УДК 517.521.8

А. В. Ревенко

Вложение ядер регулярными преобразованиями

Пусть S и T — множества действительных чисел с конечными или бесконечно удаленными предельными точками соответственно α и β.

Через $F(S)$ $(F(T))$ обозначим какие-нибудь линейные пространства комплекснозначных функций, определенных на $S(T)$, причем будем считать что $F(S)$ содержит все постоянные на S функции Линейные операции в $F(S)$ $(F(T))$ определяются обычным образом. Так же естественно можно определить операцию умножения функций.

Всюду ниже будем рассматривать линейные операторы $A: F(S) \to F(T)$ такие что $A(x)$ — ограниченная на T функция, если x ограничена на S.

Оператор A назовем регулярным, если для всякой $x \in F(S)$ такой, что существует $\lim\limits_{s \to \alpha} x(s)$, существует также $\lim\limits_{t \to \beta} (A(x))(t)$ и оба предела равны.

Примерами таких регулярных операторов являются операторы вида

$$(A(x))(t) = \lim_{r} \int\limits_{S \setminus U_r} x(s)\, d\mu_t, \quad t \in T, \tag{1}$$

где μ_t — меры ограниченной вариации $v(\mu, S)$, определенные на алгебре Γ подмножеств множества S; $U_r \in \Gamma$ — окрестности точки α, стягивающиеся к α при $r \to \infty$ или $r \to 0$ (в зависимости от того, конечная или бесконечно удаленная точка α); x — функция, ограниченная на $S \setminus U_r$ $\forall r$ и измеримая по любой мере μ_t [1, с. 109—201]; $v(\mu_t, S) \leqslant H$, $t \in T$, $v(\mu_t, S \setminus U_r) \to 0$, $t \to \beta$, $\forall$ r, $\int\limits_S d\mu_t \to 1$, $t \to \beta$. Операторы, аналогичные операторам вида (1), рассматривались в [2].

Частные случаи оператора вида (1) — интегральные преобразования, матричные операторы, полунепрерывные матрицы.

Будем считать две функции $x_1, x_2 \in F(S)$ тождественными, если $\lim\limits_{s \to \alpha} (x_1(s) - x_2(s)) = 0$. Аналогично для $y_1, y_2 \in F(T)$. Тогда нормой ограниченной функции $x \in F(S)$ $(y \in F(T))$ назовем число $\| x \| = \overline{\lim\limits_{s \to \alpha}} | x(s)$ $(\| y \| = \overline{\lim\limits_{t \to \beta}} | y(t) |)$.

Нормой оператора $A: F(S) \to F(T)$ (в случае существования) назовем число $\| A \|$, равное наименьшему $c \geqslant 0$ такому, что $\| A(x) \| \leqslant c \| x \|$ для всех ограниченных $x \in F(S)$.

Можно показать, что $\| A \| = \overline{\lim\limits_{t \to \beta}}\, v(\mu_t, S)$ для регулярных операторов A вида (1). В частности, для регулярной матрицы $A = (a_{nk})$ $\| A \| = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} | a_{nk} |$.

Обозначим $K(u)$ ядро в смысле Кноппа функции $u \in F(S)$ $(u \in F(T))$ [3, с. 77] и будем говорить, что $A: F(S) \to F(T)$ осуществляет вложение ядер (вложение ограниченных ядер), если для любой $x \in F(S)$ (любой ограниченной $x \in F(S)$) справедливо включение $K(A(x)) \subset K(x)$.

Теорема 1. *Линейный регулярный оператор $A: F(S) \to F(T)$ осуществляет вложение ограниченных ядер тогда и только тогда, когда $\| A \| = 1$.*

Доказательство. Необходимость. Если для любой ограниченной $x \in F(S)$ справедливо включение $K(A(x)) \subset K(x)$, то в силу определения ядра и нормы x $\| A(x) \| \leqslant \| x \|$. Если x такая, что существует $\lim\limits_{s \to \alpha} x(s)$, то, ввиду регулярности A, $\| A(x) \| = \| x \|$, откуда следует $\| A \| = 1$.

