УДК 517.946

Н. Р. Сиденко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА

We prove assertion on homogenization of a hyperbolic initial boundary-value problem, in which the coefficient of the Laplace operator depends on the space L^2-norm of a solution gradient. The problem of the existence of a solution of this problem is investigated by S. I. Pokhozhaev. In the spatial domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, we consider an arbitrary perforation whose asymptotic behaviour in the capacity sense is described by the D. Cioranesku – F. Murat hypothesis. The possibility of the homogenization is proved under the assumption that solutions of the limit boundary-value hyperbolic problem with the capacity stationary potential possess some additional smoothness.

Доведено твердження про усереднення гіперболічної початково-крайової задачі, у якій коефіцієнт при операторі Лапласа залежить від просторової L^2-норми градієнта розв'язку. Питання існування розв'язку цієї задачі досліджене С. І. Похожаєвим. У просторовій області в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, розглядається довільна перфорація, асимптотична поведінка якої в ємнісному сенсі описана гіпотезою Д. Чіоранеску – Ф. Мюра. Можливість усереднення доведено за припущенням деякої додаткової гладкості розв'язків граничної гіперболічної задачі з певним ємнісним стаціонарним потенціалом.

Гиперболическим уравнением Кирхгофа называется уравнение вида

$$u_{tt}(x,t) - a\Big(\|\nabla u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)\Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n)$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$, с положительной непрерывной функцией $a : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}^+$. Для этого уравнения рассматривалась [1, 2] начально-краевая задача Дирихле в цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с границей $\partial\Omega$, T — любое фиксированное положительное число, с граничными условиями

$$u(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0,T), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Для произвольной функции $a(t)$, удовлетворяющей условиям

$$a(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}^+), \qquad a(t) \geq \alpha_0 > 0 \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}^+, \qquad \alpha_0 = \mathrm{const}, \tag{3}$$

разрешимость задачи в целом установлена в [1] для специального класса бесконечно дифференцируемых заданных функций f, φ, ψ и $\partial\Omega$ класса C^∞. В работе [2] для конкретной функции

$$a(t) = a_0(t) := (C_1 t + C_2)^{-2}, \qquad C_i = \mathrm{const} > 0, \qquad i = 1, 2, \tag{4}$$

установлена разрешимость задачи в целом для класса данных, имеющих суммируемые с квадратом производные до второго порядка включительно, и гладкой границы $\partial\Omega$ класса C^2. При этом оказывается [3], что функция (4) является единственной в классе

$$a \in C^2(\overline{\mathbb{R}}^+), \qquad a \geq 0, \tag{5}$$

при которой задача (1), (2) разрешима в целом во множестве данных, имеющих лишь производные до второго порядка, суммируемые с квадратом.

В данной работе рассматривается ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и область $\Omega^{(s)} \subset \Omega$ с многосвязной границей

$$\partial\Omega^{(s)} = \left(\bigcup_{i=1}^{N^{(s)}} \partial\Omega_i^{(s)}\right) \cup \partial\Omega,$$

называемая перфорированной областью в Ω. Здесь $s \in \mathbb{N}$ — параметр, $N^{(s)}$ — переменное число множеств $\Omega_i^{(s)} \subset \Omega$, являющихся замыканиями областей $\dot{\Omega}_i^{(s)}$ с гладкими односвязными границами $\partial\Omega_i^{(s)}$ размерности $n-1$, причем

$$\Omega_i^{(s)} \cap \Omega_j^{(s)} = \varnothing, \quad i \neq j, \qquad \Omega_i^{(s)} \cap \partial\Omega = \varnothing, \quad i = \overline{1, N^{(s)}},$$

$$F^{(s)} = \bigcup_{i=1}^{N^{(s)}} \Omega_i^{(s)}, \qquad \Omega^{(s)} = \Omega \setminus F^{(s)}.$$

Обозначая $Q^{(s)} = \Omega^{(s)} \times (0, T)$, где $T = \text{const} > 0$,

$$\left\| v^{(s)} \right\| = \left\| v^{(s)} \right\|_{L^2(\Omega^{(s)})} \quad \text{или} \quad \|v\| = \|v\|_{L^2(\Omega)},$$

что будет ясно по смыслу, рассмотрим на $\overline{Q}^{(s)}$ задачу вида (1), (2), (4) для вещественной функции $u^{(s)}(t) = u^{(s)}(x, t)$:

$$u_{tt}^{(s)}(x,t) - a_0\left(\left\|\nabla u^{(s)}(\cdot,t)\right\|^2\right)\Delta u^{(s)}(x,t) = f^{(s)}(x,t), \qquad (x,t) \in Q^{(s)},$$
$$u^{(s)}(\cdot,t)\Big|_{\partial\Omega^{(s)}} = 0, \;\; t \in (0,T), \;\; u^{(s)}(x,0) = \varphi^{(s)}(x), \;\; u_t^{(s)}(x,0) = \psi^{(s)}(x), \;\; x \in \Omega^{(s)}, \tag{6}$$

и укажем условия, при которых обеспечивается сходимость решения $u^{(s)}$ при $s \to \infty$ к некоторой предельной функции $u(x,t)$, определенной на $\overline{Q}$, когда перфорация $F^{(s)}$ бесконечно измельчается и уплотняется.

Для рассматриваемого объекта — перфорированной области — не характерна гладкость границ перфорации $\partial\Omega^{(s)}$. Поэтому, немного перефразируя работу [2], будем предполагать, что $\partial\Omega^{(s)}$ является липшицевой и выполнены условия

$$\varphi^{(s)} \in D(\Delta, L^2(\Omega^{(s)})) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^{(s)}), \qquad \psi^{(s)} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^{(s)}),$$
$$f^{(s)} \in L^2(0, T; D(\Delta, L^2(\Omega^{(s)}))) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^{(s)}), \tag{7}$$

в которых

$$D(\Delta, L^2(\Omega^{(s)})) = \left\{ v \in L^2(\Omega^{(s)}) : \Delta v \in L^2(\Omega^{(s)}) \right\},$$

причем нормы

$$\left\| f^{(s)} \right\|_{L^2(Q^{(s)})} + \left\| \Delta f^{(s)} \right\|_{L^2(Q^{(s)})}, \quad \left\| \nabla\varphi^{(s)} \right\| + \left\| \Delta\varphi^{(s)} \right\|, \quad \left\| \nabla\psi^{(s)} \right\| \leq K_0 \quad \forall s \tag{8}$$

ограничены равномерно относительно s. Тогда задача (6), как и в [2], имеет единственное решение с такими свойствами:

$$u^{(s)} \in C([0,T];\, \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^{(s)})), \qquad u_t^{(s)} \in L^\infty(0,T;\, \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^{(s)})),$$
$$\Delta u^{(s)} \in L^\infty(0,T;\, L^2(\Omega^{(s)})), \qquad u_{tt}^{(s)} \in L^2(Q^{(s)}), \tag{9}$$

причем выполняются оценки

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|u_t^{(s)}(t)\right\|^2 \le K_1, \qquad \max_{t\in[0,T]}\left\|\nabla u^{(s)}(t)\right\|^2 \le K_2,$$
$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left\|\nabla u_t^{(s)}(t)\right\|^2 \le C_2^{-1}K_2, \qquad \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)}\left\|\Delta u^{(s)}(t)\right\|^2 \le K_2(C_1K_2+C_2), \tag{10}$$

где постоянные K_1, K_2 не зависят от переменной $s\in\mathbb{N}$, а зависят только от C_1, C_2, T, K_0.

