат. – 2001. – **65**, № 2. – С. 27 – 80.
4. *Ковалевский А. А.* О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из логарифмических классов // Мат. заметки. – 2003. – **74**, № 5. – С. 676 – 685.
5. *Kovalevsky A. A.* On general conditions for limit summability of solutions of nonlinear elliptic equations with L^1-data. – Donetsk, 2004. – 15 p. – (Preprint / NAS Ukraine. Inst. Appl. Math. and Mech.; № 2004.03).
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
7. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
8. *Blanchard D., Murat F., Redwane H.* Existence et unicité de la solution renormalisée d'un problème parabolique non linéaire assez général // C. r. Acad. sci. Ser. I. – 1999. – **329**. – P. 575 – 580.
9. *Alvino A., Boccardo L., Ferone V., Orsina L., Trombetti G.* Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity // Ann. mat. pura ed appl. Ser. IV. – 2003. – **182**. – P. 53 – 79.
10. *Скрыпник И. В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104 – 1118.
11. *Kovalevsky A. A.* Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high-order equations with L^1-data // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – **12**. – С. 119 – 127.

Получено 30.09.2005