Достаточность. Предположим, что существует ограниченная $x \in F(S)$ такая, что $K(A(x)) \not\subset K(x)$. Тогда, согласно лемме 1 из [4, с. 174—175], существует замкнутый круг V, который содержит множество $K(x)$ и не содержит $K(A(x))$. Пусть его центр будет точка a и радиус R. Рассмотрим функцию $z(s) = x(s) - a$, $s \in S$. Очевидно, z — ограничена на S, и в силу определения ядра $K(z)$ получается из $K(x)$ сдвигом на вектор a. Так как $V \supset K(x)$, то $\| z \| = \overline{\lim\limits_{s \to \alpha}} | x(s) - a | \leqslant R$. Поскольку A линеен и регулярен, то $\| A(z) \| = \overline{\lim\limits_{t \to \beta}} | (A(x))(t) - u(t) | > R$, где $\lim\limits_{t \to \beta} u(t) = a$.

Из последних неравенств следует $\| A(z) \| > \| z \|$, что противоречит равенству $A = 1$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из предыдущей теоремы следует теорема Робинсона [4, с. 174].

Действительно, в силу регулярности A и теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$

существует $N(\varepsilon)$ такое, что справедливы неравенства $1-\varepsilon<\left|\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}\right|\leqslant \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\left(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|+\varepsilon\right)=1+\varepsilon$ при $n>N(\varepsilon)$, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits^{\infty}|a_{nk}|=1$.

Определение. *Будем говорить, что* $A: F(S)\to F(T)$ *обладает свойством* (K), *если для любой* $x\in F(S)$ *такой, что* $0\in K(A(x))$, *существует функция* $z(s)\to+\infty$, $s\to\alpha$, *такая, что* $zx\in F(S)$ *и* $0\in K(A(zx))$.

Теорема 2. *Всякая регулярная матрица обладает свойством* (K) *на пространстве всех последовательностей, к которым она применима.*

Доказательство. Пусть $A=(a_{mn})$ регулярна и последовательность $x=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $0\in K(A(x))$ и $A(x)=\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда существует регулярная положительная матрица B, суммирующая последовательность $A(x)$ к нулю, для которой $\{\sigma_m\}_{m=1}^{\infty}=B(A(x))=\{\alpha_m t_{m+\mu(m)}+\beta_m t_{m+\nu(m)}+\gamma_m t_{m+\pi(m)}\}_{m=1}^{\infty}$, где $m+\mu(m)\leqslant m+\nu(m)\leqslant m+\pi(m)\leqslant\leqslant m+1+\mu(m+1)$, $\alpha_m+\beta_m+\gamma_m=1$; $\alpha_m,\ \beta_m,\ \gamma_m\in[0,1]$, $m=1,2,\ldots$ [4, с. 160 — 167].

Построим индуктивно две последовательности натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Число m_1 выберем так, чтобы $|\sigma_{m_1}|<1$. Теперь возьмем n_1 такое, чтобы для всех l и q таких, что $l\geqslant q\geqslant n_1$ и $m\leqslant m_1+\pi(m_1)$, выполнялось неравенство $\left|\sum\limits_{n=q}^{l}a_{mn}\xi_n\right|<1$. Если m_{k-1} и n_{k-1} уже выбраны, то m_k выберем так, чтобы $m_k>m_{k-1}$ и $|\sigma_{m_k}|<1/k$, $\sum\limits_{n=1}^{n_{k-1}}|a_{mn}||\xi_n|<1/k$ для $m=m_k+\mu(m_k)$, $m_k+\nu(m_k)$, $m_k+\pi(m_k)$. Число n_k возьмем таким, чтобы для любых $l\geqslant q\geqslant n_k$ и $m\leqslant m_k+\pi(m_k)$ выполнялось нераваенство

$$\left|\sum_{n=q}^{l}a_{mn}\xi_n\right|<\frac{1}{2^k k}. \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность $z=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $\lambda_n=\sqrt{k}$ для $n=n_{k-1}+1,\ldots,n_k$, $k=1,2,\ldots$. Обозначим $zx=\{\lambda_n\xi_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что к последовательности zx применима матрица A, т. е. существует τ_m, конечное для каждого $m=1,2,\ldots$, где $\{\tau_m\}_{m=1}^{\infty}=A(zx)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и m — натуральное. Выберем $k>1$ так, чтобы $1/2^{k-1}<\varepsilon$ и $m\leqslant m_k+\pi(m_k)$. Пусть l и q произвольные и такие, что $l\geqslant q>n_k$, и p, j такие, что $n_p<q\leqslant n_{p+1}$, $n_{p+j}<l\leqslant n_{p+j+1}$. Тогда в силу (2) получим