Опишем регулярность поведения области $\Omega^{(s)}$ при $s\to\infty$. Для этого выберем следующую гипотезу Д. Чиоранеску – Ф. Мюра [4, 5] о малости и компактности расположения отверстий $F^{(s)}$.

Гипотеза (А): пусть существует последовательность вещественных функций $w_s(x)$, $s\in\mathbb{N}$, со свойствами:

1) $w_s(x)\in H^1(\Omega)\bigcap L^\infty(\Omega)$;

2) $w_s(x)=0,\quad x\in F^{(s)}$;

3) $w_s(x)\to 1$ слабо в $H^1(\Omega)$, слабо* в $L^\infty(\Omega)$ и для почти всех $x\in\Omega$ при $s\to\infty$;

4) $-\Delta w_s(x) = \mu_s(x)-\gamma_s(x)$, где μ_s, $\gamma_s\in H^{-1}(\Omega)$, причем $\mu_s\to\mu$ сильно в $H^{-1}(\Omega)$ при $s\to\infty$, $(\gamma_s, v)_\Omega = 0$ для любой $v\in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ такой, что $v = 0$ на $F^{(s)}$.

Здесь и ниже обозначено

$$(u,v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx.$$

Следствие [5]. *При условиях* $1-4$ *имеем*

5) $0\le\mu(x)\in H^{-1}(\Omega)\bigcap L^1(\Omega)$, *так что* $\mu(x)$ *порождает конечную радонову меру на* Ω.

***Замечание* 1.** Нетрудно доказать, что условия B_1, B_2, C из монографии [6] (гл. 9) и работы [7] с плотностью меры $\nu(x)\in L^r(\Omega)$, $r>n/2$, сформулированные для оператора Лапласа на $H^1(\Omega)$, достаточны для выполнения гипотезы (А) с функцией $\mu\in C(\overline{\Omega})$ и $\mu\in L^r(\Omega)$, $r>n/2$, соответственно и $w_s(x)\ge 0$.

Обозначим через $\hat v^{(s)}(x)$ продолжение на Ω функции $v^{(s)}(x)$, заданной на $\Omega^{(s)}$, путем доопределения ее нулем на $F^{(s)}$. Примем также следующие сокращенные обозначения для отношений двойственности векторных функций $\vec u(x,t) = \left(u_1(x,t),\ldots,u_n(x,t)\right)$:

$$\langle\vec u,\vec v\rangle^{(s)} = \int_{Q^{(s)}}\vec u(x,t)\cdot\vec v(x,t)\,dx\,dt, \quad \langle\vec u,\vec v\rangle = \int_Q\vec u(x,t)\cdot\vec v(x,t)\,dx\,dt$$

и аналогичные обозначения для отношений двойственности скалярных функций, а также обозначим

$$N_s(t) = \left\|\nabla u^{(s)}(\cdot,t)\right\|.$$

Умножая уравнение (6) на $w_s v$, где $v\in C_0^\infty(Q)$, и интегрируя затем по $Q^{(s)}$, получаем интегральное тождество

$$\langle f^{(s)}, w_s v\rangle^{(s)} = \langle u_{tt}^{(s)}, w_s v\rangle^{(s)} - \langle a_0(N_s^2)u^{(s)}, w_s \Delta v\rangle^{(s)} -$$

$$- 2\langle a_0(N_s^2)u^{(s)}, \nabla v \cdot \nabla w_s\rangle^{(s)} + \langle a_0(N_s^2)u^{(s)}, v(-\Delta w_s)\rangle^{(s)},$$

или, с учетом свойства 4, тождество для продолжений

$$\langle \hat{f}^{(s)}, w_s v\rangle = \langle \hat{u}_{tt}^{(s)}, w_s v\rangle - \langle a_0(N_s^2)\hat{u}^{(s)}, w_s \Delta v\rangle -$$

$$- 2\langle a_0(N_s^2)\hat{u}^{(s)}\nabla v, \nabla w_s\rangle + \langle a_0(N_s^2)\hat{u}^{(s)}v, \mu_s\rangle. \tag{11}$$

С целью усреднения (11) предположим дополнительно к (8), что при $s \to \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{gathered} \hat{f}^{(s)} \to f \quad \text{слабо в} \quad L^2(Q), \\ \hat{\varphi}^{(s)} \to \varphi, \quad \hat{\psi}^{(s)} \to \psi \quad \text{слабо в} \quad \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega). \end{gathered} \tag{12}$$

При этом учитываем, что вследствие (10), (8) для $\hat{u}^{(s)}$ справедливы такие оценки:

$$\begin{gathered} \max_{t\in[0,T]} \left\| \hat{u}_t^{(s)}(t) \right\|^2 \le K_1, \qquad \max_{t\in[0,T]} \left\| \nabla\hat{u}^{(s)}(t) \right\|^2 \le K_2, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \left\| \nabla\hat{u}_t^{(s)}(t) \right\|^2 \le C_2^{-1}K_2, \qquad \left\| \hat{u}_{tt}^{(s)} \right\|_{L^2(Q)} \le C_2^{-2}[TK_2(C_1K_2 + C_2)]^{1/2} + K_0. \end{gathered} \tag{10$'$}$$

Кроме того, из неравенства

$$\left\| u^{(s)}(t) \right\| \le \left\| \varphi^{(s)} \right\| + \int_0^t \left\| u_t^{(s)}(\tau) \right\| d\tau, \qquad t \in [0, T],$$

и оценок (8), (10) следует оценка

$$\max_{t\in[0,T]} \left\| \hat{u}^{(s)}(t) \right\|^2 \le K_3, \tag{13}$$

где K_3 зависит только от C_1, C_2, T, K_0. Поэтому можно выбрать из $\mathbb{N}$ такую последовательность, обозначаемую $\{s\}$, что имеют место сходимости

$$\begin{gathered} \hat{u}^{(s)} \to u \quad \text{слабо в} \quad H^1(Q) \quad \text{и сильно в} \quad L^2(Q), \\ \nabla\hat{u}_t^{(s)} \to \nabla u_t \quad \text{слабо}^* \text{ в} \quad L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \\ \hat{u}_{tt}^{(s)} \to u_{tt} \quad \text{слабо в} \quad L^2(Q). \end{gathered} \tag{14}$$