$$\left|\sum_{n=q}^{l}a_{mn}\eta_n\right|=\left|\sum_{n=q}^{n_{p+1}}a_{mn}\eta_n+\sum_{i=1}^{j-1}\left(\sum_{n=n_{p+i}+1}^{n_{p+i+1}}a_{mn}\eta_n\right)+\sum_{n=n_{p+j}+1}^{l}a_{mn}\eta_n\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{p+1}\left|\sum_{n=q}^{n_{p+1}}a_{mn}\xi_n\right|+\sum_{i=1}^{j-1}\left(\sqrt{p+i+1}\left|\sum_{n=n_{p+i}+1}^{n_{p+i+1}}a_{mn}\xi_n\right|\right)+$$

$$+\sqrt{p+j+1}\left|\sum_{n=n_{p+j}+1}^{l}a_{mn}\xi_n\right|\leqslant\frac{\sqrt{p+1}}{2^p p}+\sum_{i=1}^{j-1}\frac{\sqrt{p+i+1}}{2^{p+i}(p+i)}+$$

$$+\frac{\sqrt{p+j+1}}{2^{p+j}(p+j)}<\sum_{i=0}^{j}\frac{1}{2^{p+i}}<\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant\frac{1}{2^{k-1}}<\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и критерия Коши сходимости ряда получим, что $\forall\, m$ ряд $\tau_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn}\eta_n$ сходится.

Обозначим $B(A(zx)) = \{w_m\}_{m=1}^{\infty}$. Тогда $w_m = \alpha_m\tau_{m+\mu(m)} + \beta_m\tau_{m+\nu(m)} + \gamma_m\tau_{m+\pi(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$. В силу выбора последовательностей $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ для w_{m_k} получим оценку:

$$|w_{m_k}| = \left|\alpha_{m_k}\sum_{n=1}^{n_{k-1}} a_{m_k+\mu(m_k),n}\eta_n + \beta_{m_k}\sum_{n=1}^{n_{k-1}} a_{m_k+\nu(m_k),n}\eta_n + \right.$$

$$+ \gamma_{m_k}\sum_{n=1}^{n_{k-1}} a_{m_k+\pi(m_k),n}\eta_n + \alpha_{m_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{m_k+\mu(m_k),n}\,\eta_n +$$

$$+ \beta_{m_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{m_k+\nu(m_k),n}\eta_n + \gamma_{m_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{m_k+\pi(m_k),n}\eta_n +$$

$$+ \alpha_{m_k}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_{k+i}+1}^{n_{k+i+1}} a_{m_k+\mu(m_k),n}\eta_n\right) + \beta_{m_k}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_{k+i}+1}^{n_{k+i+1}} a_{m_k+\nu(m_k),n}\eta_n\right) +$$

$$\left. + \gamma_{m_k}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{n=n_{k+i}+1}^{n_{k+i+1}} a_{m_k+\pi(m_k),n}\eta_n\right)\right| \leqslant \alpha_{m_k}\frac{\sqrt{k-1}}{k} + \beta_{m_k}\frac{\sqrt{k-1}}{k} +$$

$$+ \gamma_{m_k}\frac{\sqrt{k-1}}{k} + |S_k| + \alpha_{m_k}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sqrt{k+i+1}}{2^{k+i}(k+i)} + \beta_{m_k}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sqrt{k+i+1}}{2^{k+i}(k+i)} +$$

$$+ \gamma_{m_k}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sqrt{k+i+1}}{2^{k+i}(k+i)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} + |S_k| + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Для S_k справедлива оценка:

$$|S_k| = \sqrt{k}\left|\alpha_{m_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{m_k+\mu(m_k),n}\xi_n + \beta_{m_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{m_k+\nu(m_k),n}\xi_n + \right.$$

$$\left. + \gamma_{m_k}\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} a_{m_k+\pi(m_k),n}\xi_n\right| \leqslant \frac{2}{\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{2^{k-1}}.$$

Таким образом, $|w_{m_k}| < 3/\sqrt{k} + (\sqrt{k}+1)/2^{k-1} \to 0$, $k \to \infty$.