При этом имеем также

$$\hat{u}^{(s)} \to \quad \text{слабо}^* \text{ в} \quad W_\infty^1(0, T; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)). \tag{15}$$

Из (15) и третьей сходимости в (14) следует [5] сходимость

$$\hat{u}^{(s)} \to u \quad \text{в} \quad C_{sc}^1([0, T]; \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)), \tag{16}$$

где для банахова пространства V обозначаем через $C_{sc}([0, T]; V)$ пространство скалярно непрерывных функций из $[0, T]$ в V [8] (гл. 3, 8.4). Значит, предельная функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi, \qquad u_t\big|_{t=0} = \psi. \tag{17}$$

Пусть установлено (это пока гипотеза), что при наличии (14)

$$N_s(t) \to N(t) \quad \text{сильно в} \quad C([0, T]). \tag{18}$$

Тогда с учетом (14), (18), свойств 3, 4 и сходимостей

$$w_s v \to v, \quad w_s \Delta v \to \Delta v \quad \text{сильно в} \quad L^2(Q)$$

переходим к пределу в равенстве (11) по выбранной последовательности $\{s\}$, в результате чего получаем

$$\langle f, v\rangle = \langle u_{tt}, v\rangle - \langle a_0(N^2)u, \Delta v\rangle + \langle a_0(N^2)uv, \mu\rangle,$$

или в дифференциальной форме с учетом (17)

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - a_0(N^2(t))\Delta u(x,t) + a_0(N^2(t))\mu(x)u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t)\in Q, \\ u(\cdot,t)\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad t\in(0,T), \qquad u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x\in\Omega. \end{gathered} \tag{19}$$

Из уравнения (19) видно, что вероятно определение

$$\begin{gathered} N^2(t) = \|u(t)\|_V^2 := \|\nabla u(t)\|^2 + \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega;\mu dx)}, \\ V = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \cap L^2(\Omega;\mu dx). \end{gathered} \tag{20}$$

***Замечание* 2.** В случае условий замечания 1 имеем либо $\mu \in C(\overline{\Omega})$, либо $\mu \in L^\infty(\Omega)$, если $\nu(x)\in L^\infty(\Omega)$. При этом $L^2(\Omega)\subset L^2(\Omega;\mu dx)$, $V = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$.

В последующем мы докажем, что предположения (18), (20) верны и задача (19) действительно является предельной для задачи (6) в том смысле, что имеют место сходимости (14), (15) решений (6) к предельной функции $u(x,t)$, являющейся решением задачи (19). Точнее, справедливо такое утверждение.

Теорема. *Предположим, что граница* $\partial\Omega^{(s)}$ *липшицева, выполнены гипотеза* (A) *с предельной функцией* $\mu(x)\in L^2(\Omega)$ *и условия* (7), (8). *Пусть при* $s\to\infty$ *имеют место сходимости* (12) *и следующие*:

$$\left\|\hat f^{(s)} - f\right\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \to 0, \qquad \left\|\nabla(\hat\varphi^{(s)} - w_s\varphi)\right\| \to 0. \tag{21}$$

Предположим также, что любое решение задачи (19), (20) *имеет следующие свойства*:

$$\begin{gathered} u \in C\left([0,T];\ \overset{\circ}{W}{}^1_n(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\right), \quad \nabla u \in L^1\big(0,T;\ L^\infty(\Omega)\big), \quad \Delta u \in L^\infty\big(0,T;\ L^2(\Omega)\big), \\ \partial^2 u = \left(\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j : i,j=\overline{1,n}\right) \in L^1\big(0,T;\ L^n(\Omega)\big), \\ u_t \in L^\infty\left(0,T;\ \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)\right), \qquad \nabla u_t \in L^1\big(0,T;\ L^n(\Omega)\big). \end{gathered} \tag{22}$$

Тогда для полной последовательности $s\in\mathbb{N}$ *имеют место сходимости* (14) – (16), (18), (20) *и дополнительные сходимости* (43) *к решению задачи* (19), (20), *единственному в классе* (22).

Доказательство. Отметим, что вследствие (10′) выполняются неравенства

$$0 < k_0 \le a_0(N_s^2(t)) \le C_2^{-2}, \quad t \in [0,T], \quad s \in \mathbb{N}, \quad k_0 = (C_1K_2 + C_2)^{-2}. \tag{23}$$

Пусть $u(x,t)$ — решение задачи (19), (20). Определим вспомогательную функцию

$$\tilde{u}_s(x,t) = w_s(x)u(x,t).$$

Для нее имеем следующие равенства (в дальнейшем обозначаем $v' = \partial v/\partial t$, $v'' = \partial^2 v/\partial t^2$):

$$\tilde{u}_s'' - a_0(N_s^2)\Delta\tilde{u}_s = w_s u'' - a_0(N_s^2)(w_s\Delta u + 2\nabla w_s\cdot\nabla u + u(\gamma_s - \mu_s)) =$$

$$= w_s(u'' - a_0(N^2)\Delta u) + [a_0(N^2) - a_0(N_s^2)]w_s\Delta u - a_0(N_s^2)[2\nabla w_s\cdot\nabla u + u(\gamma_s - \mu_s)] =$$

$$= w_s(f - a_0(N^2)\mu u) + [a_0(N^2) - a_0(N_s^2)]w_s\Delta u - a_0(N_s^2)[2\nabla u\cdot\nabla w_s + u(\gamma_s - \mu_s)].$$

Для функции

$$v_s = u^{(s)} - \tilde{u}_s$$

имеем уравнение

$$v_s'' - a_0(N_s^2)\Delta v_s = f^{(s)} - w_s f + a_0(N^2)\mu u w_s +$$

$$+ [a_0(N_s^2) - a_0(N^2)]w_s\Delta u + 2a_0(N_s^2)\nabla u\cdot\nabla w_s + a_0(N_s^2)u(\gamma_s - \mu_s).$$

Умножая это уравнение на $2v_s'$ и затем интегрируя произведение по цилиндру $\Omega^{(s)}\times(0,t)$ с учетом равенства

$$2a_0(N_s^2)(\nabla v_s, \nabla v_s')_{\Omega^{(s)}} = \frac{d}{dt}\Big[a_0(N_s^2(t))\|\nabla v_s(t)\|^2\Big] -$$

$$- \|\nabla v_s(t)\|^2 a_0'(N_s^2(t))2\Big(\nabla u^{(s)}(t), \nabla u_t^{(s)}(t)\Big)_{\Omega^{(s)}},$$

для продолжения $\hat{v}_s = \hat{u}^{(s)} - \tilde{u}_s$ получаем неравенство

$$\|\hat{v}_s'(t)\|^2 + a_0(N_s^2(t))\|\nabla\hat{v}_s(t)\|^2 \le \Big\|\hat{\psi}^{(s)} - w_s\psi\Big\|^2 + a_0(N_s^2(0))\Big\|\nabla(\hat{\varphi}^{(s)} - w_s\varphi)\Big\|^2 +$$

$$+ 2\int_0^t a_0'(N_s^2(\tau))\Big(\nabla\hat{u}^{(s)}(\tau), \nabla\hat{u}_t^{(s)}(\tau)\Big)_\Omega\|\nabla\hat{v}_s(\tau)\|^2 d\tau + 2\Big\|\hat{f}^{(s)} - w_s f\Big\|_{L^1(0,t;L^2(\Omega))} \times$$

$$\times \|\hat{v}_s'\|_{C([0,t];L^2(\Omega))} + 4C_1C_2^{-3}M_0\int_0^t \Big|N_s^2(\tau) - N^2(\tau)\Big|\|\Delta u(\tau)\|\|\hat{v}_s'(\tau)\|d\tau +$$

$$+ 4\int_0^t a_0(N_s^2(\tau))\big(\nabla u(\tau)\cdot\nabla w_s, \hat{v}_s'(\tau)\big)_\Omega d\tau + 2\int_0^t a_0(N^2(\tau))\big(\mu u(\tau)w_s, \hat{v}_s'(\tau)\big)_\Omega d\tau +$$

$$+ 2\int_0^t a_0(N_s^2(\tau))\big(\gamma_s, u(\tau)\hat{v}_s'(\tau)\big)_\Omega d\tau - 2\int_0^t a_0(N_s^2(\tau))\big(\mu_s, u(\tau)\hat{v}_s'(\tau)\big)_\Omega d\tau, \tag{24}$$

где

$$M_0 = \sup_s\|w_s\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty, \qquad \max_{t\ge 0}|a_0'(t)| = 2C_1C_2^{-3}. \tag{25}$$

Согласно свойству 4 пятый интеграл в (24)

$$\left(\gamma_s, \int_0^t a_0(N_s^2(\tau))u(\cdot,\tau)\hat{v}_s'(\cdot,\tau)d\tau\right)_\Omega = 0, \qquad t \in [0, T]. \tag{26}$$

Далее оцениваем каждый из оставшихся в (24) интегралов. Два первых интеграла согласно (10′) и (22), (23) оцениваем так:

$$\begin{gathered}\left|I_1^{(s)}(t)\right| \le 4C_1C_2^{-7/2}K_2\int_0^t \|\nabla\hat{v}_s(\tau)\|^2 d\tau,\\ \left|I_2^{(s)}(t)\right| \le 4C_1C_2^{-3}M_0\|\Delta u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\int_0^t \left|N_s^2(\tau)-N^2(\tau)\right|\|\hat{v}_s'(\tau)\|d\tau.\end{gathered} \tag{27}$$

В последнем интеграле

$$\begin{gathered}\left|N_s^2(\tau)-N^2(\tau)\right| = (N_s(\tau)+N(\tau))\left|N_s(\tau)-N(\tau)\right| \le \\ \le (K_2^{1/2}+K_4^{1/2})\Big(\Big|\|\nabla\hat{u}^{(s)}(\tau)\|-\|\nabla\tilde{u}_s(\tau)\|\Big| + \big|\|\nabla\tilde{u}_s(\tau)\|-N(\tau)\big|\Big) \le \\ \le (K_2^{1/2}+K_4^{1/2})\left(\|\nabla\hat{v}_s(\tau)\|+\delta_s(\tau)\right),\end{gathered}$$

где

$$K_4 = \max_{t\in[0,T]} N^2(t), \qquad \delta_s(t) = \big|\|\nabla\tilde{u}_s(t)\|-N(t)\big|, \tag{28}$$

так что имеем неравенство

$$\begin{gathered}\left|I_2^{(s)}(t)\right| \le 2C_1C_2^{-3}M_0\|\Delta u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\left(K_2^{1/2}+K_4^{1/2}\right)\times\\ \times\left(\int_0^t \|\nabla\hat{v}_s(\tau)\|^2 d\tau + 2\int_0^t \|\hat{v}_s'(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \delta_s^2(\tau)d\tau\right).\end{gathered} \tag{29}$$

Третий интеграл в (24) запишем так:

$$I_3^{(s)}(t) = 4(\nabla w_s, \vec{g}_s(t))_\Omega, \qquad \vec{g}_s(t) = \int_0^t a_0(N_s^2(\tau))\hat{v}_s'(\tau)\nabla u(\tau)d\tau.$$

Для любой $\partial_k = \partial/\partial x_k$, $k = \overline{1,n}$, с учетом (10′) имеем

$$\begin{gathered}\|\partial_k\vec{g}_s(t)\| \le C_2^{-2}\int_0^t\Big[\|\nabla u(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}\Big(\big\|\nabla\hat{u}_t^{(s)}(\tau)\big\| + M_0\|\nabla u'(\tau)\| + \|u'(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla w_s\|\Big) + \\ + \big\|\hat{u}_t^{(s)}(\tau)\big\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)}\big\|\partial^2 u(\tau)\big\|_{L^n(\Omega)} + M_0\|u'(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}\big\|\partial^2 u(\tau)\big\|\Big]d\tau \le \\ \le C_2^{-2}\|\nabla u\|_{L^1(0,T;L^\infty(\Omega))}\Big(C_2^{-1}K_2 + M_0\|\nabla u'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + M_1\|u'\|_{L^\infty(Q)}\Big) + \\ + c(C_2^{-1}K_2)^{1/2}\big\|\partial^2 u\big\|_{L^1(0,T;L^n(\Omega))} + M_0\|u'\|_{L^\infty(Q)}\big\|\partial^2 u\big\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} = \\ = K_5 < +\infty \quad \forall\, s, t \in [0, T],\end{gathered}$$