Согласно выбору чисел α_m, β_m, γ_m точка w_{m_k} принадлежит замкнутому треугольнику с вершинами $\tau_{m_k+\mu(m_k)}$, $\tau_{m_k+\nu(m_k)}$, $\tau_{m_k+\pi(m_k)}$, т. е. замкнутой выпуклой оболочке последовательности $\tau_{m_k+\mu(m_k)}$, $\tau_{m_k+\mu(m_k)+1}, \ldots$, которую обозначим $K_{m_k+\mu(m_k)}$. Так как $K(A(zx)) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} K_{m_k+\mu(m_k)}$ и $w_{m_k} \to 0$, $k \to \infty$, то $0 \in K(A(zx))$, чем и завершается доказательство.

З а м е ч а н и е 1. Аналогично можно показать справедливость теоремы 2 для линейных регулярных операторов вида (1), где T — множество натуральных чисел и $\beta = +\infty$.

О п р е д е л е н и е. *Оператор* $A : F(S) \to F(T)$ *назовем сильно регулярным, если из равенства* $K(x) = \{a\}$ *следует равенство* $K(A(x)) = \{a\}$, *где a — конечная или бесконечно удаленная точка комплексной плоскости $\overline{C}$.*

Теорема 3. *Всякий сильно регулярный линейный оператор $A: F(S) \to F(T)$, обладающий свойством* (К), *осуществляет вложение ядер.*

Доказательство. Путь x—произвольная функция из $F(S)$. Если $K(x) \equiv \overline{C}$ или $K(x) = \{a\}$, $a \in \overline{C}$, то теорема очевидна. Предположим, что $K(x) \not\equiv \overline{C}$, $K(x) \not\equiv \{a\}$ и $K(A(x)) \subset K(x)$. Из последнего и из того, что A переводит ограниченные функции в ограниченные, следует существование $b \in K(A(x)) \setminus K(x)$, $b \in C$.

Рассмотрим функцию $y(s) = x(s) - b$, $s \in S$. В силу определения ядра и регулярности оператора A ядра $K(y)$ и $K(A(y))$ получаются соответственно из ядер $K(x)$ и $K(A(x))$ сдвигом на вектор b, т. е. $0 \in K(A(y)) \setminus K(y)$. Поскольку A обладает свойством (К), существует $z(s) \to +\infty$, $s \to \alpha$, такая, что $zy \in F(S)$ и $0 \in K(A(zy))$. Так как $0 \notin K(y)$, то $K(zy) = \{\infty\}$, что противоречит сильной регулярности оператора A.

Следствием теорем 2 и 3 является следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы регулярная матрица A осуществляла вложение ядер для любой последовательности, к которой она применима, необходимо и достаточно, чтобы A была сильно регулярной.*

Замечание 2. Аналогичная теорема справедлива и для операторов вида (1), где T — множество натуральных чисел и $\beta = +\infty$.

Замечание 3. В [3, с. 392) найден критерий вложения обобщенных ядер, из которого с помощью теоремы 4 следует, что действительная матрица осуществляет вложение ядер для последовательностей, к которым она применима, тогда и только тогда, когда она является T_∞-матрицей. Из того же критерия и теоремы 4 следует, что если матрица A—конечнострочная, то она сильно регулярна тогда и только тогда, когда $B = (\mathrm{Re}\, a_{mn})$ — T_∞-матрица, а $D = (\mathrm{Im}\, a_{mn})$ такова, что $\mathrm{Im}\, a_{mn} = 0$ при $n > N$, $m > M$.

Для нижних треугольных матриц теорема 4 следует из теоремы 6.3, III книги [4, с. 169].

1. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы : Общая теория.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
2. *Jajte R.* General theory of summabibily. I. — Acta scient. math., 1965, 26, N 1—2, p. 107—116.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды.—М.: Изд-во иностр. лит., 1951.— 504 с.
4. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей.— М.: Физматгиз, 1960.— 471 с.

Киев. пед. ин-т

Поступила 11.03.83,
после доработки — 06.02.84