где

$$M_1 = \sup_s \|\nabla w_s\| < +\infty \tag{30}$$

и использована оценка

$$\operatorname*{ess\,sup}_t \left\| \hat{u}_t^{(s)}(t) \right\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \leq c \operatorname*{ess\,sup}_t \left\| \nabla \hat{u}_t^{(s)}(t) \right\| \leq c_1 = c(C_2^{-1} K_2)^{1/2}, \qquad (31)$$

$$c = 2(n-1)/(n-2).$$

При этом $\vec{g}_s(t)\big|_{\partial\Omega} = \vec{0}$. Значит, множество $\{\vec{g}_s(t), s \in \mathbb{N}\}$ компактно в $L^2(\Omega)$ $\forall\, t \in [0, T]$. Следовательно, $I_3^{(s)}(t) \to 0$ при $s \to \infty$ $\forall\, t \in [0, T]$. Далее, имеем

$$\frac{d}{dt} I_3^{(s)}(t) = 4a_0(N_s^2(t))\Big(\nabla w_s,\, \big(\hat{u}_t^{(s)}(t) - u'(t) w_s\big) \nabla u(t)\Big)_\Omega,$$

$$\left| \frac{d}{dt} I_3^{(s)}(t) \right| \leq 4C_2^{-2} M_1 \Big(K_1^{1/2} \| \nabla u(t) \|_{L^\infty(\Omega)} + M_0 \| \nabla u(t) \| \| u'(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \Big) \equiv$$

$$\equiv \psi(t) \in L^1(0, T) \quad \forall\, s.$$

Следовательно, $I_3^{(s)}(t) \to 0$ при $s \to \infty$ равномерно относительно $t \in [0, T]$, т. е. существует

$$\lim_{s \to \infty} \left\| I_3^{(s)} \right\|_{C([0,T])} = 0. \qquad (32)$$

Теперь рассмотрим интеграл

$$I_4^{(s)}(t) = 2\int_0^t a_0(N^2(\tau))\Big(\mu,\, (w_s - 1) u(\tau) \big(\hat{u}_t^{(s)}(\tau) - u'(\tau) w_s\big)\Big)_\Omega d\tau =$$

$$= 2\int_0^t a_0(N^2(\tau))\Big(\mu,\, (w_s - 1) u(\tau) \hat{u}_t^{(s)}(\tau)\Big)_\Omega d\tau -$$

$$- 2\int_0^t a_0(N^2(\tau))\big(\mu,\, (w_s - 1) u(\tau) u'(\tau) w_s\big)_\Omega d\tau \equiv I_{4,1}^{(s)}(t) + I_{4,2}^{(s)}(t).$$

В интеграле $I_{4,2}^{(s)}(t)$ функция

$$v(t) = \int_0^t a_0(N^2(\tau)) u(\tau) u'(\tau) d\tau \in C([0,T];\, L^\infty(\Omega))$$

в силу условий $u \in C([0,T];\, L^\infty(\Omega))$, $u' \in L^\infty(Q)$; при этом верна оценка

$$\| (w_s - 1) w_s v(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq (M_0 + 1) M_0 \| v(t) \|_{L^\infty(\Omega)},$$

и ввиду включения $\mu \in L^1(\Omega)$, согласно свойству 5 функций w_s, при $s \to \infty$ имеет место сходимость $I_{4,2}^{(s)}(t) \to 0$ $\forall\, t \in [0, T]$. Кроме того,

$$\frac{d}{dt} I_{4,2}^{(s)}(t) = -2a_0(N^2(t))\big(\mu,\, (w_s - 1) w_s u(t) u'(t)\big)_\Omega,$$

$$\left| \frac{d}{dt} I_{4,2}^{(s)}(t) \right| \leq \psi(t) = 2C_2^{-2} \| \mu \|_{L^1(\Omega)} (M_0 + 1) M_0 \| u \|_{C([0,T];\, L^\infty(\Omega))} \| u'(t) \|_{L^\infty(\Omega)} \quad \forall\, s,$$

где $\psi(t) \in L^\infty(0, T)$. Значит, существует

$$\lim_{s\to\infty} \left\| I_{4,2}^{(s)} \right\|_{C([0,T])} = 0. \tag{33}$$

В интеграле $I_{4,1}^{(s)}(t)$ функция

$$v_1^{(s)}(t) = (w_s - 1)\int_0^t a_0(N^2(\tau))u(\tau)\hat{u}_t^{(s)}(\tau)d\tau$$

с учетом (31) оценивается так:

$$\left\| v_1^{(s)}(t) \right\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \le (M_0 + 1)C_2^{-2}c_1 t \| u \|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))} \quad \forall\, s.$$

Тогда при $s \to \infty$ имеем

$$\left\| v_1^{(s)}(t) \right\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \to 0 \quad \forall\, t \in [0, T],$$

$$\left| I_{4,1}^{(s)}(t) \right| \le 2\|\mu\|_{L^{2n/(n+2)}(\Omega)} \left\| v_1^{(s)}(t) \right\|_{L^{2n/(n-2)}(\Omega)} \to 0 \quad \forall\, t \in [0, T],$$

$$\left| \frac{d}{dt} I_{4,1}^{(s)}(t) \right| \le 2\|\mu\|_{L^{2n/(n+2)}(\Omega)} (M_0 + 1)C_2^{-2} c_1 \|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))} \quad \forall\, s,\, t \in [0, T].$$

Следовательно, существует

$$\lim_{s\to\infty} \left\| I_{4,1}^{(s)} \right\|_{C([0,T])} = 0. \tag{34}$$

Таким образом, в (24) осталось рассмотреть интеграл

$$I_6^{(s)}(t) = 2\int_0^t \left[a_0(N^2(\tau))(\mu, u(\tau)\hat{v}_s'(\tau))_\Omega - a_0(N_s^2(\tau))(\mu_s, u(\tau)\hat{v}_s'(\tau))_\Omega \right] d\tau =$$

$$= 2\int_0^t \left[a_0(N^2(\tau)) - a_0(N_s^2(\tau)) \right] (\mu_s, u(\tau)\hat{v}_s'(\tau))_\Omega \, d\tau \; +$$

$$+ \; 2\int_0^t a_0(N_s^2(\tau))(\mu - \mu_s, u(\tau)\hat{v}_s'(\tau))_\Omega \, d\tau \equiv I_{6,1}^{(s)}(t) + I_{6,2}^{(s)}(t).$$

Для $I_{6,1}^{(s)}(t)$ с учетом (25), (10′), (28) и условия на $\mu(x)$ записываем следующие неравенства:

$$\left| I_{6,1}^{(s)}(t) \right| \le 4C_1C_2^{-3} \int_0^t (N(\tau) + N_s(\tau))(|N(\tau) - N_s(\tau)|)\|\mu\|\|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))} \| \hat{v}_s'(\tau)\| d\tau \le$$

$$\le 4C_1C_2^{-3}(K_2^{1/2} + K_4^{1/2})\|\mu\|\|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))} \int_0^t (\|\nabla \hat{v}_s(\tau)\| + \delta_s(\tau)) \|\hat{v}_s'(\tau)\| d\tau \le$$

$$\le 2C_1C_2^{-3}(K_2^{1/2} + K_4^{1/2})\|\mu\|\|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))} \times$$

$$\times \left(\int_0^t \|\nabla \hat{v}_s(\tau)\|^2 d\tau + 2\int_0^t \|\hat{v}_s'(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^T \delta_s^2(\tau) d\tau \right). \tag{35}$$

Далее, используя (10′), (31) и свойство 4 функций w_s, получаем оценку для $I_{6,2}^{(s)}(t)$:

$$I_{6,2}^{(s)}(t) = 2\int_0^t a_0(N_s^2(\tau))\frac{d}{d\tau}(\mu-\mu_s,\, u(\tau)\hat{v}_s(\tau))_\Omega\, d\tau -$$

$$- 2\int_0^t a_0(N_s^2(\tau))(\mu-\mu_s,\, u'(\tau)\hat{v}_s(\tau))_\Omega\, d\tau = 2\Bigg\{ a_0(N_s^2(t))(\mu-\mu_s,\, u(t)\hat{v}_s(t))_\Omega -$$

$$- a_0(N_s^2(0))(\mu-\mu_s,\, \varphi(\hat{\varphi}^{(s)}-\varphi w_s))_\Omega - 2\int_0^t a_0'(N_s^2(\tau))(\nabla\hat{u}^{(s)}(\tau),\, \nabla\hat{u}_t^{(s)}(\tau))_\Omega \times$$

$$\times (\mu-\mu_s,\, u(\tau)\hat{v}_s(\tau))_\Omega\, d\tau - \int_0^t a_0(N_s^2(\tau))(\mu-\mu_s,\, u'(\tau)\hat{v}_s(\tau))_\Omega\, d\tau \Bigg\},$$

$$\left| I_{6,2}^{(s)}(t)\right| \le 2C_2^{-2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\big(\|\hat{v}_s(t)\nabla u(t)\| + \|u(t)\nabla\hat{v}_s(t)\|\big) +$$

$$+ 2C_2^{-2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\Big(\big\|(\hat{\varphi}^{(s)}-\varphi w_s)\nabla\varphi\big\| + \big\|\varphi\nabla(\hat{\varphi}^{(s)}-\varphi w_s)\big\|\Big) +$$

$$+ 8C_1C_2^{-3}K_2^{1/2}(C_2^{-1}K_2)^{1/2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\int_0^t \big(\|\hat{v}_s(\tau)\nabla u(\tau)\| + \|u(\tau)\nabla\hat{v}_s(\tau)\|\big)d\tau +$$

$$+ 2C_2^{-2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\int_0^t \big(\|\hat{v}_s(\tau)\nabla u'(\tau)\| + \|u'(\tau)\nabla\hat{v}_s(\tau)\|\big)\, d\tau \le$$

$$\le 2C_2^{-2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\Bigg[\Big(c\|\nabla u\|_{C([0,T];\,L^n(\Omega))} + \|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big)\|\nabla\hat{v}_s(t)\| +$$

$$+ \Big(c\|\nabla\varphi\|_{L^n(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\big\|\nabla(\hat{\varphi}^{(s)}-\varphi w_s)\big\| + 4C_1C_2^{-3/2}K_2\int_0^t\Big(c\|\nabla u(\tau)\|_{L^n(\Omega)} +$$

$$+ \|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big)\|\nabla\hat{v}_s(\tau)\|d\tau + \int_0^t\Big(c\|\nabla u'(\tau)\|_{L^n(\Omega)} + \|u'\|_{L^\infty(Q)}\Big)\|\nabla\hat{v}_s(\tau)\|d\tau\Bigg] \le$$

$$\le \nu_1^{-1}C_2^{-4}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\Big(c\|\nabla u\|_{C([0,T];\,L^n(\Omega))} + \|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big)^2 + \nu_1\|\nabla\hat{v}_s(t)\|^2 +$$

$$+ 2C_2^{-2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\big\|\nabla(\hat{\varphi}^{(s)}-w_s\varphi)\big\|\Big(c\|\nabla\varphi\|_{L^n(\Omega)} + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Big) +$$

$$+ 16\nu_2^{-1}C_1^2C_2^{-7}K_2^2T^2\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\Big(c\|\nabla u\|_{C([0,T];\,L^n(\Omega))} + \|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big)^2 +$$

$$+ 2\nu_2\|\nabla\hat{v}_s\|_{C([0,t];\,L^2(\Omega))}^2 + \nu_2^{-1}C_2^{-4}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}^2\Big(c\|\nabla u'\|_{L^1(0,T;\,L^n(\Omega))} + T\|u'\|_{L^\infty(Q)}\Big)^2, \tag{36}$$

$$t\in[0,T], \quad \nu_i = \text{const} > 0, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, из (24), учитывая (23), (26), (27), (29), (32) – (36), получаем

$$\|\hat{v}_s'(t)\|^2 + k_0\|\nabla\hat{v}_s(t)\|^2 \le \big\|\hat{\psi}^{(s)}-w_s\psi\big\|^2 + C_2^{-2}\big\|\nabla(\hat{\varphi}^{(s)}-w_s\varphi)\big\|^2 +$$

$$+ \nu_0\|\hat{v}_s'\|_{C([0,t];\,L^2(\Omega))}^2 + \nu_0^{-1}\big\|\hat{f}^{(s)}-w_sf\big\|_{L^1(0,T;\,L^2(\Omega))}^2 + 4C_1C_2^{-7/2}K_2\int_0^t\|\nabla\hat{v}_s(\tau)\|^2d\tau +$$

$$+\ 2C_1C_2^{-3}(K_2^{1/2}+K_4^{1/2})\Big(M_0\|\Delta u\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))}+\|\mu\|\,\|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big)\ \times$$

$$\times\ \left(\int_0^t\|\nabla\hat v_s(\tau)\|^2\,d\tau+2\int_0^t\|\hat v_s'(\tau)\|^2\,d\tau+\int_0^T\delta_s^2(\tau)\,d\tau\right)+\left\|I_3^{(s)}\right\|_{C([0,T])}+\left\|I_4^{(s)}\right\|_{C([0,T])}\ +$$

$$+\ \nu_1\|\nabla\hat v_s(t)\|^2\ +\ 2\nu_2\|\nabla\hat v_s\|_{C([0,t];\,L^2(\Omega))}\ +\ 2C_2^{-2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\left\|\nabla(\hat\varphi^{(s)}-w_s\varphi)\right\|\ \times$$

$$\times\ \Big(c\|\nabla\varphi\|_{L^n(\Omega)}+\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)+\ C_2^{-4}(\nu_1^{-1}+16\nu_2^{-1}C_1^2C_2^{-3}K_2^2T^2)\|\mu_s-\mu\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\ \times$$

$$\times\ \Big(c\|\nabla u\|_{C([0,T];\,L^n(\Omega))}+\|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big)^2\ +$$

$$+\ \nu_2^{-1}C_2^{-4}\|\mu_s-\mu\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\Big(c\|\nabla u'\|_{L^1(0,T;\,L^n(\Omega))}+T\|u'\|_{L^\infty(Q)}\Big)^2,\quad t\in[0,T],\qquad(37)$$

где ν_0, ν_1, ν_2 — произвольные положительные постоянные. Полагая в (37) $\nu_0=1/2$, $\nu_1=k_0/2$, $\nu_2=k_0/16$ и обозначая

$$x_s(t)\ =\ \hat v_s'(t),\qquad \vec y_s(t)\ =\ \nabla\hat v_s(t),$$

имеем неравенство

$$\|x_s(t)\|^2+\frac{k_0}{2}\|\vec y_s(t)\|^2\ \le\ \Delta_s+\frac12\max_{\tau\in[0,t]}\|x_s(\tau)\|^2+\frac{k_0}{8}\max_{\tau\in[0,t]}\|\vec y_s(t)\|^2\ +$$

$$+\ B\int_0^t\Big(\|x_s(\tau)\|^2+\|\vec y_s(\tau)\|^2\Big)d\tau,\qquad(37')$$

в котором

$$\Delta_s\ =\ \left\|\hat\psi^{(s)}-w_s\psi\right\|^2+\ C_2^{-2}\left\|\nabla(\hat\varphi^{(s)}-w_s\varphi)\right\|^2+\ 2\left\|\hat f^{(s)}-w_sf\right\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}+$$

$$+\ D\|\delta_s\|^2_{L^2(0,T)}+\left\|I_3^{(s)}\right\|_{C([0,T])}+\left\|I_4^{(s)}\right\|_{C([0,T])}\ +$$

$$+\ 2C_2^{-2}\|\mu_s-\mu\|_{H^{-1}(\Omega)}\left\|\nabla(\hat\varphi^{(s)}-w_s\varphi)\right\|\Big(c\|\nabla\varphi\|_{L^n(\Omega)}+\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\Big)\ +$$

$$+\ 2k_0^{-1}C_2^{-4}\left\{\Big(1+2^7C_2^{-3}(C_1K_2T)^2\Big)\Big(c\|\nabla u\|_{C([0,T];\,L^n(\Omega))}+\|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big)^2\ +\right.$$

$$\left.+\ 8\Big(c\|\nabla u'\|_{L^1(0,T;\,L^n(\Omega))}+T\|u'\|_{L^\infty(Q)}\Big)^2\right\}\|\mu_s-\mu\|^2_{H^{-1}(\Omega)},$$

$$B\ =\ \max\Big(4C_1C_2^{-7/2}K_2+D,\ 2D\Big),$$

$$D\ =\ 2C_1C_2^{-3}(K_2^{1/2}+K_4^{1/2})\Big(M_0\|\Delta u\|_{L^\infty(0,T;\,L^2(\Omega))}+\|\mu\|\,\|u\|_{C([0,T];\,L^\infty(\Omega))}\Big).$$

Из (37′) следует

$$\|x_s(t)\|^2+\frac{k_0}{2}\|\vec y_s(t)\|^2\ \le\ 4\Delta_s+4B\int_0^t\Big(\|x_s(\tau)\|^2+\|\vec y_s(\tau)\|^2\Big)d\tau,\qquad t\in[0,T].$$

Отсюда в случае, например, $k_0\le 2$ имеем

$$\|x_s(t)\|^2 + \|\vec{y}_s(t)\|^2 \le 8k_0^{-1}\Delta_s + 8k_0^{-1}B\int_0^t \left(\|x_s(\tau)\|^2 + \|\vec{y}_s(\tau)\|^2\right)d\tau, \qquad t \in [0, T],$$

следовательно (это неравенство Гронуолла),

$$\max_{t\in[0,T]}\left(\|x_s(t)\|^2 + \|\vec{y}_s(t)\|^2\right) \le 8k_0^{-1}e^{8k_0^{-1}BT}\Delta_s. \tag{38}$$

В силу сходимостей (12), свойства 3 функций w_s и условий (21) три первых слагаемых в Δ_s при $s \to \infty$ сходятся к нулю. Для оценки $\|\delta_s\|_{L^2(0,T)}$ в (28) имеем

$$\|\nabla\tilde{u}_s(t)\|^2 = \|w_s\nabla u(t)\|^2 + \left(u^2(t), |\nabla w_s|^2\right)_\Omega + 2\left(w_s\nabla u(t), u(t)\nabla w_s\right)_\Omega \equiv$$

$$\equiv J_1^{(s)}(t) + J_2^{(s)}(t) + J_3^{(s)}(t).$$

Из включения $\nabla u(t) \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ следует, что при $s \to \infty$ норма $J_1^{(s)}(t) \to \|\nabla u(t)\|^2$ равномерно относительно $t \in [0, T]$. Поскольку согласно свойству 4 $|\nabla w_s(x)|^2 \to \mu(x)$ слабо как меры на $\{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$, а в рассматриваемых условиях для почти всех $t \in (0, T)$

$$u(t,\cdot) \in W_n^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_n^1(\Omega) \subset C^\alpha(\overline{\Omega}), \quad \alpha \in (0, 1),$$

кроме того,

$$u \in C^\alpha([0,T]; L^\infty(\Omega)), \quad \alpha \in (0, 1),$$

и нормы $\|\nabla w_s\|$ равномерно ограничены, функции $J_2^{(s)}(t)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны на $[0, T]$, и для почти всех $t \in (0, T)$ существует

$$\lim_{s\to\infty} J_2^{(s)}(t) = (u^2(t), \mu)_\Omega. \tag{39}$$

Отсюда следует, что предел (39) является равномерным на $[0, T]$. Из условий (22) на $u(t)$ и свойства 4 функций w_s вытекает, что при $s \to \infty$

$$\max_{t\in[0,T]}\|(w_s - 1)\nabla u(t)\| \to 0, \qquad u(t)\nabla w_s \to 0 \text{ в } C_{sc}([0,T]; L^2(\Omega)), \tag{40}$$

следовательно, $J_3^{(s)}(t) \to 0$ равномерно относительно $t \in [0, T]$. Тогда для нормы (20) имеем сходимость величины (28):

$$\|\delta_s\|_{C([0,T])} \to 0. \tag{41}$$

Два следующих слагаемых в Δ_s стремятся к нулю согласно (32) – (34). Последних два слагаемых в Δ_s стремятся к нулю в силу свойства 4 функций w_s и условия (21). Таким образом, установлено, что в (38) величина $\Delta_s \to 0$ при $s \to \infty$, что доказывает сходимости

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,T]}\|\vec{y}_s(t)\| &= \max_{t\in[0,T]}\left\|\nabla(\hat{u}^{(s)}(t) - \tilde{u}_s(t))\right\| \to 0, \\ \max_{t\in[0,T]}\|x_s(t)\| &= \max_{t\in[0,T]}\left\|(\hat{u}^{(s)}(t) - \tilde{u}_s(t))'\right\| \to 0. \end{aligned} \tag{42}$$

Отсюда и из (41) следует справедливость гипотезы (18), (20):

$$\max_{t\in[0,T]}\left|N_s(t)-N(t)\right| \le \max_{t\in[0,T]}\left|\left\|\nabla\hat{u}^{(s)}(t)\right\|-\left\|\nabla\tilde{u}_s(t)\right\|\right| + \|\delta_s\|_{C([0,T])} \le$$

$$\le \max_{t\in[0,T]}\left\|\nabla\left(\hat{u}^{(s)}(t)-\tilde{u}_s(t)\right)\right\| + \|\delta_s\|_{C([0,T])} \to 0 \quad (s\to\infty),$$

а вместе с ней и утверждения, что $u(t)$ является решением задачи (19), (20). Из (40), (42) вытекают также дополнительные к (14), (15) сходимости при $s \to \to \infty$:

$$\begin{aligned} \nabla\hat{u}^{(s)} &= \nabla\tilde{u}_s + \vec{y}_s \quad \to \quad \nabla u \quad \text{в} \quad C_{sc}([0,T];\, L^2(\Omega)), \\ \hat{u}^{(s)}_t &= \tilde{u}'_s + x_s \quad \to \quad u_t \quad \text{сильно в} \quad C([0,T];\, L^2(\Omega)), \end{aligned} \tag{43}$$

так как из условий теоремы и (19) следует, что $u_t \in C([0,T];\, L^2(\Omega))$ и, таким образом, $\tilde{u}'_s = w_s u_t \to u_t$ сильно в $C([0,T];\, L^2(\Omega))$.

Пусть u_1, u_2 — решения задачи (19) такие, что

$$\begin{aligned} u_i &\in C([0,T];\, \mathring{H}^1(\Omega)\cap L^4(\Omega))\cap L^\infty(Q), \quad \Delta u_i \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ u'_i &\in L^\infty(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))\cap C([0,T];L^2(\Omega)), \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{44}$$

Тогда из (19) с учетом (20) для $v = u_2 - u_1$ имеем энергетическое равенство

$$\|v'(t)\|^2 + a_0(N_2^2(t))\|v(t)\|_V^2 = 2\int_0^t a'_0(N_2^2(\tau))(\nabla u_2(\tau),\, \nabla u'_2(\tau))_\Omega \|v(\tau)\|_V^2\, d\tau +$$

$$+ 2\int_0^t\left[a_0(N_2^2(\tau)) - a_0(N_1^2(\tau))\right](\Delta u_1(\tau) - \mu u_1(\tau),\, v'(\tau))_\Omega\, d\tau, \quad t\in[0,T], \tag{45}$$

где $N_i(t) = \|u_i(t)\|_V$. В обозначениях

$$K'_1 = \max_{i=1,2}\max_{t\in[0,T]} N_i(t), \qquad K'_2 = \|\Delta u_1\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \qquad K'_3 = \|u_1\|_{L^\infty(Q)},$$

$$K'_4 = \|\nabla u'_2\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \qquad k'_0 = (C_1K'_1 + C_2)^{-2}$$

из (45) получаем неравенство Гронуолла

$$\|v'(t)\|^2 + k'_0\|v(t)\|_V^2 \le 4C_1C_2^{-3}K'_1K'_4\int_0^t\|v(\tau)\|_V^2\, d\tau +$$

$$+ 8C_1C_2^{-3}K'_1\left(K'_2 + \|\mu\|K'_3\right)\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|\|v'(\tau)\|d\tau \le B'\int_0^t\left(\|v'(\tau)\|^2 + k'_0\|v(\tau)\|_V^2\right)d\tau,$$

$$t\in[0,T], \qquad B' = \text{const},$$

из которого следует $\|v'(t)\|^2 + k'_0\|v(t)\|_V^2 \equiv 0$, т. е. $v(t) \equiv 0$. Таким образом, в классе функций (44), а тем более в классе (22), решение задачи (19), (20) единственно. Значит, все указанные в теореме сходимости имеют место для полной последовательности $s\in\mathbb{N}$.

Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Для того чтобы выполнялось условие сходимости (21) для

$\hat{\varphi}^{(s)}$, достаточно [5], чтобы при выполнении гипотезы (A) функция $\varphi^{(s)}$ была решением задачи

$$-\Delta\varphi^{(s)}(x) = g^{(s)}(x), \quad x \in \Omega^{(s)}, \quad \varphi^{(s)} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega^{(s)}), \quad g^{(s)} \in H^{-1}(\Omega^{(s)}),$$

причем при некоторой $g \in H^{-1}(\Omega)$ существовал предел

$$\lim_{s\to\infty} \left\| \hat{g}^{(s)} - g \right\|_{H^{-1}(\Omega)} = 0,$$

а предельная в смысле (12) функция φ, являющаяся при этом единственным решением задачи

$$-\Delta\varphi(x) + \mu(x)\varphi(x) = g(x), \quad x \in \Omega, \quad \varphi \in V,$$

принадлежала и $C(\overline{\Omega})$.

Автор глубоко благодарен Станиславу Ивановичу Похожаеву за сообщение о своих работах, переданное в июне 2004 г. через незабвенного Игоря Владимировича Скрыпника.

1. *Похожаев С. И.* Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений // Мат. сб. – 1975. – **96(138)**, № 1. – С. 152–166.
2. *Похожаев С. И.* Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 1. – С. 101–108.
3. *Похожаев С. И.* Квазилинейные гиперболические уравнения Кирхгофа и законы сохранения // Тр. Моск. энерг. ин-та. – 1974. – Вып. 201. – С. 118–126.
4. *Cioranesku D., Murat F.* Un terme étrange venu d'ailleurs // Res. Notes Math. – 1982. – **60**. – P. 93 – 138.
5. *Cioranesku D., Donato P., Murat F., Zuazua E.* Homogenization and corrector for the wave equation in domains with small holes // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat. – 1991. – **18**, № 2. – P. 251 – 293.
6. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
7. *Dal Maso G., Skrypnik I. V.* Asymptotic behaviour of nonlinear Dirichlet problems in perforated domains. – Trieste, 1995. – 65 p. – Ref. SISSA 162|95|M (December 95).
8. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

Получено 06.09.2005